J. MEYER, Hameln Febr. 2024

Zum HERON-Verfahren: Konvergenz und explizite Darstellung

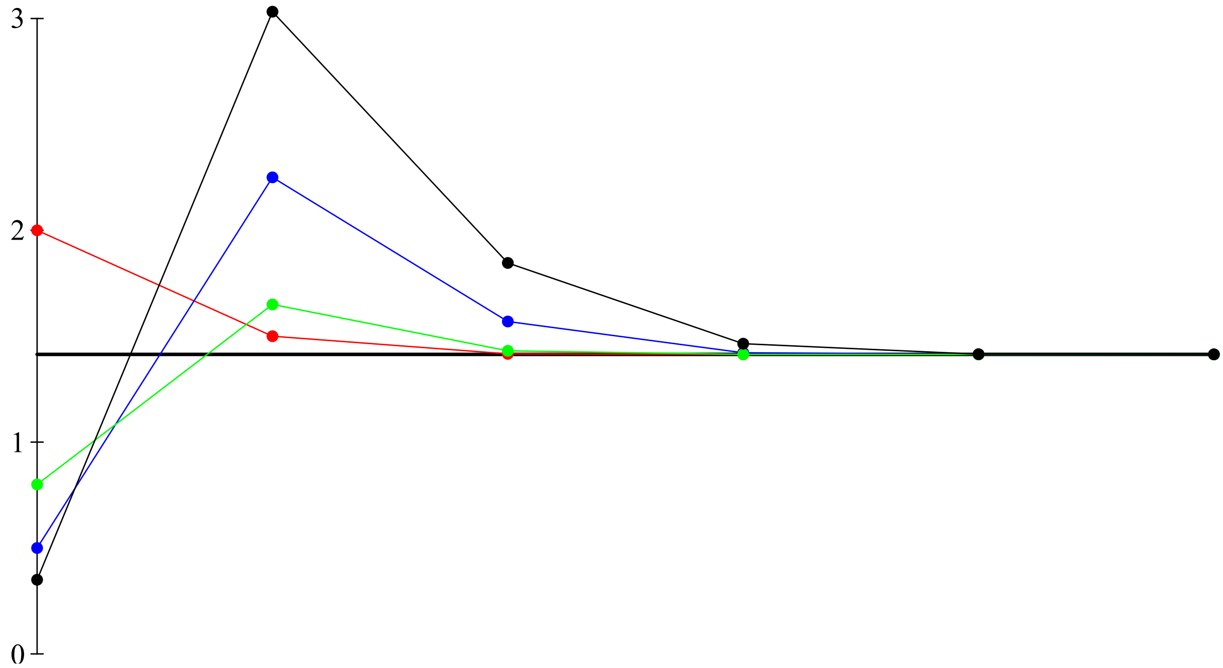
Zur Konvergenz bei HERON

Warum konvergiert das Heron-Verfahren $a_{n+1} = \frac{\left(a_n + \frac{D}{a_n}\right)}{2}$ zur Berechnung von $\sqrt{D}$ und wogegen?

Zwei äquivalente Umformungen sind hilfreich:

$$a_{n+1} > \sqrt{D}$$
$$a_n + \frac{D}{a_n} > 2 \cdot \sqrt{D}$$
$$\left(\sqrt{a_n}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{D} + \left(\sqrt{\frac{D}{a_n}}\right)^2 > 0$$
$$\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{\frac{D}{a_n}}\right)^2 > 0$$

Da die letzte Ungleichung immer gilt, weiß man: Ist der Startwert positiv, so sind alle Folgenglieder ab dem zweiten größer als $\sqrt{D}$; die nachfolgende skizze zeigt den Verlauf für drei unterschiedliche Startwerte.



$$a_{n+1} < a_n$$
$$\frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{D}{a_n}\right) < a_n$$
$$a_n + \frac{D}{a_n} < 2 \cdot a_n$$
$$\frac{D}{a_n} < a_n$$
$$\sqrt{D} < a_n$$

Liest man diese Äquivalenz-Kette von unten nach oben, weiß man: Die Folgenglieder werden immer kleiner.

Das geht nur, falls die Folge konvergiert.

Wogegen konvergiert die Folge? Wegen $2 \cdot a_{n+1} = a_n + \frac{D}{a_n}$ gilt: Konvergiert die Folge gegen a, so ist

$$2\cdot a=a+\frac{D}{a}$$
$$a=\frac{D}{a}$$
$$a=\sqrt{D}$$

HERON explizit

Es ist $a_{n+1}=\dfrac{\left(a_n+\dfrac{D}{a_n}\right)}{2}=\dfrac{a_n^2+D}{2\cdot a_n}$. Nun kommt ein schöner Trick:

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+D}{2\cdot a_n}=\frac{\left(a_n+\sqrt{D}\right)^2-2\cdot a_n\cdot\sqrt{D}}{2\cdot a_n}=\frac{\left(a_n+\sqrt{D}\right)^2}{2\cdot a_n}-\sqrt{D},\ \text{also}\ \boxed{a_{n+1}+\sqrt{D}=\frac{\left(a_n+\sqrt{D}\right)^2}{2\cdot a_n}}$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+D}{2\cdot a_n}=\frac{\left(a_n-\sqrt{D}\right)^2+2\cdot a_n\cdot\sqrt{D}}{2\cdot a_n}=\frac{\left(a_n-\sqrt{D}\right)^2}{2\cdot a_n}+\sqrt{D},\ \text{also}\ \boxed{a_{n+1}-\sqrt{D}=\frac{\left(a_n-\sqrt{D}\right)^2}{2\cdot a_n}}$$

Damit

$$\frac{a_{n+1}+\sqrt{D}}{a_{n+1}-\sqrt{D}}=\left(\frac{a_n+\sqrt{D}}{a_n-\sqrt{D}}\right)^2=\left(\frac{a_0+\sqrt{D}}{a_0-\sqrt{D}}\right)^{\left(2^{n+1}\right)}$$

$$\frac{a_n+\sqrt{D}}{a_n-\sqrt{D}}=\left(\frac{a_0+\sqrt{D}}{a_0-\sqrt{D}}\right)^{\left(2^{n}\right)}=:\frac{u}{v}>1$$

Aus $\dfrac{a_n+\sqrt{D}}{a_n-\sqrt{D}}=\dfrac{u}{v}$ folgt $a_n+\sqrt{D}=\dfrac{u}{v}\cdot\left(a_n-\sqrt{D}\right)$ und $a_n\cdot\left(1-\dfrac{u}{v}\right)=-\sqrt{D}\cdot\left(\dfrac{u}{v}+1\right)$ und deshalb

$$a_n=\sqrt{D}\cdot\frac{\frac{u}{v}+1}{\frac{u}{v}-1}=\sqrt{D}\cdot\frac{u+v}{u-v}=\boxed{\sqrt{D}\cdot\frac{\left(a_0+\sqrt{D}\right)^{\left(2^n\right)}+\left(a_0-\sqrt{D}\right)^{\left(2^n\right)}}{\left(a_0+\sqrt{D}\right)^{\left(2^n\right)}-\left(a_0-\sqrt{D}\right)^{\left(2^n\right)}}=a_n}\,.$$