Jörg MEYER, Hameln

14. November 2023

Kegelschnitte als rationale Bézierkurven

Parabeln als ganze quadratische Bézierkurven

Mit $s:=1-t$ und den Punkten A, B, C sei
$U=s\cdot A+t\cdot B$ und $V=s\cdot B+t\cdot C$. Dann beschreibt

$$P(t)=s\cdot U+t\cdot V=s^2\cdot A+2\cdot s\cdot t\cdot B+t^2\cdot C$$

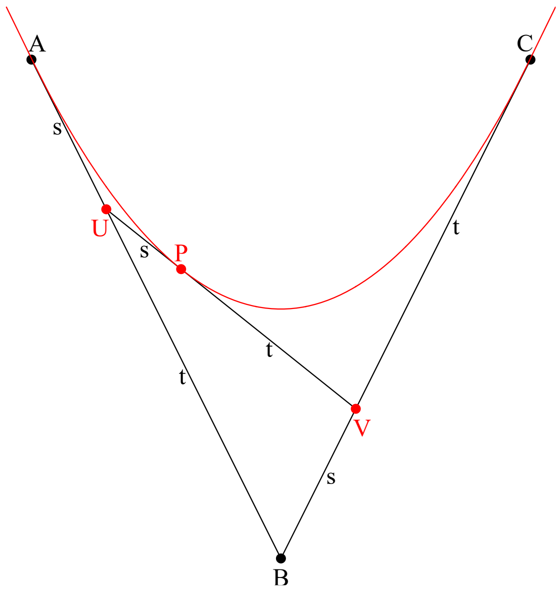
eine quadratische ganze Bézierkurve.

Mit $A=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ bekommt man

wegen

$$P(t)=s^2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+2\cdot s\cdot t\cdot\begin{pmatrix}1/2\\0\end{pmatrix}+t^2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\cdot(s+t)\\t^2\end{pmatrix}$$

die Normalparabel. Der Kontrollpunkt B ist Schnittpunkt der Tangenten in A und in C.



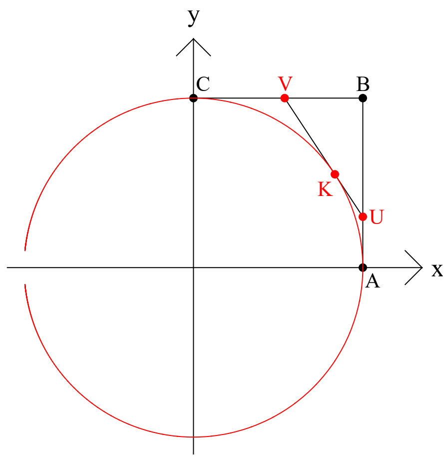
Da Ellipsen und Hyperbeln keine ganzen quadratischen Kurven sind (d.h. im Nenner von P(t) steht ein Polynom in t), muss man die Vorgehensweise etwas modifizieren:

Kreise

Der Einheits*kreis* um den Ursprung hat mit $s:=1-t$ den allgemeinen Punkt

$$K(t)=\frac{\begin{pmatrix}1-t^2\\2\cdot t\end{pmatrix}}{1+t^2}=\frac{s^2\cdot\overset{A}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}+2\cdot s\cdot t\cdot\overset{B}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}+t^2\cdot\boxed{2}\cdot\overset{C}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}}{s^2+2\cdot s\cdot t+\boxed{2}\cdot t^2}$$

$$=\frac{s\cdot\left(\overbrace{s\cdot A+t\cdot B}^{u\cdot U=U}\right)+t\cdot\left(\overbrace{s\cdot B+\boxed{2}\cdot t\cdot C}^{v\cdot V}\right)}{s\cdot\left(\underbrace{s+t}_{u=1}\right)+t\cdot\left(\underbrace{s+\boxed{2}\cdot t}_{v}\right)}=\frac{s\cdot u\cdot U+t\cdot v\cdot V}{s\cdot u+t\cdot v}$$



Digression: Vom Kreis zu Parabel und Hyperbel

Ersetzt man in $K(t)=\dfrac{\begin{pmatrix}1-t^2\\2\cdot t\end{pmatrix}}{1+t^2}=\dfrac{s^2\cdot\overset{A}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}+2\cdot s\cdot t\cdot\overset{B}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}+t^2\cdot\boxed{2}\cdot\overset{C}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}}{s^2+2\cdot s\cdot t+\boxed{2}\cdot t^2}$ die $\boxed{2}$ durch $\boxed{1}$, bekommt man

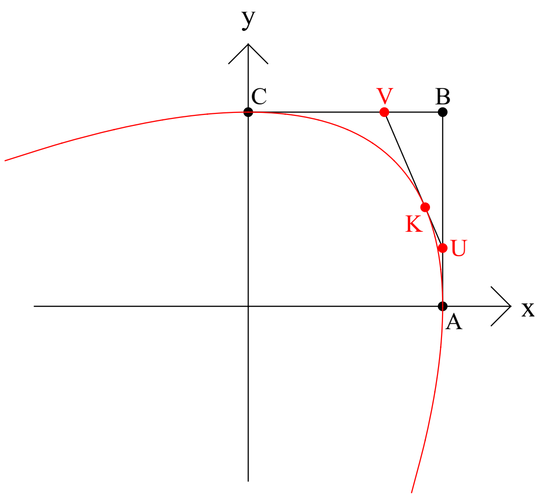
$\dfrac{s^2\cdot\overset{A}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}+2\cdot s\cdot t\cdot\overset{B}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}+t^2\cdot\boxed{1}\cdot\overset{C}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}}{s^2+2\cdot s\cdot t+\boxed{1}\cdot t^2}=\dfrac{\begin{pmatrix}1-2\cdot t+t^2+2t-2\cdot t^2\\2\cdot t-2\cdot t^2+t^2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1-t^2\\-2\cdot t-t^2\end{pmatrix}$, also eine ganze quadratische

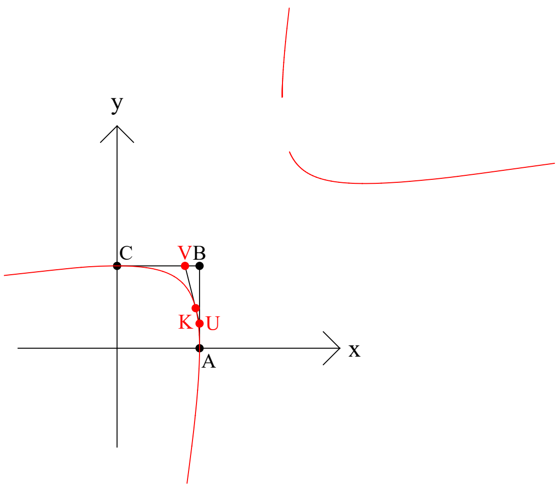
Kurve, mithin eine Parabel.

Ersetzt man die $\boxed{2}$ durch $\boxed{0{,}5}$, bekommt man im Nenner einen Term mit zwei verschiedenen reellen Nullstellen, also eine Hyperbel.

Der Nenner $1-2\cdot t+t^2+2\cdot t-2\cdot t^2+\boxed{h}\cdot t^2=1-\left(1-\boxed{h}\right)\cdot t^2$ hat wegen $t^2=\dfrac{1}{1-\boxed{h}}$ zwei reelle Nullstellen für $\boxed{h}<1$. Das ist der Hyperbelfall.

In den folgenden Graphiken sieht man links den Fall $\boxed{h}=1$ Parabel) und rechts den Fall $\boxed{h}=0{,}5$ (Hyperbel).





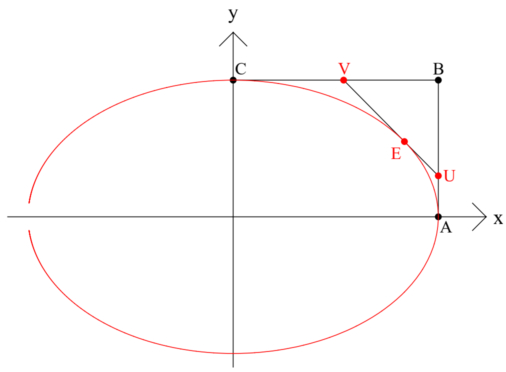
Für $\boxed{h}=0$ bekommt man mit $K(t)=\dfrac{(1-t)\cdot\overset{A}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}+2\cdot t\cdot\overset{B}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}}{1+t}$ die Gerade durch A und B.

Ellipsen mit Standardgleichung

Wir gehen aus von der Standardgleichung: Die *Ellipse* mit der Gleichung $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2=1$ hat den allgemeinen Punkt

$$E(t)=\frac{\begin{pmatrix} a\cdot(1-t^2) \\ b\cdot 2\cdot t \end{pmatrix}}{1+t^2}=\frac{s^2\cdot\overset{A}{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}}+2\cdot s\cdot t\cdot\overset{B}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}+t^2\cdot\boxed{2}\cdot\overset{C}{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}}}{s^2+2\cdot s\cdot t+\boxed{2}\cdot t^2}$$

$$=\frac{s\cdot\left(\overbrace{s\cdot A+t\cdot B}^{u\cdot U=U}\right)+t\cdot\left(\overbrace{s\cdot B+\boxed{2}\cdot t\cdot C}^{v\cdot V}\right)}{s\cdot\left(\underbrace{s+t}_{u=1}\right)+t\cdot\left(\underbrace{s+\boxed{2}\cdot t}_{v}\right)}=\frac{s\cdot u\cdot U+t\cdot v\cdot V}{s\cdot u+t\cdot v}$$



Hyperbeln mit Standardgleichung

Die *Hyperbel* mit der Gleichung $x^2-y^2=9$ hat den allgemeinen Punkt $H(t)=\frac{3\cdot\begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 2\cdot t \end{pmatrix}}{1-t^2}$ (um ganzzahlige Punktkoordinaten zu bekommen, wurde als Ausgangsgleichung nicht $x^2-y^2=1$ gewählt); insbesondere ist $H(0)=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}=:A$ und $H\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\cdot\begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\frac{3}{4}}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=:C$.

Die Tangente in C hat die Gleichung $5\cdot x-4\cdot y=9$; sie schneidet die Tangente in A im Punkt $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, so dass sich B als Kontrollpunkt anbietet.

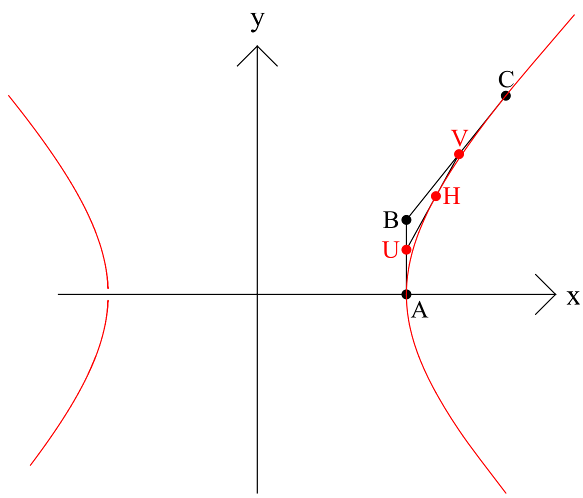
Die Hyperbel hat mit $s:=1-2\cdot t$ den allgemeinen Punkt

$$H(t)=\frac{3\cdot\begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 2\cdot t \end{pmatrix}}{1-t^2}$$

$$=\frac{s^2\cdot\overset{A}{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}+4\cdot t\cdot s\cdot\overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}}^{B}+3\cdot t^2\cdot\overset{C}{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}}}{s^2+4\cdot s\cdot t+3\cdot t^2}$$

$$=\frac{s\cdot\left(\overbrace{s\cdot A+2\cdot t\cdot B}^{u\cdot U=U}\right)+t\cdot\left(\overbrace{2\cdot s\cdot B+3\cdot t\cdot C}^{v\cdot V}\right)}{s\cdot\left(\underbrace{s+2\cdot t}_{u=1}\right)+t\cdot\left(\underbrace{2\cdot s+3\cdot t}_{v}\right)}$$

$$=\frac{s\cdot u\cdot U+t\cdot v\cdot V}{s\cdot u+t\cdot v}$$



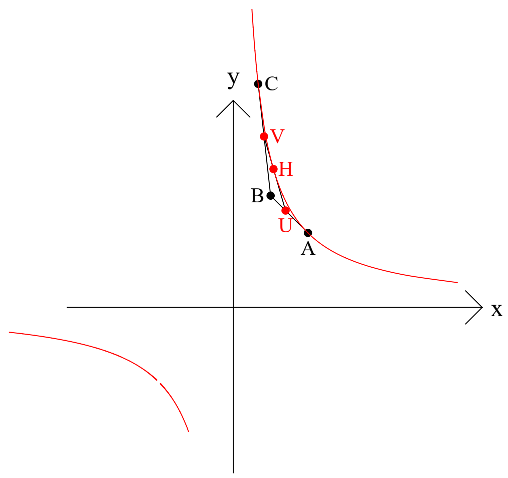
Obwohl A, B und C mit dem rechten Hyperbelast zusammenhängen, bekommt man für $t<-1$ und $t>1$ den linken Hyperbelast.

Geht man aus von der Hyperbelgleichung $x\cdot y=9$, hat man die Kurvenpunkte $A=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ und $C=\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$ sowie den Kontrollpunkt $B=\frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ als Schnittpunkt der Tangenten in A und C. Mit $s:=1-2\cdot t$ ist

$$3\cdot\begin{pmatrix}\frac{1-t}{1+t}\\\frac{1+t}{1-t}\end{pmatrix}=\frac{3\cdot\begin{pmatrix}(1-t)^2\\(1+t)^2\end{pmatrix}}{1-t^2}=\frac{s^2\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}}^{A}+2\cdot s\cdot t\cdot\boxed{2}\cdot\overbrace{\frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}^{B}+t^2\cdot\boxed{3}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}}^{C}}{s^2+2\cdot s\cdot t\cdot\boxed{2}+t^2\cdot\boxed{3}}$$

$$\ldots=\frac{s\cdot\left(\overbrace{A+2\cdot t\cdot B}^{u\cdot U}\right)+t\cdot\left(\overbrace{2\cdot s\cdot B+3\cdot t\cdot C}^{v\cdot V}\right)}{s\cdot\left(\underbrace{s+2\cdot t}_{u=1}\right)+t\cdot\left(\underbrace{2\cdot s+3\cdot t}_{v}\right)}$$

$$=\frac{s\cdot u\cdot U+t\cdot v\cdot V}{s\cdot u+t\cdot v}$$



Es geht auch anders und direkter: A und C liegen auf der Hyperbel mit $x\cdot y=1$, und B ist Schnittpunkt der Tangenten von A und C. Dann ist

$$H=\begin{pmatrix}t\\1/t\end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix}t^2\\1\end{pmatrix}}{t}=\frac{(2-t)^2\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}^{A}+3\cdot(2-t)\cdot(t-1)\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}4/3\\2/3\end{pmatrix}}^{B}+2\cdot(t-1)^2\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix}}^{C}}{(2-t)^2+3\cdot(2-t)\cdot(t-1)+2\cdot(t-1)^2}$$

$$=\frac{(2-t)\cdot\overbrace{\left(\frac{(2-t)\cdot A+(t-1)\cdot B}{1}\right)}^{U}+2\cdot(t-1)\cdot\overbrace{\left(\frac{(2-t)\cdot B+(t-1)\cdot C}{1}\right)}^{V}}{(2-t)\cdot 1+2\cdot(t-1)\cdot 1}$$

$$=\frac{(2-t)\cdot U+2\cdot(t-1)\cdot V}{t}$$

Mit $s := 2 - t$ ist $1 - s = t - 1$, und damit ist

$$U = s \cdot A + (1 - s) \cdot B$$
$$V = s \cdot B + (1 - s) \cdot C \quad .$$
$$H = \frac{s \cdot U + 2 \cdot (1 - s) \cdot V}{2 - s}$$