

## Hüllkurven<sup>1</sup>

### Einleitung

Der Analysisunterricht behandelt die Aufgabe, wie man bei einer gegebenen Kurve in jedem Kurvenpunkt die Tangente berechnet. Eine Kurve wird dabei aufgefaßt als Menge von Punkten; gesucht ist die Menge der Berührgeraden.

Dualisiert man diese Fragestellung, so ist eine Kurve aufzufassen als Hüllkurve von Berührgeraden; gesucht ist dann die Menge der Kurvenpunkte. Die Aufgabe besteht also darin, zu einer beliebigen Kurvengeraden den Berührungspunkt mit der Kurve zu finden.

Hierdurch ist der Begriff der Hüllkurve noch nicht eindeutig definiert<sup>2</sup>. In der Mathematik wird i.a. mit einem recht weiten Hüllkurvenbegriff (vgl. etwa Mangoldt / Knopp) gearbeitet, der aber auf der Schule kaum zu vermitteln sein dürfte. Hier wird nun ein einfacher Hüllkurvenbegriff vorgestellt, der zwar nicht alles abdeckt, was man sich wünschen könnte<sup>3</sup>, aber für Geraden und kopunktales Quadriken ausreicht; weiter wird man auf der Schule kaum gehen.

Da das neue Problem zum alten dual ist, sollte auch die neue Lösung zur alten dual sein. Wie geht man bei der Lösung des alten Problems vor?

Statt der gesuchten Tangente  $t_P$  in einem Kurvenpunkt  $P$  berechnet man zunächst die Sekante  $PQ$  mit einem zweiten beliebigen Kurvenpunkt  $Q$ . Die Tangente in  $P$  erklärt man dann als die Grenzgerade der Sekante für  $Q \rightarrow P$ : Es ist  $t_P = \lim_{Q \rightarrow P} PQ$ .

Diese Vorgehensweise läßt sich vollständig dualisieren:

Statt des gesuchten Berührungspunkts  $B_g$  für eine Kurvengerade  $g$  berechnet man zunächst den Schnittpunkt  $g \cap h$  mit einer zweiten beliebigen Kurvengerade  $h$ . Den Berührungspunkt von  $g$  erklärt man dann als den Grenzpunkt des Schnittpunkts für  $h \rightarrow g$ : Es ist  $B_g = \lim_{h \rightarrow g} g \cap h$ .

Diese Vorgehensweise wird zu Beginn des nächsten Abschnitts am Beispiel erläutert. Eine analoge Übertragung auf kopunktales Quadriken ist naheliegend und Thema der Abschnitte 4 und 5.

Die praktische Durchführung ist i.a. ohne den Einsatz eines Computer-Algebra-Systems unzumutbar, da die notwendigen Termumformungen bis auf harmlose Fälle langwierig und langweilig sind. (Ich habe die Rechnungen von DERIVE durchführen lassen.)

Aber auch für das Zeichnen der Hüllbilder ist ein Computer notwendig; wer wollte diese mühselige Arbeit schon von Hand machen?

Der oben angegebene Hüllkurven-Bestimmungs-Algorithmus liefert die Hüllkurve in Parameterform. Da diese somit als natürliche Beschreibung der Kurve erscheint, habe ich in vielen Fällen darauf verzichtet, die Hüllkurvengleichung in parameterfreier Form anzugeben; auch der anschließende Theorieteil geht von einer Parameterform aus. Auf die damit verbundenen Einschränkungen und auf die Gefährlichkeit von Entparametrisierungen weist der Abschnitt 7.6 hin.

Zur didaktischen Bedeutung der Hüllkurvenbestimmung kann man vieles aus den Artikeln von Schupp und Berg/Schupp zitieren: Will man den Unterricht mit neuartigen Funktionstypen anreichern, sollte man diese nicht irgendwie vom Himmel fallen lassen, sondern ihre beziehungsreiche Genese anstreben. Dazu liefern Hüllkurven ein treffliches Beispiel, zumal sich mit ihnen auch bekannter Stoff z.T. neu beleuchten läßt (vgl. etwa die Abschnitte 1.2 und 1.3; dies Argument entfällt, wenn im bisherigen Unterricht für Kegelschnitte noch kein Platz gefunden wurde). Da die neuen Kurven auch neuartige Phänomene wie Doppelpunkte und Spitzen aufweisen, ist eine Vertiefung und Weiterentwicklung des analytischen Handwerkszeugs in einsichtiger Weise erforderlich (vgl. den Abschnitt 7).

---

<sup>1</sup> Der Aufsatz erschien in zwei Teilen in Praxis der Mathematik **39** (3), S. 107 - 116 (1997) und **39** (4), S. 170 - 173 (1997). Die vorliegende Version ist leicht erweitert und korrigiert.

<sup>2</sup> Eine Diskussion verschiedener Hüllkurvenbegriffe findet man bei Bruce / Giblin, Kap. 5.

<sup>3</sup> Beispielsweise liefert der hier vorgestellte Begriff keine Hüllkurve der Schar  $y = (x - c)^3$ .

Der hohe ästhetische Reiz, der von den Hüllkurvenbildern ausgeht, das mitunter Überraschende ihres Verlaufs (das deutlicher zum Ausdruck kommt, wenn man nicht die fertigen Kurven besichtigt, sondern ihr Entstehen auf einem möglichst langsamen Computer zeitgleich miterlebt), diese Freude an der Gestalt: Daß das für den Mathematikunterricht fruchtbar ist, bedarf keiner weiteren Begründung!

Insgesamt stellt dieser Aufsatz einen Beitrag dar zur auch von mir für unbedingt erforderlich gehaltenen "*Regeometrisierung des Geometrieunterrichts in der gymnasialen Oberstufe*" (Schupp, S.38).

Zum Abschluß dieser Einleitung noch einige Vereinbarungen zur Notation: Ich unterscheide nicht zwischen Punkten und (Orts-) Vektoren, rechne also mit Punkten. Ebenso unbekümmert werden Grenzwerte von Punkten oder von Geraden gebildet, anstatt von zugeordneten skalaren Größen. Wen dies stört, mag alles umformulieren.

Mit PQ bezeichne ich – je nach Zusammenhang – den Abstand zwischen den Punkten P und Q oder ihre Verbindungsgerade. Konfusionen sind nicht zu befürchten.

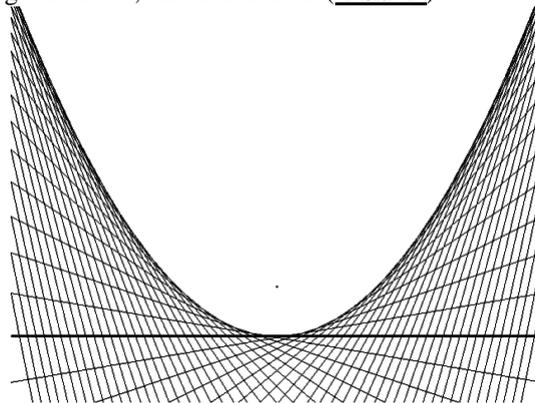
## 1. Kegelschnitte

### 1.1 Negative Pedalkurven

Gegeben sei ein fester Punkt F (etwa  $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ ) und eine feste Gerade g, auf der F nicht liegt (etwa  $y = 0$ ). Sei

$U = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$  ein beliebiger Punkt auf g. Dann ist bekanntlich die Senkrechte zu FU in U Tangente an diejenige

Parabel, die F als Brennpunkt und g als Scheiteltangente hat. Anders ausgedrückt: Die Senkrechten zu FU in U hüllen, wenn U alle Punkte auf g durchläuft, eine Parabel ein (**FIGUR 1**).



Figur 1

Kann man dies beweisen, ohne Parabelkenntnisse zu benutzen? Ja, man kann!

Es bezeichne  $FU^\perp$  die Senkrechte zu FU durch U. Dann gilt:

$$FU: y = -\frac{f}{u} \cdot x + f; \quad FU^\perp: y = \frac{u}{f} \cdot x - \frac{u^2}{f}.$$

$$\text{Für } V = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt analog: } \quad FV^\perp: y = \frac{v}{f} \cdot x - \frac{v^2}{f}.$$

Diese beiden Senkrechten schneiden einander im Punkt  $S = \begin{pmatrix} u+v \\ u \cdot v / f \end{pmatrix}$ .

Wenn nun der Punkt V sich dem Punkt U nähert, so nähert sich auch S demjenigen Punkt B auf  $FU^\perp$ , der Berührungspunkt mit der Parabel ist. Im Grenzübergang ist  $B = \lim_{v \rightarrow u} S = \begin{pmatrix} 2 \cdot u \\ u^2 / f \end{pmatrix}$ , woraus sich nach Elimination von

u die Parabelgleichung  $y = \frac{x^2}{4 \cdot f}$  ergibt.

Ersetzt man bei der obigen Hüllkurvenbildung die feste Gerade  $g$  durch einen festen Kreis, auf dem  $F$  nicht liegt (etwa  $x^2 + y^2 = r^2$ ), so wird man zu Ellipsen (wenn  $F$  innerhalb des Kreises liegt) bzw. zu Hyperbeln (wenn  $F$  außerhalb des Kreises liegt) geführt:

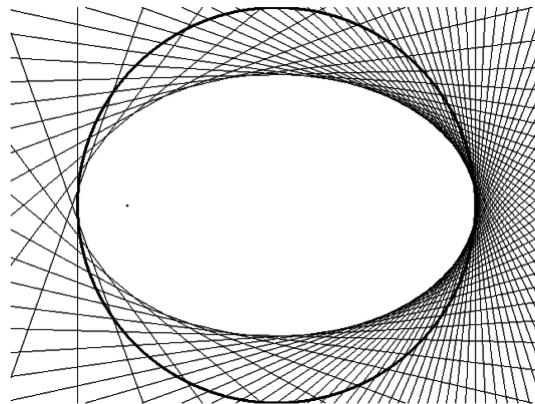
Es sei  $U = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  ein beliebiger Punkt auf dem Kreisrand. Dann hat die Senkrechte  $FU^\perp$  zu  $FU$  durch  $U$  die

Gleichung  $y = \frac{x \cdot r \cdot \cos \varphi - r \cdot (r - f \cdot \sin \varphi)}{f - r \cdot \sin \varphi}$ ; ist  $V = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$  ein anderer Punkt auf dem Kreisrand, so gilt für

$FV^\perp$  eine analoge Formel.  $FU^\perp$  und  $FV^\perp$  schneiden einander in einem Punkt  $S$ , und der gesuchte Berührungspunkt

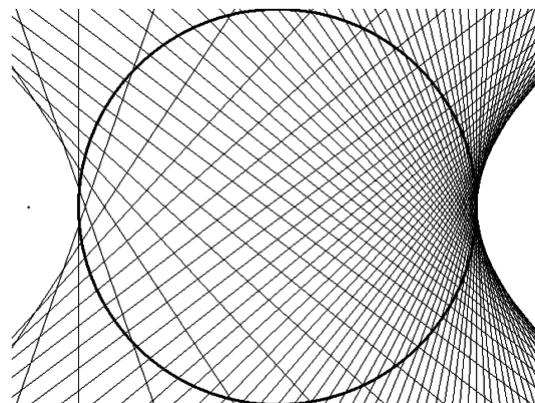
ist  $B = \lim_{\psi \rightarrow \varphi} S = \frac{1}{f \cdot \sin \varphi - r} \cdot \begin{pmatrix} (f^2 - r^2) \cdot \cos \varphi \\ r \cdot (f - r \cdot \sin \varphi) \end{pmatrix}$ . Eine parameterfreie Gleichung ist  $\frac{x^2}{1 - \left(\frac{f}{r}\right)^2} + y^2 = r^2$ ; für  $f < r$

erhält man eine Ellipse (**FIGUR 2**),



Figur 2

für  $f > r$  eine Hyperbel (**FIGUR 3**)



Figur 3

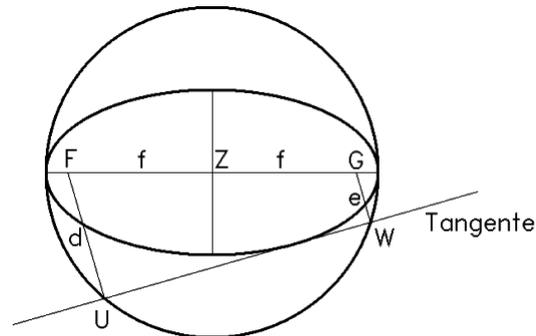
und für  $f = r$  (nach dem Satz des Thales) einen Punkt.

Die in diesem Abschnitt behandelte Erzeugungsart lässt sich verallgemeinern: Es sei  $C$  eine feste Kurve und  $A$  ein fester Punkt. Durchläuft  $P$  die Kurve, so hüllen die Senkrechten zu  $PA$  durch  $P$  eine Kurve ein, die negative Pedalkurve bzgl.  $C$  und  $A$  genannt wird. Ist  $C$  keine Gerade und kein Kreis, sondern eine Parabel, so ist die negative Pedalkurve bezüglich des Brennpunkts die Tschirnhaus-Kubik; nimmt man dagegen als festen Punkt den Scheitelpunkt, erhält man die Neilsche Parabel. Diese beiden Kurven werden uns später in anderen Zusammenhängen begegnen und beschäftigen.

Ist  $D$  negative Pedalkurve zu  $C$ , so heißt  $C$  positive Pedalkurve zu  $D$ . Zur Konstruktion von positiven Pedalkurven sind Methoden bekannt; vgl. etwa die Bücher von Lockwood und Lawrence.

## 1.2 Tangentenbedingungen

Im Abschnitt 1.1 wurde erläutert, wie Tangenten an Ellipsen und Hyperbeln zu zeichnen sind. Dies sei jetzt für den Fall der Ellipse weiter ausgeführt (**FIGUR 4**).

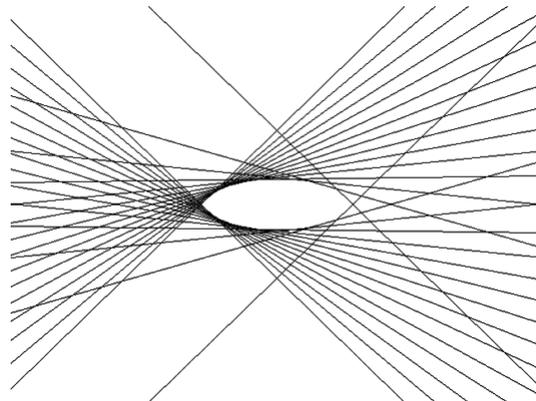


Figur 4

$FU^\perp$  trifft den Kreisrand wieder bei W, und die Senkrechte zu UW durch W trifft die Kreisachse bei G. Aus elementargeometrischen Gründen sind die Abstände von Z zu F und von Z zu G gleich; G ist der zweite Brennpunkt der Ellipse. Nun gilt nach dem Sehnensatz  $d \cdot e = (r - f) \cdot (r + f)$ .

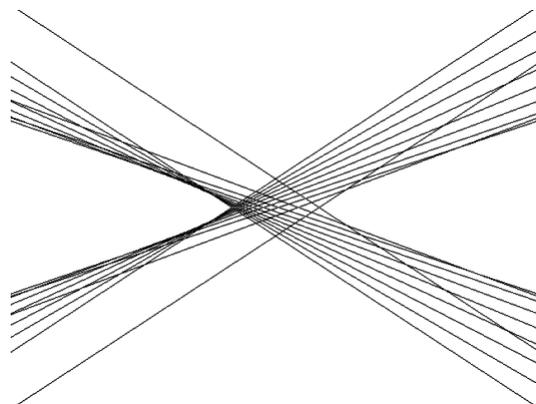
Die Tangente hat also die Eigenschaft, daß das Produkt der Abstände zu den beiden Brennpunkten konstant ist. Diese Eigenschaft ist gerade die Tangentenbedingung! Für Ellipsen ist die Konstante positiv (die beiden Brennpunkte liegen stets auf derselben Seite der Tangente), für Hyperbeln ist sie negativ (hier liegen die beiden Brennpunkte stets auf verschiedenen Seiten der Tangente).

Die angegebene Eigenschaft läßt sich zu einer weiteren Hüllkurvenkonstruktion von Ellipse (**FIGUR 5**)



Figur 5

und Hyperbel (**FIGUR 6**)



Figur 6

verwenden: Diese sind Hüllkurven aller Geraden, deren Abstandsprodukt zu zwei vorgegebenen Punkten konstant ist.

### 1.3 Andere Erzeugungen

Eine Gerade der Gleichung  $y = m \cdot x + n$  wird durch die beiden Parameter  $m$  und  $n$  bestimmt. Ordnet man  $m$  und  $n$  in einem Koordinatensystem an (etwa  $m$  auf der Rechtsachse und  $n$  auf der Hochachse), gehört zu jeder Geraden in der  $x$ - $y$ -Ebene ein Punkt in der  $m$ - $n$ -Ebene und umgekehrt.

Gegeben sei nun ein Kreis in der  $m$ - $n$ -Ebene, etwa mit der Gleichung  $n^2 + m^2 = r^2$ . Was läßt sich über die zugehörigen Geraden in der  $x$ - $y$ -Ebene sagen? Hüllen sie eine Kurve ein?

Zwei solche Geraden werden in der  $m$ - $n$ -Ebene durch die Punkte  $r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  und  $r \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$  beschrieben, haben

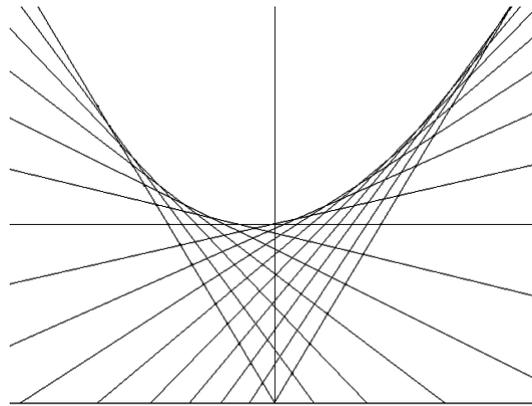
also in der  $x$ - $y$ -Ebene die Gleichungen  $y = r \cdot \cos \varphi \cdot x + r \cdot \sin \varphi$  und  $y = r \cdot \cos \psi \cdot x + r \cdot \sin \psi$ ; der Schnittpunkt

ist  $S = \frac{1}{\cos \varphi - \cos \psi} \cdot \begin{pmatrix} \sin \psi - \sin \varphi \\ r \cdot \sin(\psi - \varphi) \end{pmatrix}$ . Somit ist  $B = \lim_{\psi \rightarrow \varphi} S = \begin{pmatrix} \cot \varphi \\ r / \sin \varphi \end{pmatrix}$  ein Hüllkurvenpunkt. Eliminiert man

den Parameter  $\varphi$ , so lautet die Hüllkurvengleichung  $-r^2 x^2 + y^2 = r^2$ ; man bekommt also eine Hyperbel.

In dem schönen Buch von Dörrie steht folgende alte Aufgabe:

„Auf dem einen bzw. anderen Schenkel eines Winkels trägt man vom Scheitel aus eine beliebige Strecke  $e$  bzw.  $f$   $n$  mal hintereinander ab und numeriert, im Scheitel beginnend, die Streckenendpunkte  $0, 1, 2, \dots, n$  bzw.  $n, n-1, \dots, 2, 1, 0$ . Nachzuweisen, daß die Verbindungslinien gleichnumerierter Punkte eine Parabel umhüllen.“ (**FIGUR 7**)



Figur 7

Dörrie argumentiert mit einfachen Sätzen der Parabelgeometrie; man kann aber natürlich auch den besprochenen Hüllkurven-Bestimmungs-Algorithmus anwenden:

Die beiden Winkelschenkel seien durch  $y = -m \cdot x$  und  $y = m \cdot x$  gegeben. Die Punkte auf dem ersten Schenkel

seien  $L_k = \begin{pmatrix} -k \cdot f \\ m \cdot k \cdot f \end{pmatrix}$ , die Punkte auf dem rechten Schenkel  $R_k = \begin{pmatrix} n - k \\ m \cdot (n - k) \end{pmatrix}$  (o.B.d.A. ist  $e = 1$ ). Die

Verbindungsgeraden  $L_k R_k$  führen nach dem Grenzübergang zum Hüllkurvenpunkt

$$B = \frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} (k-n)^2 - f k^2 \\ m \cdot ((k-n)^2 + f \cdot k^2) \end{pmatrix}.$$

Für  $f = 1$  ist  $B = \begin{pmatrix} n - 2 \cdot k \\ \frac{m}{n} \cdot (2 \cdot k^2 - 2 \cdot k \cdot n + n^2) \end{pmatrix}$ , also ist die Kurvengleichung  $y = \frac{m}{2 \cdot n} \cdot (x^2 + n^2)$ ; man hat

demnach wirklich eine Parabel.

Für  $f \neq 1$  ist eine Drehung um den Winkel  $\arctan \frac{f-1}{m \cdot (f+1)}$  nötig, um zu sehen, daß auch hier eine Parabel

vorliegt. (Das Problem der Hauptachsentransformation entsteht an dieser Stelle in natürlicher Weise.)

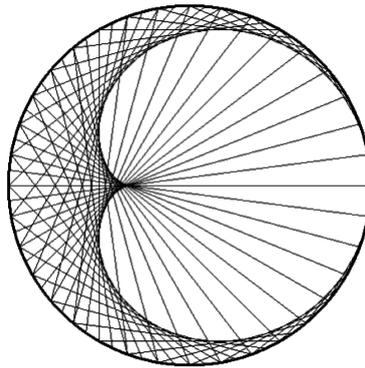
Übrigens kann man bei diesem Beispiel durchaus der Meinung sein, daß die parabelgeometrische Vorgehensweise wie bei Dörrie durchsichtiger und eleganter ist. Aber auch manche Extremwertprobleme lassen sich ohne Ableitungen schneller lösen. Dies ist trotzdem kein Argument gegen die Analysis!

## 2. Kreis–Stickkurven

Gegeben sei ein Grundkreis vom Radius  $r$ . Verbindet man nun den zum Winkel  $\varphi$  gehörigen Punkt mit dem zum Winkel  $\psi$  gehörigen, so hüllen die Verbindungsgeraden eine Kurve ein. Diese Art der Hüllkurvenerzeugung erinnert an Stickereien und heißt deshalb bei Pedoe „mathematical embroidery“.

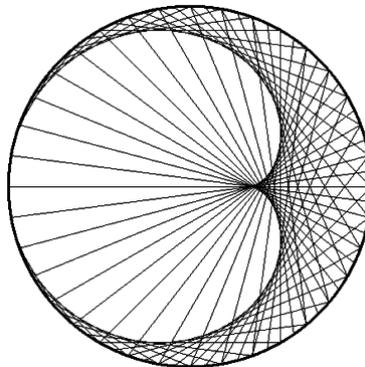
Die Ergebnisse sind:

$$\psi = 2 \cdot \varphi : \quad B = \frac{r}{3} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\varphi + 2 \cdot \cos \varphi \\ \sin 2\varphi + 2 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{Cardioide (FIGUR 8)}$$



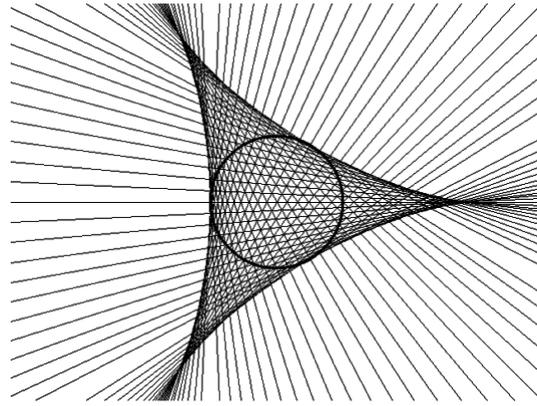
Figur 8

$$\psi = 180^\circ + 2 \cdot \varphi : \quad B = -\frac{r}{3} \cdot \begin{pmatrix} \cos 2 \cdot (180^\circ + \varphi) + 2 \cdot \cos(180^\circ + \varphi) \\ \sin 2 \cdot (180^\circ + \varphi) + 2 \cdot \sin(180^\circ + \varphi) \end{pmatrix} \quad \text{Cardioide (FIGUR 9)}$$



Figur 9

$$\psi = 180^\circ - 2 \cdot \varphi : \quad B = r \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\varphi + 2 \cdot \cos \varphi \\ -\sin 2\varphi + 2 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \text{Deltoide (FIGUR 10)}$$

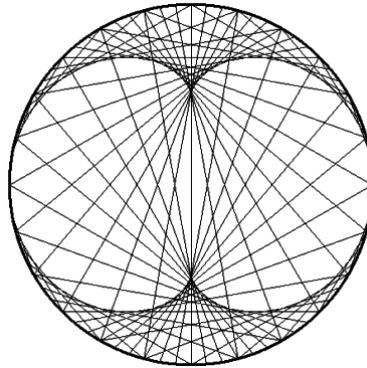


Figur 10

$$\psi = 3 \cdot \varphi :$$

$$B = \frac{r}{4} \cdot \begin{pmatrix} \cos 3\varphi + 3 \cdot \cos \varphi \\ \sin 3\varphi + 3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Nephroide (**FIGUR 11**)



Figur 11

$$\psi = 180^\circ + 3 \cdot \varphi :$$

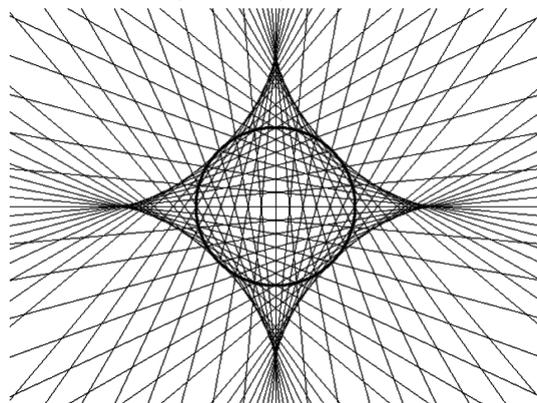
$$B = \frac{r}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sin 3 \cdot (90^\circ - \varphi) + 3 \cdot \sin(90^\circ - \varphi) \\ \cos 3 \cdot (90^\circ - \varphi) + 3 \cdot \cos(90^\circ - \varphi) \end{pmatrix}$$

Nephroide

$$\psi = 180^\circ - 3 \cdot \varphi :$$

$$B = \frac{r}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos 3\varphi + 3 \cdot \cos \varphi \\ -\sin 3\varphi + 3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Astroide (**FIGUR 12**)



Figur 12

### 3. Kaustiken

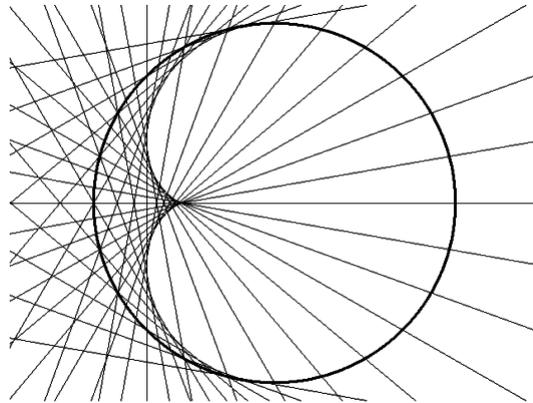
#### 3.1 ... eines Kreises

Gegeben sei ein Grundkreis mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Fällt Licht auf den Kreis (wobei zu unterscheiden ist, ob die Lichtquelle im Unendlichen, auf dem Kreisrand oder irgendwo ist), so nennt man die von den reflektierten Strahlen eingehüllte Kurve Kaustik dieses Kreises. Fall 1:

Die Lichtquelle liege im Unendlichen, etwa bei  $\begin{pmatrix} \infty \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ein einfallender Lichtstrahl hat dann die Steigung 0; nach Reflexion am Kreispunkt  $P = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  (physikalisch sinnvoll ist natürlich nur der Bereich  $90^\circ \leq \varphi \leq 270^\circ$ ) ändert sich die Steigung zu  $m = \tan 2\varphi$  (wie man durch elementargeometrische Betrachtungen oder durch analytische Berechnung sieht). Als Hüllkurve ergibt sich eine (halbe) Nephroide (**FIGUR 13**).



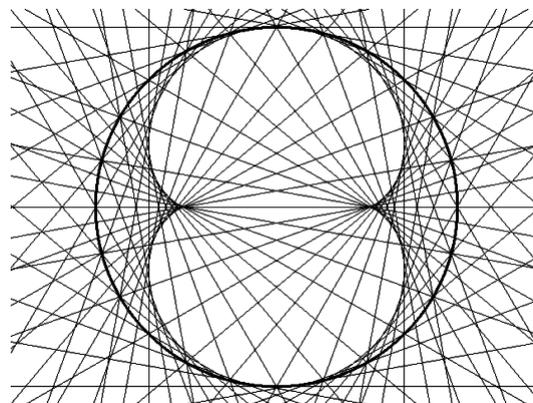
Figur 13

Dies ist auch aus der Tatsache ersichtlich, daß der reflektierte Strahl den Kreis wieder bei

$-r \cdot \begin{pmatrix} \cos 3\varphi \\ \sin 3\varphi \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(180^\circ + 3\varphi) \\ \sin(180^\circ + 3\varphi) \end{pmatrix}$  schneidet, es sich bei der Reflexion also um den Aufbau einer

Kreis-Stückkurve handelt.

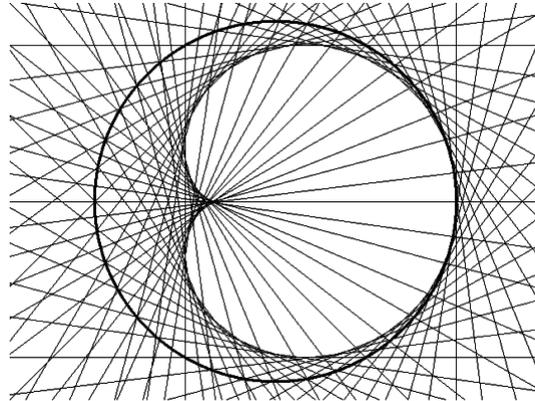
Betrachtet man statt des halben Kreises den ganzen, so muß man die rückwärtigen Verlängerungen der divergenten reflektierten Strahlen mit berücksichtigen. An den obigen Gleichungen ändert sich nichts, und die Hüllkurve ist eine vollständige Nephroide (**FIGUR 14**).



Figur 14

Fall 2: Die Lichtquelle liege auf dem Kreisrand, etwa bei  $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Der Lichtstrahl hat nach der Reflexion bei  $P = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  die Steigung  $m = \tan\left(\frac{3}{2} \cdot \varphi - 90^\circ\right)$ . Die Hüllkurve ist eine Cardioide (**FIGUR 15**),



Figur 15

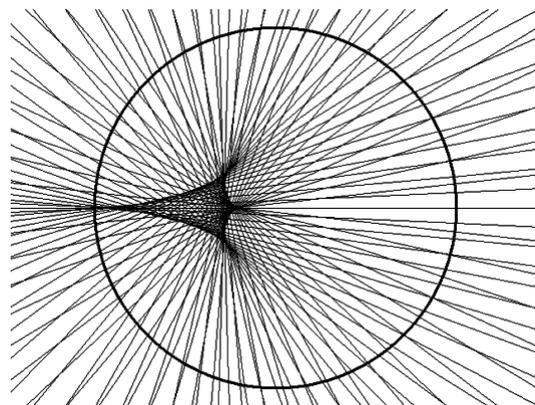
was auch daraus ersichtlich ist, daß der reflektierte Strahl den Kreis wieder bei  $r \cdot \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix}$  schneidet.

Fall 3: Die Lichtquelle sei irgendwo, etwa bei  $\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Jetzt hat ein Lichtstrahl nach der Reflexion bei  $P = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  die Steigung  $m = \frac{s \cdot \sin 2\varphi - r \cdot \sin \varphi}{s \cdot \cos 2\varphi - r \cdot \cos \varphi}$ . Der

zugehörige Punkt der Hüllkurve ist  $B = \frac{r}{2 \cdot \left(3 \cdot \frac{r}{s} \cdot \cos \varphi - \frac{r^2}{s^2} - 2\right)} \cdot \begin{pmatrix} \cos 3\varphi - 3 \cdot \cos \varphi + 2 \cdot \frac{r}{s} \\ \sin 3\varphi - 3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ .

Für  $s = r$  ergibt sich wieder die Cardioide, für  $s = \infty$  die Nephroide. Die Kurvengestalten sind für  $s < r$  recht vielfältig (**FIGUR 16**).



Figur 16

### 3.2 ... einer Parabel

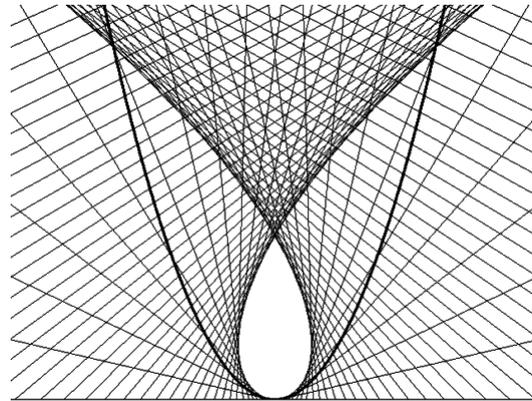
Gegeben sei eine nach oben geöffnete Parabel der Gleichung  $y = a \cdot x^2$ .

Fallen zur Parabelachse parallele Lichtstrahlen von oben auf die Parabel, so gehen die reflektierten Strahlen alle durch den Brennpunkt; dieser ist also das Bild der im Unendlichen angesiedelten Lichtquelle.

Fallen dagegen zur Parabelachse parallele Lichtstrahlen von unten auf die Parabel, so werden sie zwar divergent reflektiert, aber die rückwärtigen Verlängerungen der reflektierten Strahlen gehen durch den Brennpunkt; dieser ist somit das virtuelle Bild der Unendlichkeit.

Die Kaustik als Hüllkurve der reflektierten Strahlen besteht demnach in diesen beiden Fällen jeweils nur aus einem Punkt.

Interessanter ist es, wenn die parallelen Lichtstrahlen zur Parabelachse senkrecht verlaufen. Die rückwärtigen Verlängerungen der reflektierten Strahlen hüllen dann eine Kurve ein, die Tschirnhaus-Kubik (**FIGUR 17**)

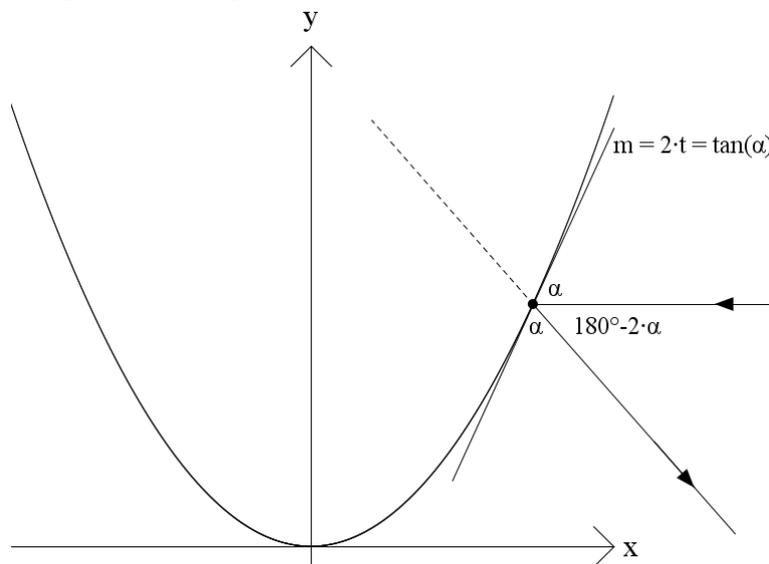


Figur 17

heißt. Ein auf  $P = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$  einfallender Lichtstrahl mit der Steigung 0 hat nach der Reflexion die Steigung

$$-\tan(180^\circ - 2 \cdot \alpha) = \tan(2 \cdot \alpha) = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4 \cdot t}{1 - 4 \cdot t^2} \quad (\text{Figur 17a}) \text{ und somit die Gleichung}$$

$$y = \frac{4 \cdot t}{1 - 4 \cdot t^2} \cdot (x - t) + t^2 = \frac{4 \cdot t}{1 - 4 \cdot t^2} \cdot x + \frac{-3 \cdot t^2 + 4 \cdot t^4}{1 - 4 \cdot t^2}.$$



Figur 17a

Der Hüllkurvenpunkt  $\begin{pmatrix} -t \cdot (4 \cdot t^2 - 3) / 2 \\ 3 \cdot t^2 \end{pmatrix}$  liefert bis auf Achsenstreckungen und -Vertauschungen und

Translationen die Tschirnhaus-Kubik mit dem allgemeinen Punkt  $B(t) = (t^2 - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$  und der Gleichung

$$y^2 = x^2 \cdot (x + 1).$$

## 4. Kreishüllkurven

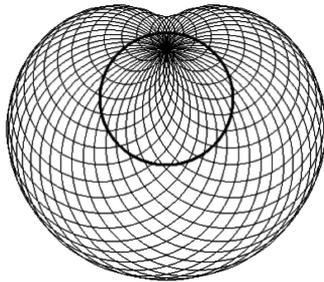
Die bisherigen Hüllkurven waren solche von Geraden.

Statt dessen kann man auch Hüllkurven von Kreisen oder (wie im nächsten Abschnitt) von Parabeln betrachten. Die Rechnungen werden besonders einfach, wenn die betrachteten Kurvenscharen kopunktal sind (bis auf die Nephroide ist das in den folgenden Beispielen auch der Fall).

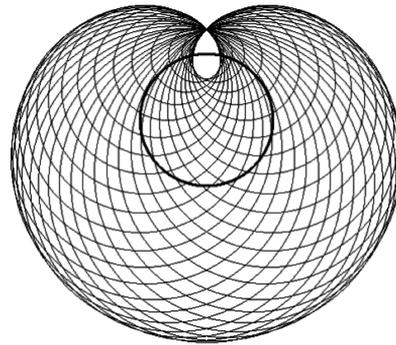
### 4.1 ... bezüglich eines Kreises

Gegeben seien ein Grundpunkt  $A = \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix}$  und ein Grundkreis der Gleichung  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Die Menge aller Kreise durch A, deren Mittelpunkte auf dem Grundkreis liegen, hüllen eine Limaçon (**FIGUREN 18/19**)



Figur 18



Figur 19

genannte Kurve ein.

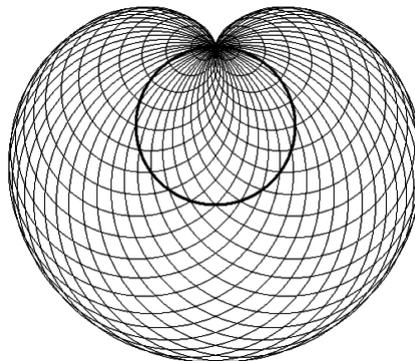
Zum Grundkreispunkt  $P = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  gehört der Kreis mit der Gleichung

$$(x - r \cdot \cos \varphi)^2 + (y - r \cdot \sin \varphi)^2 = (s - r \cdot \cos \varphi)^2 + r^2 \cdot \sin^2 \varphi,$$

zum Grundkreispunkt  $P = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$  gehört ein Kreis mit einer analog gebildeten Gleichung.

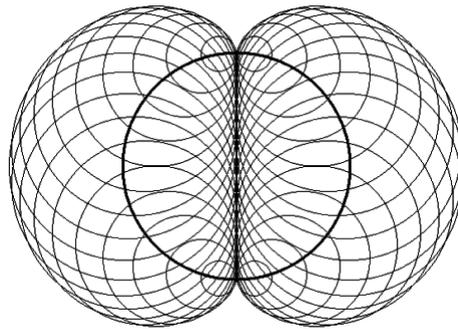
Die beiden Kreise schneiden einander in A und in einem weiteren Punkt B. Führt man den Grenzübergang aus, wird aus dem Schnittpunkt B der Hüllkurvenpunkt  $B = \begin{pmatrix} -s \cdot \cos 2\varphi + r \cdot 2 \cdot \cos \varphi \\ -s \cdot \sin 2\varphi + r \cdot 2 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ .

Für  $s = r$  erhält man die Cardioide (**FIGUR 20**).



Figur 20

Die Nephroide (**FIGUR 21**)



Figur 21

bekommt man etwas anders: Sie wird eingehüllt von allen Kreisen, deren Mittelpunkte auf dem Grundkreis liegen und die eine feste Durchmessergerade des Grundkreises berühren. Die Berechnung ist aufwendiger, da man zu je zwei Kreisen beide Schnittpunkte ausrechnen muß.

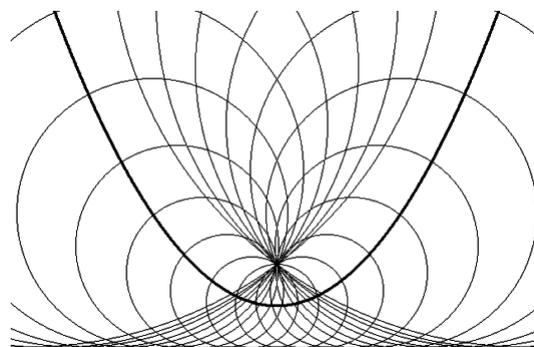
**4.2 ... bezüglich einer Parabel**

Gegeben sei eine Parabel der Gleichung  $y = \frac{x^2}{4 \cdot f}$  (also mit dem Brennpunkt  $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ ) und ein Grundpunkt  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$  auf der Parabelachse.

Die Menge aller Kreise durch G, deren Mittelpunkte auf der Parabel liegen, hüllen eine Kurve ein: Dabei gehört

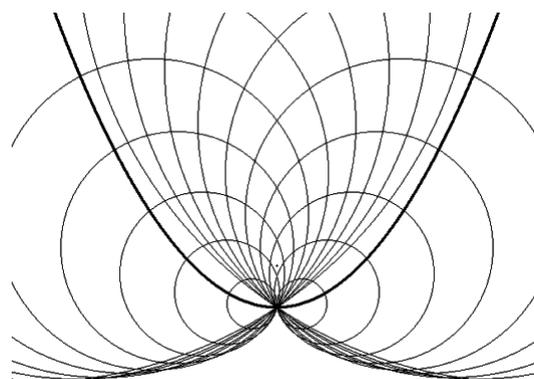
zum Parabelpunkt  $P = \frac{1}{4 \cdot f} \cdot \begin{pmatrix} 4 \cdot f \cdot p \\ p^2 \end{pmatrix}$  der Hüllkurvenpunkt  $B = \frac{1}{4 \cdot f^2 + p^2} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot (4 \cdot f \cdot g + p^2) \\ -(4 \cdot f^2 \cdot g + 2 \cdot f \cdot p^2 - g \cdot p^2) \end{pmatrix}$ .

Für  $g = f$  (der Grundpunkt ist der Brennpunkt) ergibt sich als Hüllkurve natürlich die Leitgerade der Parabel (**FIGUR 22**).



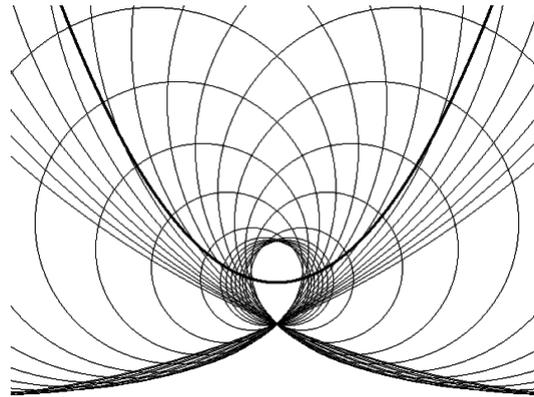
Figur 22

Für  $g = 0$  (der Grundpunkt ist der Scheitelpunkt) erhält man die Kissoide des Diokles (**FIGUR 23**).



Figur 23

für  $g = -f$  heißt die Hüllkurve (gerade) **Strophoide (FIGUR 24)**.

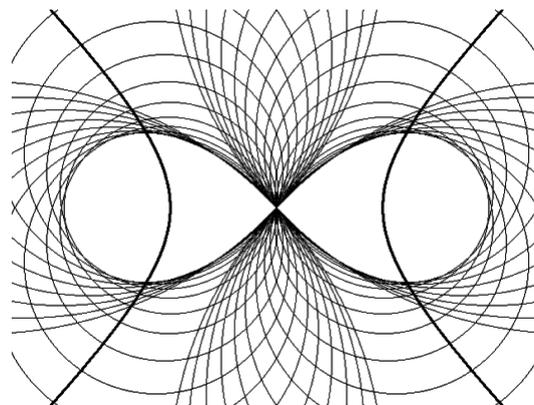


Figur 24

### 4.3 ... bezüglich einer Hyperbel

Gegeben sei eine rechtwinklige Hyperbel, etwa der Gleichung  $x \cdot y = k$ .

Die Menge aller Kreise durch das Hyperbelzentrum, deren Mittelpunkte auf der Hyperbel liegen, hüllen die (Bernoullische) **Lemniskate (FIGUR 25)** ein.



Figur 25

Zum Hyperbelpunkt  $P = \begin{pmatrix} a \\ k/a \end{pmatrix}$  gehört der Hüllkurvenpunkt  $B = \frac{4 \cdot a \cdot k}{k^2 + a^4} \cdot \begin{pmatrix} k \\ a^2 \end{pmatrix}$ ; die Hüllkurvengleichung lautet  $(x^2 + y^2)^2 = 16 \cdot k \cdot x \cdot y$ .

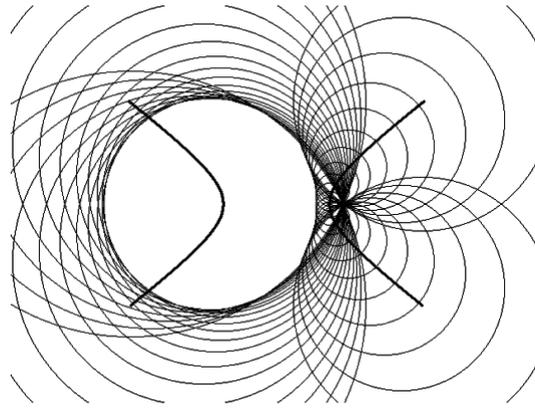
Die Lemniskate ist eine **Cassini-Kurve**: Sie ist die Menge aller Punkte, deren Produkt der Abstände zu zwei vorgegebenen Punkten (hier:  $\pm \sqrt{2 \cdot k} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ) eine Konstante (hier:  $4 \cdot k$ ) ist.

Betrachtet man statt der rechtwinkligen Hyperbel eine beliebige, etwa mit der Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , so gehört

zum Hyperbelpunkt  $P = \begin{pmatrix} a / \cos \varphi \\ b \cdot \tan \varphi \end{pmatrix}$  der Hüllkurvenpunkt  $B = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \varphi}{b^2 + a^2 \cdot \sin^2 \varphi} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ , woraus man die parameterlose Hüllkurvengleichung  $(x^2 + y^2)^2 = 4 \cdot (a^2 \cdot x^2 - b^2 \cdot y^2)$  ermitteln kann.

Für  $a \neq b$  ist dies keine Cassini-Kurve; aber eine **bizirkulare Quartik**. Für  $a = b$  erhält man wieder die (gegenüber der früheren Form um  $45^\circ$  gedrehte) Lemniskate.

Ein ganz anderes Resultat bekommt man, wenn die Kreismittelpunkte zwar weiterhin auf der Hyperbel liegen, die Kreise aber nicht durch das Hyperbelzentrum, sondern statt dessen alle durch den rechten Brennpunkt gehen: Die Kreishüllkurve ist jetzt ein **Kreis (FIGUR 26)**.



Figur 26

Genauer handelt es sich um den Leitkreis der Hyperbel: Hat diese die Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , so hat er die Gleichung  $(x+f)^2 + y^2 = (2 \cdot a)^2$ , wo  $f = \sqrt{a^2 + b^2}$  die Brennweite ist.

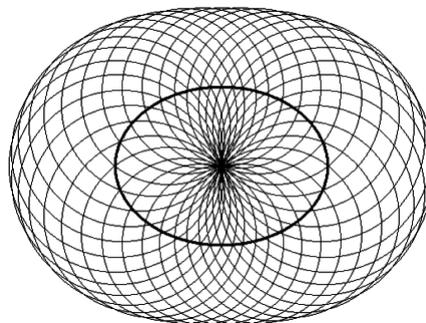
**4.4 ... bezüglich einer Ellipse**

Gegeben sei eine Ellipse der Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Die Menge aller Kreise durch das Ellipsenzentrum, deren Mittelpunkte auf der Ellipse liegen, hüllen eine Kurve ein: Zum Ellipsenpunkt  $P = \begin{pmatrix} a \cdot \cos \varphi \\ b \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$  gehört der Hüllkurvenpunkt  $B = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a^2 \cdot \sin^2 \varphi + b^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot \begin{pmatrix} b \cdot \cos \varphi \\ a \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$ . Die

Hüllkurvengleichung ist  $(x^2 + y^2)^2 = 4 \cdot (a^2 \cdot x^2 + b^2 \cdot y^2)$ .

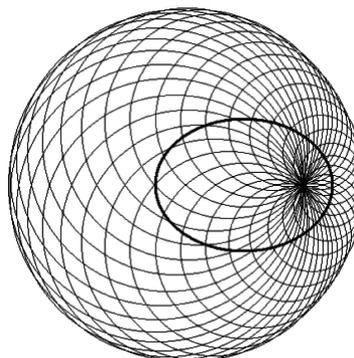
Für  $a \neq b$  ist dies wieder keine Cassini-Kurve; sondern wieder eine bizirkulare Quartik (**FIGUR 27**).



Figur 27

Für  $a = b$  erhält man einen Kreis.

Analog zur Hyperbel gilt: Liegen die Kreismittelpunkte auf der Ellipse und gehen die Kreise alle durch den rechten Brennpunkt, so ist die entstehende Kreishüllkurve ein Kreis (**FIGUR 28**),



Figur 28

und zwar der Leitkreis der Ellipse: Hat diese die Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , so hat er die Gleichung

$$(x+f)^2 + y^2 = (2 \cdot a)^2, \text{ wo } f = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ die Brennweite ist.}$$

## 5. Parabelhüllkurven

Verläßt Wasser mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  eine Düse unter dem Winkel  $\varphi$  gegenüber dem Erdboden,

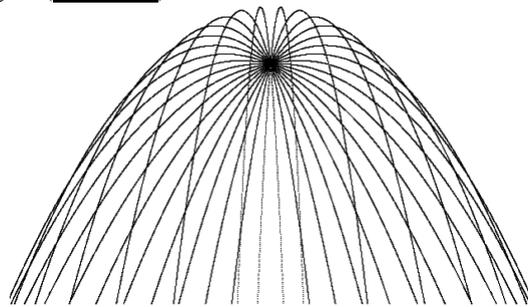
so beschreibt der Wasserstrahl eine Folge von Punkten  $\vec{x} = \vec{v}_0 \cdot t + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix}$  mit  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ ; die

Wurfbahn ist also eine Parabel der Gleichung  $y = x \cdot \tan \varphi - m \cdot \frac{x^2}{\cos^2 \varphi}$  mit  $m := \frac{g}{2 \cdot v_0^2}$ . Variiert man den

Winkel, läßt aber die Anfangsgeschwindigkeit konstant, so werden alle diese Parabeln von einer weiteren Parabel

mit dem allgemeinen Punkt  $B = \frac{1}{2 \cdot m} \cdot \begin{pmatrix} \cot \varphi \\ 1 - \frac{1}{2 \cdot \sin^2 \varphi} \end{pmatrix}$  bzw. mit der Gleichung  $y = -m \cdot x^2 + \frac{1}{4 \cdot m}$  eingehüllt,

deren Brennpunkt der Ursprung ist (**FIGUR 29**).



Figur 29

## 6. Evoluten

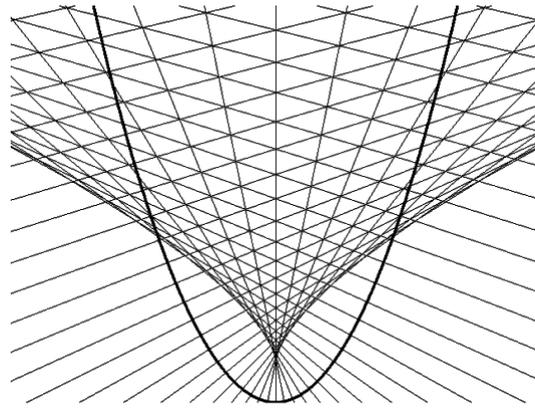
Gegeben sei eine Kurve C. Zeichnet man zu jedem Kurvenpunkt die zugehörige Normale, so hüllen die Normalen die Evolute zu C ein.

Handelt es sich bei der Kurve um eine Parabel mit der Gleichung  $y = a \cdot x^2$ , so hat die Normale des

Kurvenpunktes  $\begin{pmatrix} p \\ a \cdot p^2 \end{pmatrix}$  die Gleichung  $y = \frac{-x}{2 \cdot a \cdot p} + a \cdot p^2 + \frac{1}{2 \cdot a}$ . Hieraus ergibt sich der Hüllkurvenpunkt

$$B = \begin{pmatrix} -4 \cdot a^2 \cdot p^3 \\ 6 \cdot a^2 \cdot p^2 + 1 \\ 2 \cdot a \end{pmatrix}, \text{ woraus nach Elimination von } p \text{ die Hüllkurvengleichung } 16 \cdot a \cdot \left(y - \frac{1}{2 \cdot a}\right)^3 = 27 \cdot x^2 \text{ folgt.}$$

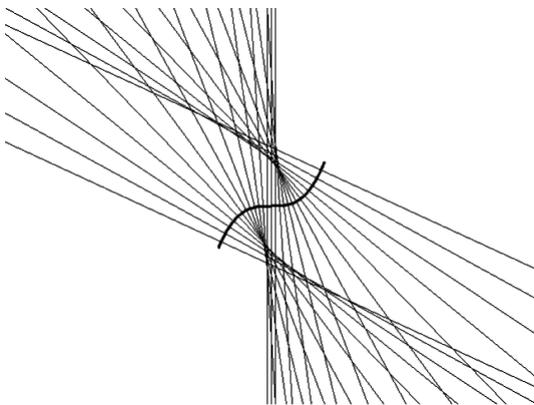
Die zugehörige Kurve heißt Neilsche Parabel (**FIGUR 30**);



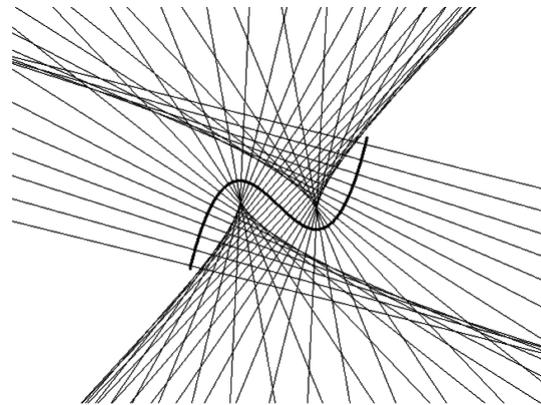
Figur 30

sie hat nach einer naheliegenden Koordinatentransformation und Drehung die einfachere Gleichung  $y^2 = x^3$ .

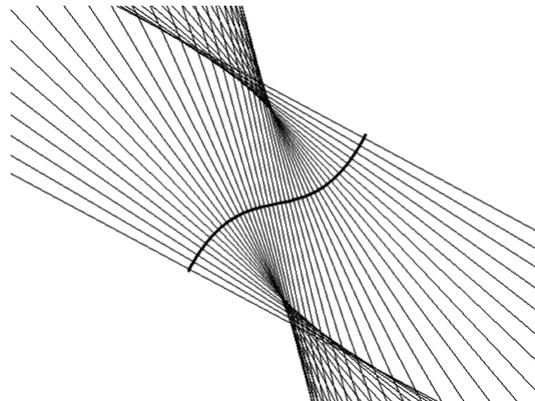
Für die kubische Parabel lassen sich analoge Betrachtungen anstellen (**FIGUREN 31 / 32 / 33**).



Figur 31

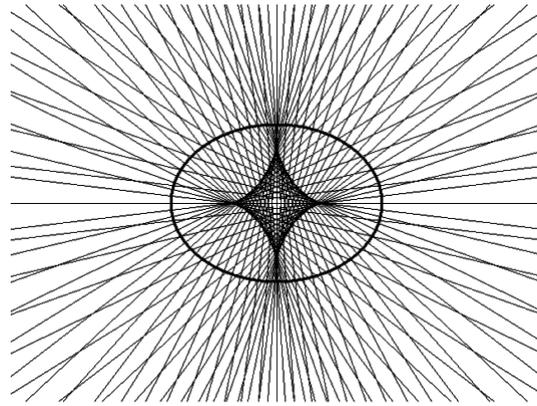


Figur 32



Figur 33

Die Evolute einer Ellipse heißt Lamé-Kurve (**FIGUR 34**).



Figur 34

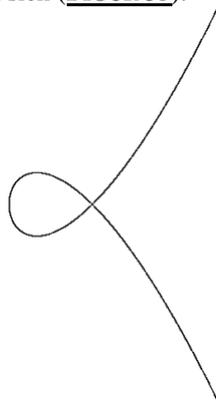
Zum Kurvenpunkt  $P = \begin{pmatrix} a \cdot \cos \varphi \\ b \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$  gehört der Hüllkurvenpunkt  $B = \frac{a^2 - b^2}{a \cdot b} \cdot \begin{pmatrix} b \cdot \cos^3 \varphi \\ -a \cdot \sin^3 \varphi \end{pmatrix}$ .

Ist D Evolute zu C, so heißt C Involute zu D. Zur Konstruktion von Involuten sind Methoden bekannt; vgl. etwa die Bücher von Lockwood und Lawrence.

## 7. Begriffliches

### 7.1 Doppelpunkte

Einige der betrachteten Kurven überschneiden sich (**FIGUR 35**).



Figur 35

Ist die Kurve durch den allgemeinen Punkt  $B(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$  gegeben, so ist das folgende notwendige Kriterium für die Existenz eines solchen einfachen Doppelpunkts offensichtlich:  $\exists t_1, t_2: t_1 \neq t_2, B(t_1) = B(t_2)$ .

Als Beispiel sei die Tschirnhaus-Kubik mit dem allgemeinen Punkt  $B(t) = (t^2 - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$  betrachtet.

Wegen  $B(1) = B(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  ist der Ursprung ein Doppelpunkt.

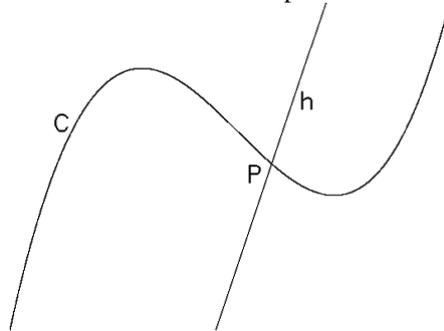
Daß das Kriterium nicht hinreichend ist, sieht man am Kreis mit dem allgemeinen Punkt  $B(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ .

### 7.2 Tangenten

Was sind und wie ermittelt man Tangenten? Die Antwort auf diese Frage ist Schülern nur bekannt für Graphen von Funktionen, und darum handelt es sich bei Hüllkurven ja i.a. gerade nicht. Allerdings lassen sich die behandelten Hüllkurven durch Funktionen beschreiben: die Parameterdarstellung leistet genau dieses. Wir setzen

also voraus, daß für die zu betrachtenden Kurven eine Parameterdarstellung existiert. Mit ihrer Hilfe können wir dann Tangenten berechnen.

Es sei also eine Kurve  $C$  sei durch den allgemeinen Punkt  $B(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$  gegeben. Wir betrachten den speziellen Punkt  $P = B(\tau)$ . Eine Tangente durch  $P$  ist eine solche Gerade, die die Kurve  $C$  in  $P$  mehrfach schneidet. Nun ist eine beliebige Gerade  $h$  durch  $P$  durch  $G(\lambda) = P + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  gegeben. Will man ermitteln, unter welchen Umständen  $h$  Tangente ist, muß man sich also um die Schnittpunkte von  $h$  mit  $C$  kümmern (**FIGUR 36**).



Figur 36

Diese werden durch diejenigen  $t$  und  $\lambda$  beschrieben, für die  $B(t) = G(\lambda)$ , also  $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  gilt.

Nun gibt es zwei Fälle: Es könnte  $t \neq \tau$  und  $\lambda = 0$  sein. (Das kann bei Doppelpunkten auftreten.) Diesen Fall schließen wir (der Einfachheit halber) für das folgende aus.

Damit kann man  $\lambda \neq 0$  voraussetzen, so daß sich  $\lambda$  eliminieren läßt. Es folgt sodann die grundlegende Beziehung

$$v \cdot (f(t) - f(\tau)) = u \cdot (g(t) - g(\tau))$$

folgt. Wie soll man diese Gleichung verarbeiten?

Nun ist nach dem Taylorschen Satz<sup>4</sup>

$$f(t) = f(\tau) + \frac{f'(\tau)}{1!} \cdot (t - \tau) + \frac{f''(\tau)}{2!} \cdot (t - \tau)^2 + \dots,$$

und Entsprechendes gilt für  $g$ . Setzt man dies in die grundlegende Beziehung ein, so folgt

$$(*) \quad \boxed{v \cdot \left[ f'(\tau) \cdot (t - \tau) + \frac{f''(\tau)}{2} \cdot (t - \tau)^2 + \frac{f'''(\tau)}{6} \cdot (t - \tau)^3 + \dots \right]} \\ = u \cdot \left[ g'(\tau) \cdot (t - \tau) + \frac{g''(\tau)}{2} \cdot (t - \tau)^2 + \frac{g'''(\tau)}{6} \cdot (t - \tau)^3 + \dots \right]$$

Dies ist ein gut handhabbarer Ausgangspunkt für weiterführende Betrachtungen.

Natürlich hat (\*) die Lösung  $t = \tau$ , und zwar unabhängig von  $u$  und  $v$ .

Spezialfall 1: Es sei  $v \cdot f'(\tau) = u \cdot g'(\tau)$ ;  $\begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Die hierdurch beschriebene Gerade hat dann mit  $C$  einen (mindestens) doppelten Schnittpunkt bei  $t = \tau$ . Wegen  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix}$  wird dann durch  $G(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix}$  die (eindeutig bestimmte) Tangente in  $P$  an  $C$  beschrieben.

<sup>4</sup> Die hierfür notwendigen Voraussetzungen seien erfüllt.

Als Beispiel sei die Ellipse mit dem allgemeinen Punkt  $B = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$  für  $t = \tau$  betrachtet. Die dortige Tangente ist durch  $T(\lambda) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos \tau \\ b \cdot \sin \tau \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -a \cdot \sin \tau \\ b \cdot \cos \tau \end{pmatrix}$  gegeben.

Spezialfall 1A: Es sei  $v \cdot f'(\tau) = u \cdot g'(\tau)$ ;  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $v \cdot f''(\tau) = u \cdot g''(\tau)$ .

Man erkennt aus (\*), daß in diesem Fall die Tangente die Kurve bei  $t = \tau$  (mindestens) dreifach schneidet. Die zusätzliche Bedingung ist zu  $\begin{pmatrix} f''(\tau) \\ g''(\tau) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix}$  äquivalent<sup>5</sup>.

Ein Punkt  $B(\tau) = \begin{pmatrix} f(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix}$  mit  $\begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} f''(\tau) \\ g''(\tau) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix}$  heißt Flachpunkt<sup>6</sup>.

Als Beispiel sei die kubische Parabel mit dem allgemeinen Punkt  $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$  betrachtet: Einziger

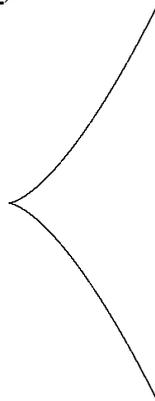
Flachpunkt ist  $B(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  wegen  $\left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0 \\ g'(0) = 0; \quad g''(0) = 0 \end{array} \right\}$ . Die dortige Tangente wird durch

$T(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  beschrieben, ist also die x-Achse.

### 7.3 Spitzen

Spezialfall 2: Es sei  $\begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Jede Gerade durch P schneidet dann die Kurve C (mindestens) zweifach. Der Punkt P ist (nach Voraussetzung) kein gewöhnlicher Doppelpunkt (dieser würde ja auch durch zwei verschiedene t-Werte beschrieben), sondern eine Spitze<sup>7</sup> mit eindeutiger Tangente (**FIGUR 37**).



Figur 37

Stellt man sich die Kurve als Bahn eines wandernden Punktes vor (mit dem Parameter t als Zeit), so besagt die Spitzenbedingung, daß für  $t = \tau$  die Punktgeschwindigkeit verschwindet. Hieraus erklärt sich die alte Bezeichnung einer Spitze als stationärer Punkt.

<sup>5</sup> Die Parallelität sei definitionsgemäß auch für den Fall  $f''(\tau) = g''(\tau) = 0$  erfüllt.

<sup>6</sup> Die Benennung ist in der Literatur nicht einheitlich.

<sup>7</sup> Die Benennung ist in der Literatur nicht einheitlich.

Die Spitzentangente wird analog wie im Spezialfall 1 als Gerade mit höherer Schnittmultiplizität festgelegt und ist  $G(\lambda) = \begin{pmatrix} f(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} f''(\tau) \\ g''(\tau) \end{pmatrix}$  (falls  $\begin{pmatrix} f''(\tau) \\ g''(\tau) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ); sie schneidet die Kurve im Punkt P (mindestens) dreifach.

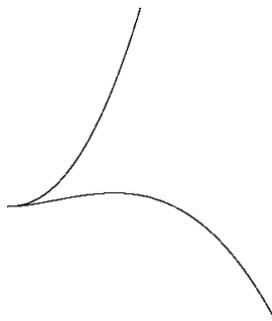
Als Beispiel sei die Neilsche Parabel mit dem allgemeinen Punkt  $B = t^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$  betrachtet. Für  $t = 0$  gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 0; \quad f''(0) = 2 \\ g'(0) = 0; \quad g''(0) = 0 \end{array} \right\}, \text{ der Ursprung ist also Spitze, und die Spitzentangente ist die } x\text{-Achse}$$

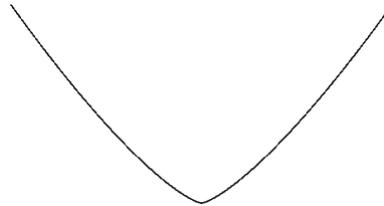
$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Spitzen müssen übrigens nicht symmetrisch sein, sie brauchen nicht besonders spitz auszusehen, ja, sie können sogar ganz unscheinbar sein, wie die Beispiele  $\begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 + t^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^3 \\ t^5 \end{pmatrix}$  (jeweils bei  $t = 0$ ) der Reihe nach zeigen

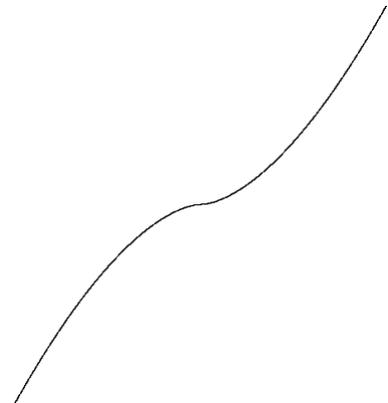
**(FIGUREN 38 / 39 / 40).**



Figur 38



Figur 39



Figur 40

**7.4 Eine kürzere Notation:**

Die Ergebnisse der Abschnitte 7.2 und 7.3 lassen sich kürzer formulieren:

Es ist  $P = B(\tau) = \begin{pmatrix} f(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix}$  der in Rede stehende Punkt, der weiterhin kein Doppelpunkt sein soll. Nennt man

$$\begin{pmatrix} f'(\tau) \\ g'(\tau) \end{pmatrix} =: P' \text{ und } \begin{pmatrix} f''(\tau) \\ g''(\tau) \end{pmatrix} =: P'' \text{ sowie } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^\perp := \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ und } O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ so gilt:}$$

Für  $P' \neq O$  ist die Tangente in P durch  $P + \lambda \cdot P'$  gegeben.

P ist ein Flachpunkt, falls  $P' \neq O$  und  $P'' \parallel P'$  ist<sup>8</sup>.

P ist Spitze, falls  $P' = O$  ist. Falls  $P'' \neq O$  ist, ist die Spitzentangente durch  $P + \lambda \cdot P''$  gegeben.

Diese Notation wird auch im nächsten Abschnitt verwendet.

**7.5 Krümmung**

---

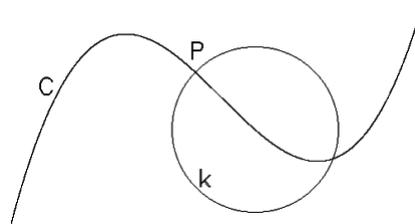
<sup>8</sup> Dabei ist  $P'' = O$  erlaubt.

Gegeben sei wieder eine Kurve mit dem allgemeinen Punkt  $B(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$ . Wieder betrachten wir den speziellen

Punkt  $P := B(\tau) = \begin{pmatrix} f(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix}$ .

In 7.2 wurde eine beliebige Gerade  $h$  durch  $P$  daraufhin untersucht, ob sie Tangente an  $C$  ist, d.h. ob sie  $C$  in  $P$  mehrfach schneidet. Eine solche Tangente approximiert die Kurve  $C$  in einer Umgebung von  $P$ .

Eine Gerade hat die Eigenschaft, überall dieselbe Steigung zu haben. Auch Kreise besitzen eine globale Eigenschaft: Ihre Krümmung ist überall gleich. Mithin läßt sich in zu 7.2 analoger Weise die Frage stellen, ob man  $C$  lokal durch einen Kreis approximieren kann, d.h. ob es einen Kreis gibt, der  $C$  in  $P$  mehrfach schneidet (**FIGUR 41**).



Figur 41

Nun hat ein Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  und dem Radius  $\rho$  den allgemeinen Punkt

$$K(\alpha) = M + \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

**7.5.1** Wenn  $P$  auf  $k$  liegen soll, muß

$$(1) \quad (P - M)^2 = \rho^2$$

gelten.

Zur Berechnung der Schnittpunkte von  $C$  und  $k$  dient die für gewisse  $t$  und  $\alpha$  gültige Gleichung  $B(t) = K(\alpha)$

bzw.  $\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} = M + \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ , woraus nach Elimination von  $\alpha$  und  $\rho$  die grundlegende Beziehung

$$(P - M)^2 = (B(t) - M)^2$$

folgt, die sich auch als

$$(B(t) + P - 2 \cdot M) \cdot (B(t) - P) = 0$$

schreiben läßt. Wie in 7.2 läßt sich diese Gleichung mit dem Taylorsche Satz verarbeiten; er lautet hier

$$B(t) = P + \frac{P'}{1!} \cdot (t - \tau) + \frac{P''}{2!} \cdot (t - \tau)^2 + \dots,$$

und damit folgt

$$\left\{ 2P - 2M + P' \cdot (t - \tau) + \frac{P''}{2} \cdot (t - \tau)^2 + \frac{P'''}{6} \cdot (t - \tau)^3 + \dots \right\} \cdot \left\{ P' \cdot (t - \tau) + \frac{P''}{2} \cdot (t - \tau)^2 + \frac{P'''}{6} \cdot (t - \tau)^3 + \dots \right\} = 0.$$

Dies läßt sich zu

$$(**) \quad \boxed{\begin{aligned} &(t - \tau) \cdot 2 \cdot [(P - M) \cdot P'] \\ &+ (t - \tau)^2 \cdot [(P - M) \cdot P'' + P'^2] \\ &+ (t - \tau)^3 \cdot 3 \cdot [(P - M) \cdot P''' + 3 \cdot P' \cdot P''] \\ &+ \dots = 0 \end{aligned}}$$

vereinfachen. Wie (\*) in 7.2 ist hier (\*\*) der geeignete Ausgangspunkt für weiterführende Betrachtungen. Natürlich hat (\*\*) die von M unabhängige Lösung  $t = \tau$ .

**7.5.2** Wir setzen nun voraus, daß P keine Spitze sein soll, also ist  $P' \neq O$ .

Wird dann M so gewählt, daß

$$(2) \quad (P - M) \cdot P' = 0$$

ist, so hat k mit C bei  $t = \tau$  einen (mindestens) doppelten Schnittpunkt. (2) ist eine Gleichung der Normalen zu C durch P. Ein Kreis, der C in P mindestens doppelt schneidet, C also in P berührt, hat somit seinen Mittelpunkt auf der Normalen zu C durch P. Damit ist der Berührungskreis natürlich noch nicht eindeutig bestimmt, denn jeder Kreis durch P mit Mittelpunkt auf der Geraden (2) berührt C in P.

**7.5.3** Wir setzen weiter voraus, daß auch  $P'' \neq O$  sein soll.

Gilt dann neben (2) noch zusätzlich die Gleichung

$$(3) \quad (P - M) \cdot P'' + P'^2 = 0,$$

so schneidet der Kreis k die Kurve C (mindestens) 3-fach. Ein solcher Kreis heißt Krümmungskreis.

Auch (3) ist eine Geradengleichung für M. Man bekommt (3) übrigens auch, indem man beide Seiten von (2) ableitet. Ebenso erhält man (2), indem man beide Seiten von (1) ableitet.

Der Mittelpunkt des Krümmungskreises ist der Schnittpunkt der Geraden (2) und (3):

$$M = P + \frac{P'^2}{P'^{\perp} \cdot P''} \cdot P'^{\perp};$$

er liegt im Endlichen, falls  $P'^{\perp} \cdot P'' \neq 0$  ist, falls also  $P''$  nicht zu  $P'$  parallel ist.

Der Radius des Krümmungskreises ermittelt sich dann mit (1) zu

$$\rho = \frac{P'^2}{P'^{\perp} \cdot P''} \cdot |P'^{\perp}| = \frac{P'^2}{P'^{\perp} \cdot P''} \cdot |P'|.$$

Unter der Krümmung von C im Punkt  $P = B(\tau)$  versteht man den reziproken Wert

$$\kappa(\tau) := \frac{1}{\rho} = \frac{P'^{\perp} \cdot P''}{P'^2 \cdot |P'|} = \frac{f'(\tau) \cdot g''(\tau) - g'(\tau) \cdot f''(\tau)}{\left( (f'(\tau))^2 + (g'(\tau))^2 \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Es sei hier noch einmal an die Voraussetzung erinnert, wonach P keine Spitze sein soll, also  $P' \neq O$  ist.

(Zum Krümmungskreis gelangt man übrigens auch auf andere Weise: Der geometrische Ort der Krümmungskreismittelpunkte ist die Evolute, also die Hüllkurve der Kurvennormalen.)

Die Krümmung verschwindet, falls  $P'' \parallel P'$  ist. Diese Bedingung wird insbesondere von denjenigen Flachpunkten P erfüllt, für die  $P'' \neq O \neq P'$  ist.

Ein Punkt mit verschwindender Krümmung, an dem diese ihr Vorzeichen wechselt, heißt Wendepunkt<sup>9</sup>.

Beispielsweise gilt für die kubische Parabel mit dem allgemeinen Punkt  $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$ , daß

$$\kappa(t) = \frac{6t}{(1+9t^4)^{1,5}} \text{ ist; } B(0) \text{ ist mithin Wendepunkt.}$$

<sup>9</sup> Die Benennung ist in der Literatur nicht einheitlich.

**7.5.4** Schließlich setzen wir nun auch noch voraus, daß  $P''' \neq O$  sein soll.

Ist dann zusätzlich zu (2) und (3) die Gleichung

$$(4) \quad (P - M) \cdot P''' + 3 \cdot P' \cdot P'' = 0$$

richtig, so schneidet der Krümmungskreis die Kurve bei  $t = \tau$  sogar (mindestens) 4-fach. Ein Punkt  $P = B(\tau)$  mit der Eigenschaft, daß sein Krümmungskreis die Kurve in  $P$  mindestens 4-fach schneidet, heißt Scheitelpunkt<sup>10</sup>.

(Wiederum erhält man (4) durch Ableiten von (3).)

Man bekommt ein Kriterium dafür, ob  $P = B(\tau)$  Scheitelpunkt ist, indem man den Mittelpunkt  $M$  des Krümmungskreisenzentrums in (4) einsetzt. Das so erhaltene Kriterium erweist sich (nicht überraschenderweise) als äquivalent zu  $\kappa'(\tau) = 0$ .

Als Beispiel sei die Ellipse mit dem allgemeinen Punkt  $B(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}$  betrachtet; es ist

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\left(a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cdot \cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Die Gleichung } \kappa'(t) = 0 \text{ ist zu } \sin t \cdot \cos t = 0 \text{ äquivalent, hat also}$$

dort Lösungen, wo man auch anschaulich die Scheitelpunkte erwartet.

Allerdings ist ein Scheitelpunkt nicht nur das, was man erwartet:

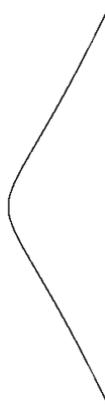
So ist bei der Parabel 4. Grades mit dem allgemeinen Punkt  $B = \begin{pmatrix} t \\ t^4 \end{pmatrix}$  der Ursprung kein Scheitelpunkt; schon die Voraussetzung für (3) ist nicht erfüllt.

## **7.6 Probleme der Parametrisierung**

In 7.1 wurde die Tschirnhaus-Kubik mit dem allgemeinen Punkt  $B = (t^2 - 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$  und in 7.3 die Neilsche

Parabel mit dem allgemeinen Punkt  $B = t^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$  als Beispiel herangezogen. Damit ist die Untersuchung der

Kurve mit dem allgemeinen Punkt  $B = (t^2 + 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$  naheliegend. Diese heißt kubische Duplikatrix (**FIGUR 42**).



Figur 42

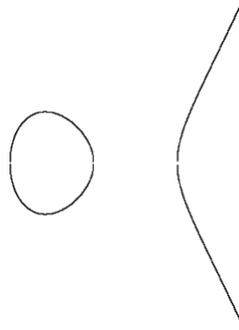
Ihre parameterfreie Gestalt bekommt man aus  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (t^2 + 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ , indem man aus  $y = t \cdot x$  und  $t^2 = x - 1$  die

Gleichung  $y^2 = (x - 1) \cdot x^2$  folgert. Man sieht, daß für negative  $x$ -Werte keine  $y$ -Werte existieren, der Ursprung aber zur Kurve gehört, für  $x$ -Werte aus dem Intervall  $(0; 1)$  wiederum keine  $y$ -Werte existieren und für

<sup>10</sup> Die Benennung ist in der Literatur nicht einheitlich.

$x$ -Werte aus dem Intervall  $[1; \infty)$  jeweils  $y$ -Werte vorhanden sind. Der Ursprung ist also ein Einsiedlerpunkt. Betrachtet man aber die Kurve in Parameterdarstellung, so gehört der Ursprung gar nicht zur Kurve! Durch die Entparametrisierung ist also ein Kurvenpunkt dazugekommen.

Ein anderes Problem mit der Parameterdarstellung ergibt sich bei der Kurve mit der Gleichung  $y^2 = (x+1) \cdot x \cdot (x-1)$  (**FIGUR 43**).



Figur 43

Der Graph besteht aus einem geschlossenen und aus einem offenen Teil. Hier gibt es gar keine Parameterdarstellung<sup>11</sup>.

### Literatur

- Berg, G. / Schupp, H.: Inversionsbilder von Kegelschnitten. DdM 3/1989, S. 201–217.
- Brieskorn, E. / Knörrer, H.: Ebene algebraische Kurven. Basel usw.: Birkhäuser 1981.
- Bruce, J.W. / Giblin, P.J.: Curves and singularities. Cambridge: Cambridge University Press <sup>2</sup>1992.
- Dörrie, H.: Triumph der Mathematik. Breslau: Ferdinand Hirt <sup>3</sup>1940.
- Fladt, K.: Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Frankfurt: Akademische Verlagsgesellschaft 1962
- Lawrence, J.D.: A catalog of special plane curves. New York: Dover Publ. 1972.
- Lockwood, E.H.: A book of curves. Cambridge usw.: Cambridge University Press 1961.
- v.Mangoldt, H. / Knopp, K.: Höhere Mathematik II. Stuttgart: S. Hirzel <sup>16</sup>1990
- Pedoe, D.: Circles. London usw.: Pergamon Press 1957.
- Pedoe, D.: Geometry and the liberal arts. Harmondsworth: Penguin Books 1976.
- Salmon, G.: A treatise on the higher plane curves. Dublin: Hodges, Foster, and Co. <sup>2</sup>1873.
- Salmon, G. / Fiedler, W.: Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Leipzig usw.: Teubner <sup>8</sup>1915.
- Schupp, H.: Mathematische Phänomene rund um die Gleitstrecke. DdM 1/1991, S. 27–39.
- Silverman, J. / Tate, J.: Rational Points on Elliptic Curves. New York usw.: Springer 1992.
- Walker, R.J.: Algebraic curves. Princeton: Princeton University Press, 1950; New York usw.: Springer 1978.

<sup>11</sup> Vgl. Silverman / Tate S. 95.