

Hockey-Stick, Potenzsummen und Potenzen

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch für endliche Summen:

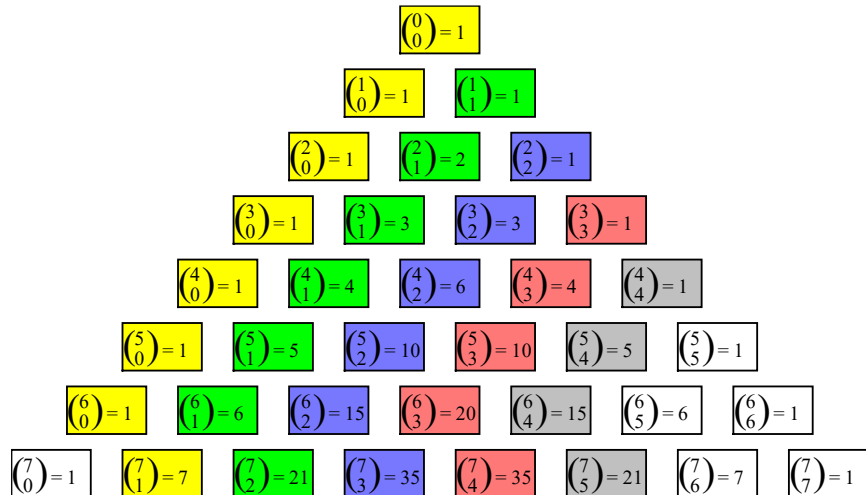
Mit $f(k) = F(k+1) - F(k)$ ist $\sum_{k=a}^b f(k) = \sum_{k=a}^b (F(k+1) - F(k)) = F(b+1) - F(a)$.

Hockey-Stick

Zu $f(k) = \binom{k}{n}$ gehört

$F(k) = \binom{k}{n+1}$, also

$$\sum_{k=n}^b \binom{k}{n} = \binom{b+1}{n+1}.$$

**Potenzsummen**

Für $n=1$ bekommt man $\sum_{k=1}^b k = \binom{b+1}{2}$.

Für $n=2$ bekommt man $\sum_{k=1}^b \binom{k}{2} = \binom{b+1}{3}$, also

$$\sum_{k=1}^b k^2 = \sum_{k=1}^b k + 2 \cdot \binom{b+1}{3} = \binom{b+1}{2} + 2 \cdot \binom{b+1}{3} = \binom{b+2}{3} + \binom{b+1}{3} = \sum_{k=1}^b k^2.$$

Für $n=3$ bekommt man $\sum_{k=1}^b \binom{k}{3} = \binom{b+1}{4}$, also

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^b k^3 &= 3 \cdot \sum_{k=1}^b k^2 - 2 \cdot \sum_{k=1}^b k + 6 \cdot \binom{b+1}{4} = 3 \cdot \left(\binom{b+2}{3} + \binom{b+1}{3} \right) - 2 \cdot \binom{b+1}{2} + 6 \cdot \binom{b+1}{4} \\ &= \binom{b+2}{3} + 2 \cdot \left(\binom{b+2}{3} - \binom{b+1}{2} \right) + 3 \cdot \left(\binom{b+1}{3} + \binom{b+1}{4} \right) + 3 \cdot \binom{b+1}{4} \\ &= \binom{b+2}{3} + 2 \cdot \left(\binom{b+1}{3} + \binom{b+2}{4} \right) + 2 \cdot \binom{b+2}{4} + 2 \cdot \binom{b+1}{4} + \binom{b+1}{4} \\ &= \binom{b+3}{4} + 2 \cdot \binom{b+1}{3} + 2 \cdot \binom{b+2}{4} + 2 \cdot \binom{b+1}{4} + \binom{b+1}{4} \\ &= \binom{b+3}{4} + 4 \cdot \binom{b+2}{4} + \binom{b+1}{4} = \sum_{k=1}^b k^3 \end{aligned}$$

Das kann man fortsetzen:

Potenzen und deren Summen

$$\begin{aligned}
 k &= \binom{k}{1} \\
 \sum_{k=1}^b k &= \binom{b+1}{2} \\
 k^2 &= \binom{k+1}{2} + \binom{k}{2} \\
 \sum_{k=1}^b k^2 &= \binom{b+2}{3} + \binom{b+1}{3} \\
 k^3 &= \binom{k+2}{3} + 4 \cdot \binom{k+1}{3} + \binom{k}{3} \\
 \sum_{k=1}^b k^3 &= \binom{b+3}{4} + 4 \cdot \binom{b+2}{4} + \binom{b+1}{4} \\
 k^4 &= \binom{k+3}{4} + 11 \cdot \binom{k+2}{4} + 11 \cdot \binom{k+1}{4} + \binom{k}{4} \\
 \sum_{k=1}^b k^4 &= \binom{b+4}{5} + 11 \cdot \binom{b+3}{5} + 11 \cdot \binom{b+2}{5} + \binom{b+1}{5} \\
 k^5 &= \binom{k+4}{5} + 26 \cdot \binom{k+3}{5} + 66 \cdot \binom{k+2}{5} + 26 \cdot \binom{k+1}{5} + \binom{k}{5} \\
 \sum_{k=1}^b k^5 &= \binom{b+5}{6} + 26 \cdot \binom{b+4}{6} + 66 \cdot \binom{b+3}{6} + 26 \cdot \binom{b+2}{6} + \binom{b+1}{6} \\
 k^6 &= \binom{k+5}{6} + 57 \cdot \binom{k+4}{6} + 302 \cdot \binom{k+3}{6} + 302 \cdot \binom{k+2}{6} + 57 \cdot \binom{k+1}{6} + \binom{k}{6} \\
 \sum_{k=1}^b k^6 &= \binom{b+6}{7} + 57 \cdot \binom{b+5}{7} + 302 \cdot \binom{b+4}{7} + 302 \cdot \binom{b+3}{7} + 57 \cdot \binom{b+2}{7} + \binom{b+1}{7}
 \end{aligned}$$

Der Übergang von den Potenzen zu deren Summen geschieht nach dem oben erwähnten diskreten

Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, wie am Beispiel $f(k) = \binom{k+3}{6}$ mit

$$F(k) = \binom{k+3}{7} \text{ erläutert sei: } \sum_{k=1}^b \binom{k+3}{6} = F(b+1) - F(1) = \binom{b+4}{7} - \binom{4}{7} = \binom{b+4}{7}.$$