

Andere Deutungen von Integralen

Integrale beschreiben nicht nur Flächeninhalte oder Bogenlängen, sondern noch viel mehr!

Inhalt

1.	Rotation um die x-Achse	1
2.	Toricelli-Trompete	2
3.	Rotation um die y-Achse	2
4.	Bogenlänge	2
5.	Auf dem Weg zu Guldin 2	3
6.	Vorüberlegung zu Schwerpunkten	5
7.	Flächen-Schwerpunkte	6
8.	Flächenschwerpunkt eines Halbkreises	6
9.	Guldin 2	6
10.	Schwerpunkt eines Parabelsegments	7
11.	Die Mantelfläche eines Drehkörpers bei Rotation um die x-Achse	7
12.	Noch einmal Torricelli	8
13.	Linienschwerpunkte	8
14.	Guldin 1	9
15.	Linienschwerpunkt eines Halbkreises	9

1. Rotation um die x-Achse

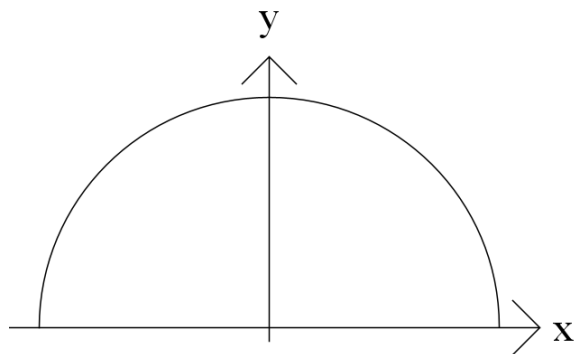
Das Volumen des zugehörigen Rotationskörpers beträgt $V_x = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx$; der Körper wird durch

Zylinderscheiben angenähert.

Bsp.: Kugel

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V_x = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \cdot dx = \pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot r^3$$



2. Torricelli-Trompete

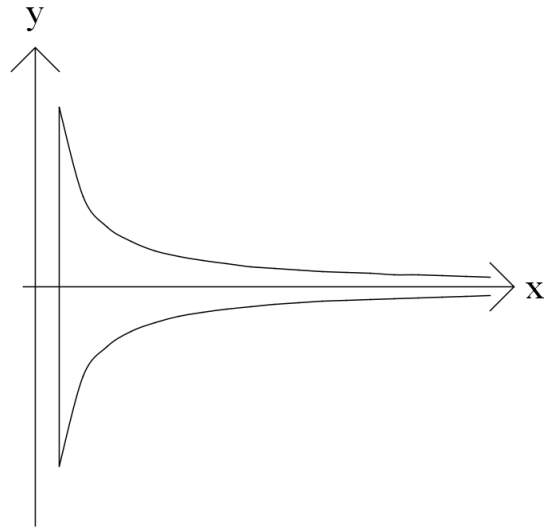
$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a=1, \quad b=\infty$$

Die Fläche zwischen Graph und x-Achse hat den

$$\text{Inhalt } A = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \infty; \text{ andererseits ist}$$

$$V_x = \pi \cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi \cdot \frac{-1}{x} \Big|_1^{\infty} = \pi.$$

Der Rotationskörper hat ein endlich großes Volumen, aber eine unendlich große Querschnittsfläche!

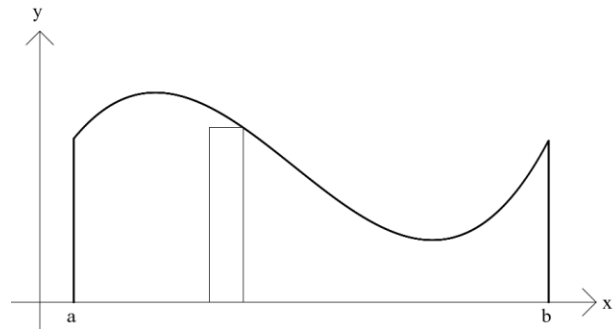


3. Rotation um die y-Achse

Der Körper wird angenähert durch Hohlzylinder; dies führt zu

$$V_y \approx \sum (2 \cdot \pi \cdot x) \cdot \Delta x \cdot f(x) \text{ und damit zu}$$

$$V_y = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx.$$

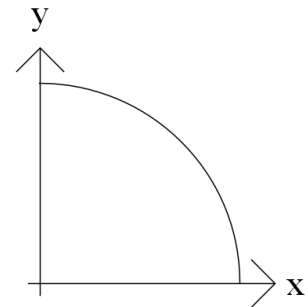


Bsp.: Viertelkreis rotiert um y-Achse

$$v_y = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^r x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx; \text{ die Substitution } z = r^2 - x^2; dz = -2 \cdot x \cdot dx$$

liefert

$$V_y = -2 \cdot \pi \cdot \int_{r^2}^0 \sqrt{z} \cdot \frac{dz}{2} = \pi \cdot \int_0^{r^2} z^{1/2} \cdot dz = \pi \cdot \frac{z^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{r^2} = \pi \cdot \frac{r^3}{3/2} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$



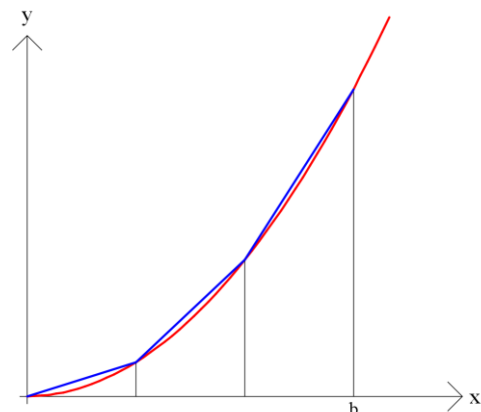
4. Bogenlänge

Der Graph wird durch einen Streckenzug approximiert.

$$L \approx \sum \Delta s = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \int \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx = L$$

(Hier hat man zwei Grenzübergänge: den von der Summe zum Integral und den vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten.)



Nur in seltenen Fällen ist das entstehende Integral elementar auswertbar.

Bsp: Oberer Viertelkreis mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$; $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 \cdot x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$; $\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{y}$;

$L = r \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} \cdot dx$. Die Substitution $x = r \cdot \sin t$; $dx = r \cdot \cos t \cdot dt$ liefert

$$L = r \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 t}} \cdot r \cdot \cos t \cdot dt = r \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{r \cdot \cos t}{r \cdot \cos t} \cdot dt = r \cdot \frac{\pi}{2}.$$

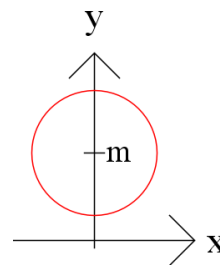
5. Auf dem Weg zu Guldin 2

Man berechne das Volumen des Torus, der durch Rotation des Kreises

$K: x^2 + (y - m)^2 = r^2$ um die x -Achse entsteht¹.

Die Halbkreise haben die Gleichungen $y = m \pm \sqrt{r^2 - x^2}$; das Torusvolumen ist

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^r \left((m + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (m - \sqrt{r^2 - x^2})^2 \right) \cdot dx = \pi \cdot 4 \cdot m \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx.$$



Das Integral der rechten Seite ist so groß, wie die Fläche des oberen Halbkreises, so dass man die Beziehung

$$V = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot (\pi \cdot r^2)$$

hat. Der Vorfaktor $2 \cdot \pi \cdot m$ beschreibt dabei den Weg des Kreismittelpunktes bei Rotation um die x -Achse.

Deutet sich hier ein allgemeiner Zusammenhang an? Er könnte folgendermaßen lauten:

„Rotiert eine Fläche um eine Achse, so ist das Drehkörpervolumen gleich dem Flächeninhalt mal dem Weg des Flächenmittelpunktes.“

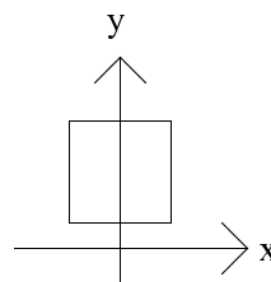
Nun sollte man diese Vermutung testen an anderen Beispielen, etwa mit einem rotierenden Quadrat.

Der Mittelpunkt sei $\begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}$, und die Seitenlänge sei a . Dann ist (ohne

Integralrechnung!)

$$V = \pi \cdot a \cdot \left(m + \frac{a}{2}\right)^2 - \pi \cdot a \cdot \left(m - \frac{a}{2}\right)^2 = \pi \cdot a \cdot 2 \cdot a \cdot m = (2 \cdot \pi \cdot m) \cdot (a^2).$$

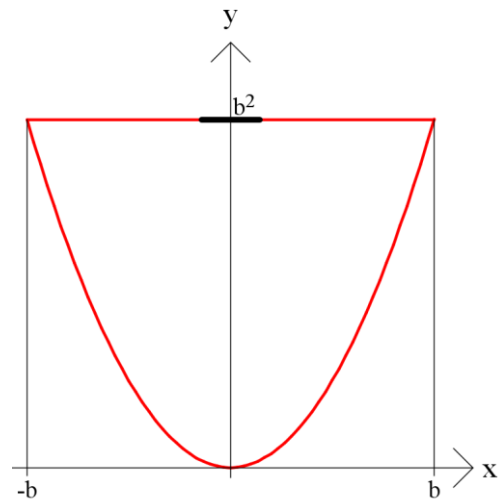
Die Vermutung scheint zu stimmen.



¹¹ nach Steinberg: Entdecken – Erkennen – Verstehen. In: Der Mathematikunterricht 5/1986; S. 55 ff.

Nehmen wir als nächstes Beispiel eine in analoger Weise rotierendes Parabelsegment zu $y = x^2$. Was soll jetzt der Mittelpunkt sein?

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \cdot (b^2)^2 \cdot 2 \cdot b - \pi \cdot \int_{-b}^b (x^2)^2 \cdot dx \\ &= 2 \cdot \pi \cdot b^5 - 2 \cdot \pi \cdot \frac{b^5}{5} = 8 \cdot \pi \cdot \frac{b^5}{5} \\ A &= 2 \cdot b \cdot b^2 - \int_{-b}^b x^2 \cdot dx = 2 \cdot b^3 - 2 \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{4}{3} \cdot b^3 \end{aligned}$$

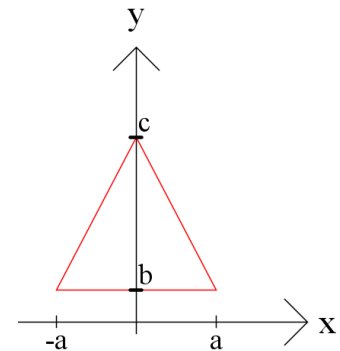


Wenn die Vermutung stimmt, ist $V_x = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot A$ und damit $\pi \cdot \frac{8}{5} \cdot b^5 = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot \frac{4}{3} \cdot b^3$; $\boxed{\frac{3}{5} \cdot b^2 = m}$.

Ist das überhaupt richtig?

Nehmen wir deshalb eine vertrautere Figur, nämlich ein in analoger Weise rotierendes Dreieck.

$$\begin{aligned} V_x &= 2 \cdot \pi \cdot \left(\int_0^a \left(\frac{b-c}{a} \cdot x + c \right)^2 \cdot dx - b^2 \cdot a \right) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{3} \cdot (c^2 + b \cdot c - 2 \cdot b^2) \\ A &= a \cdot (c - b) \\ V_x &= 2 \cdot \pi \cdot m \cdot A \text{ liefert } m = \frac{c + 2 \cdot b}{3}, \text{ also den (Flächen-) Schwerpunkt.} \end{aligned}$$



Da Dreiecke und Parabelsegmente gar keinen Mittelpunkt haben, ist es ohnehin sinnvoller, über Schwerpunkte zu reden und die Vermutung umzuformulieren:

„Rotiert eine Fläche um eine Achse, so ist das Drehkörpervolumen gleich dem Flächeninhalt mal dem Weg des Flächen-Schwerpunkts.“

Aber wie berechnet man Flächen-Schwerpunkte?

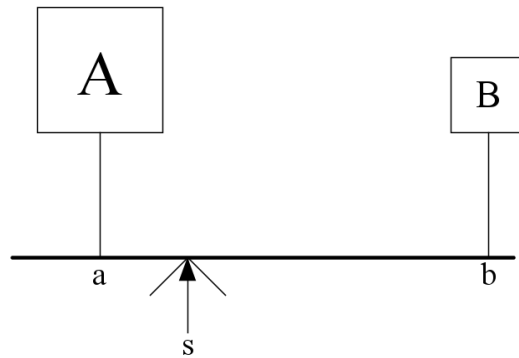
Die eingeschlagene Vorgehensweise ist einigermaßen typisch. Wir hatten eine Vermutung, die noch nicht bewiesen ist. Wir haben noch keinen Weg hin zur Vermutung, haben aber eine andere Vermutung (über den Parabelsegment-Schwerpunkt), der aus der ursprünglichen Vermutung folgt. Dieses Hin und her in der logischen Argumentationsrichtung ist für Entdeckungsprozesse charakteristisch.

Unser Problem, die Vermutung zu beweisen, hat uns erst einmal zu einem neuen Problem geführt, das wir vorher lösen müssen, nämlich: Wie berechnet man Schwerpunkte?

6. Vorüberlegung zu Schwerpunkten

Bei zwei Massestücken A und B gilt wegen des Hebelgesetzes (Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm) für die x-Koordinate s des Schwerpunkts:

$$\begin{aligned} A \cdot (s - a) &= B \cdot (b - s) \\ s \cdot (A + B) &= a \cdot A + b \cdot B \\ s &= \frac{a \cdot A + b \cdot B}{A + B} \end{aligned}$$

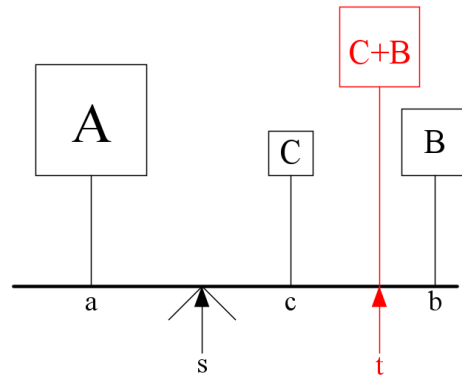


Bei drei Massestücken A, B, C rechnet man

zunächst die x-Koordinate $t = \frac{b \cdot B + c \cdot C}{B + C}$ des

Scherpunkts von B und C aus; an der Stelle kann man sich die Massen B und C vereint denken. Dann ist

$$s = \frac{a \cdot A + t \cdot (B + C)}{A + (B + C)} = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{A + B + C}$$



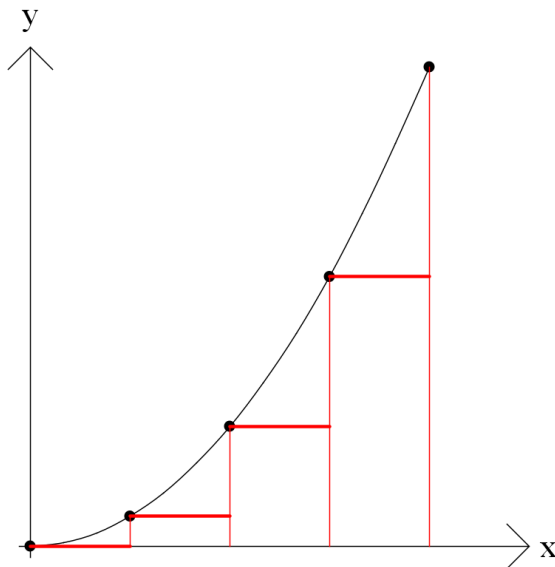
Analog ist die x-Koordinate s des Schwerpunkts von n Massestückchen den Wert

$$x_S = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + \dots + x_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

und die y-Koordinate hat den Wert

$$y_S = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + \dots + y_n \cdot A_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$

7. Flächen-Schwerpunkte



Will man den Schwerpunkt einer Fläche unter einer Kurve haben, approximiert man die Kurve durch eine Treppenkurve. Unter den Treppenstufen haben die Rechtecke den Inhalt $f(x) \cdot \Delta x$. Die x-Koordinate des Schwerpunkts ist dann

$$x_{\text{FI}} \approx \frac{\sum x \cdot (f(x) \cdot \Delta x)}{\sum f(x) \cdot \Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx}$$

$$= \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\text{Gesamtfläche}} = x_{\text{FI}}$$

Für die y-Koordinate des Schwerpunkts gilt: Die Flächenstückchen haben jeweils den Inhalt $f(x) \cdot \Delta x$; die zugehörigen y-Werte sind nun aber jeweils $\frac{f(x)}{2}$, was auf

$$y_{\text{FI}} \approx \frac{\sum \frac{f(x)}{2} \cdot (f(x) \cdot \Delta x)}{\sum f(x) \cdot \Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx}{\int_a^b f(x) \cdot dx} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx}{\text{Gesamtfläche}} = y_{\text{FI}}$$

führt.

8. Flächenschwerpunkt eines Halbkreises

mit $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$:

$$y_{\text{FI}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b (f(x))^2 \cdot dx}{\text{Gesamtfläche}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \cdot dx}{\pi \cdot r^2 / 2} = \frac{r^2 \cdot 2 \cdot r - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r}{\pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$$

$$x_{\text{FI}} = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx}{\text{Gesamtfläche}} = \frac{\int_{-r}^r x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx}{\pi \cdot r^2 / 2} = 0, \text{ da der Integrand punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

ist.

9. Guldin 2

Nun ist einfach zu sehen:

Rotiert eine Fläche um die x-Achse, so ist das Drehkörpervolumen gleich dem Flächeninhalt mal dem

$$\text{Weg der y-Koordinate des Flächenschwerpunkts: } V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx = A \cdot 2 \cdot \pi \cdot s_y = A \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_a^b y^2 \cdot dx}{A}.$$

Rotiert eine Fläche um die y-Achse, so ist das Drehkörpervolumen gleich dem Flächeninhalt mal dem

$$\text{Weg der y-Koordinate des Flächenschwerpunkts: } V_y = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b x \cdot y \cdot dx = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot s_x = 2 \cdot \pi \cdot A \cdot \frac{\int_a^b x \cdot y \cdot dx}{A}.$$

Diese (nun bewiesenen) Sätze sind die 2. Guldin'sche Regel (Paul Habakuk Guldin, 1577 – 1647).

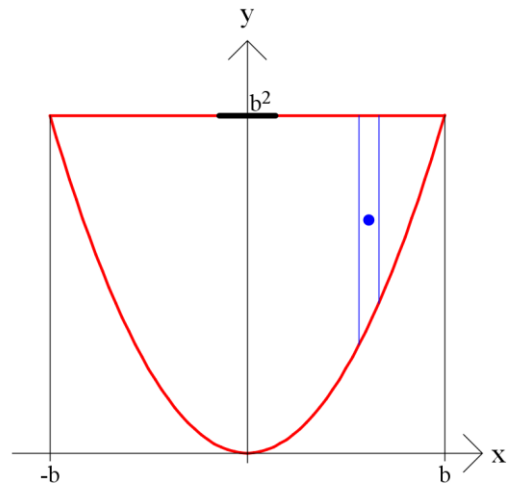
10. Schwerpunkt eines Parabelsegments

Zurück zum Schwerpunkt des Parabelsegments:
Klar: die x-Koordinate ist 0.

$$y_{Fl} \approx \frac{\sum \frac{y+b^2}{2} \cdot ((b^2-y) \cdot \Delta x)}{A} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int_{-b}^b (b^4 - y^2) \cdot dx}{A}$$

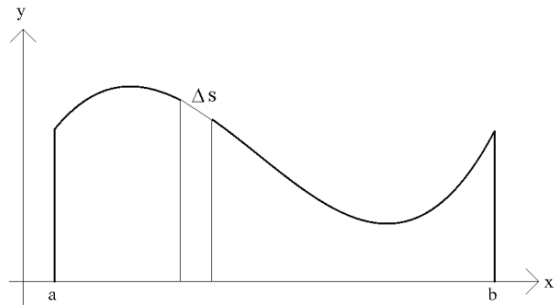
$$= \frac{\frac{1}{2} \int_{-b}^b (b^4 - x^4) \cdot dx}{\frac{4}{3} \cdot b^3} = \frac{b^4 \cdot 2 \cdot b - 2 \cdot \frac{b^5}{5}}{\frac{8}{3} \cdot b^3} = b^2 \cdot \frac{3}{5}$$

in Übereinstimmung mit der früheren Vermutung.

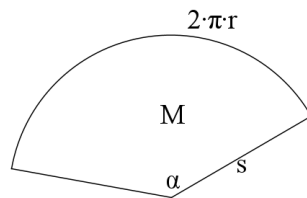
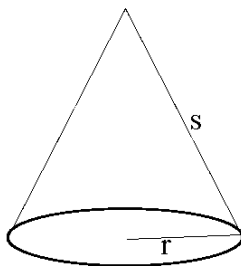


11. Die Mantelfläche eines Drehkörpers bei Rotation um die x-Achse

Die Idee bei ihrer Bestimmung besteht darin, sich den Mantel aus den Mänteln kleiner Kegelstümpfe zusammengesetzt zu denken.



Ein Kegel hat die Mantelfläche $M = \pi \cdot r \cdot s$



Wegen $M = \pi \cdot s^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ und $2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$ ist

$$M = \pi \cdot s^2 \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot s} = \pi \cdot r \cdot s.$$

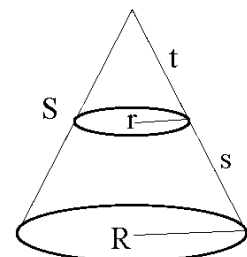
Ein Kegelstumpf hat die Mantelfläche $M_{\text{Kegelstumpf}} = \pi \cdot (R \cdot S - r \cdot t)$.

Wegen

$$\frac{R}{r} = \frac{S}{t} = \frac{S}{S-s}$$

$$R \cdot S - s \cdot R = S \cdot r$$

$$S \cdot (R-r) = s \cdot R$$



ist $S = \frac{R \cdot s}{R-r}$ und $t = S - s = \frac{R \cdot s - s \cdot (R-r)}{R-r} = \frac{s \cdot r}{R-r}$, also

$$M_{\text{Kegelstumpf}} = \pi \cdot (R \cdot S - r \cdot t) = \pi \cdot \left(R \cdot \frac{R \cdot s}{R-r} - r \cdot \frac{s \cdot r}{R-r} \right) = \pi \cdot s \cdot \frac{R^2 - r^2}{R-r} = \pi \cdot s \cdot (R+r).$$

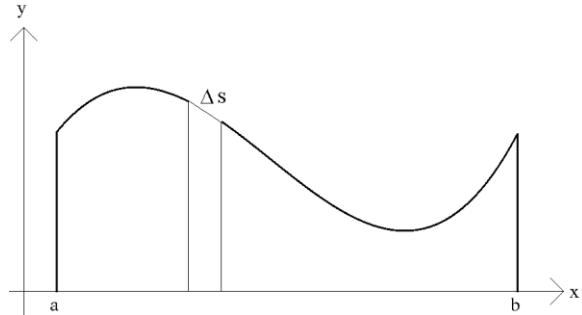
Mit dem mittleren Radius ρ ist $M_{\text{Kegelstumpf}} = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot \rho$.

Damit gilt für einen Teil der Mantelfläche

$$\begin{aligned} \Delta M_x &\approx 2 \cdot \pi \cdot \Delta s \cdot y \\ &= 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

und deshalb (wieder mit dem zweifachen Grenzübergang)

$$M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx.$$



Bsp. Kugeloberfläche: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 \cdot x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

$$M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

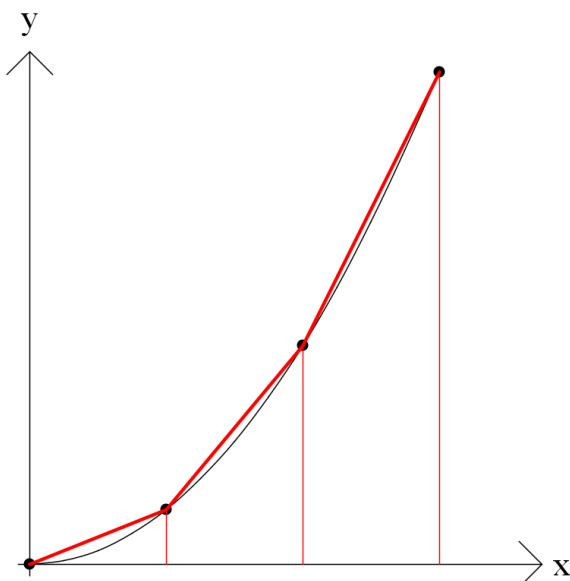
12. Noch einmal Torricelli

Torricelli-Trompete zu $y=1/x$; $y' = -1 \cdot x^{-2}$

$$M_x = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x^3} \cdot \sqrt{1 + x^4} \cdot dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^\infty \frac{\sqrt{1 + x^4}}{x^6} \cdot dx \geq 2 \cdot \pi \cdot \int_1^\infty \sqrt{\frac{1}{x^2}} \cdot dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot dx = \infty$$

Der Mantel hat unendlichen Flächeninhalt, obwohl das Volumen der Trompete endlich ist!

13. Linienschwerpunkte



Will man den Schwerpunkt einer Kurve haben, approximiert man die Kurve durch einen Streckenzug mit den (unterschiedlich großen) Streckenlängen

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x.$$

Die x-Koordinate des Schwerpunkts ist dann

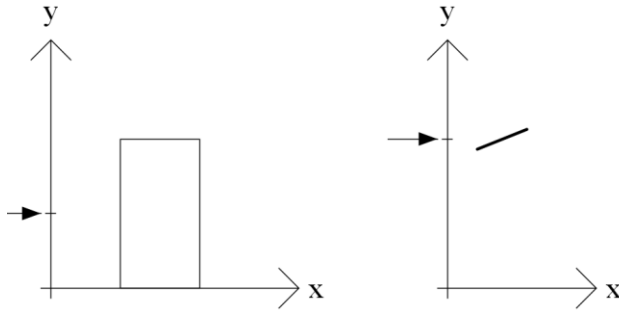
$$x_{\text{Lin}} \approx \frac{\sum x \cdot \Delta s}{\sum \Delta s} = \frac{\sum x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x}{\sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x}$$

$$\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx}{\text{Gesamtlänge}} = x_{\text{Lin}}$$

Analog ist die y-Koordinate des Linienschwerpunkts gegeben durch

$$y_{\text{Lin}} \approx \frac{\sum y \cdot \Delta s}{\sum \Delta s} = \frac{\sum y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x}{\sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx}{\text{Gesamtlänge}} = y_{\text{Lin}}$$

Warum fehlt der Faktor 1/2?



Bei der Fläche ist die y-Koordinate des Schwerpunkts die halbe Kastenhöhe, bei der Linie ist das nicht der Fall.

14. Guldin 1

Wegen $\text{Gesamtlänge} \cdot (2 \cdot \pi \cdot L_y) = \text{Gesamtlänge} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx}{\text{Gesamtlänge}} = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx = M_x$

gilt die erste Guldin'sche Regel:

Rotiert ein Graph um eine Achse, so ist die Mantelfläche gleich der Gesamtlänge mal dem Weg des Linienschwerpunkts.

15. Linienschwerpunkt eines Halbkreises

mit $y = (r^2 - x^2)^{1/2}$; $y' = \frac{1}{2} \cdot (r^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2 \cdot x) = \frac{-x}{(r^2 - x^2)^{1/2}}$

und $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r}{y}$, also $L_y = \frac{\int_{-r}^r y \cdot \frac{r}{y} \cdot dx}{\pi \cdot r} = \frac{\int_{-r}^r 1 \cdot dx}{\pi} = \frac{2 \cdot r}{\pi}$

und

$$L_x = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx}{\text{Gesamtlänge}} = \frac{r \cdot \int_{-r}^r \frac{x}{y} \cdot dx}{\pi \cdot r} = \frac{r}{\pi \cdot r} \cdot \int_{-r}^r \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot dx = 0$$

(man beachte, dass der Integrand zum Ursprung symmetrisch ist), wie zu erwarten war.

