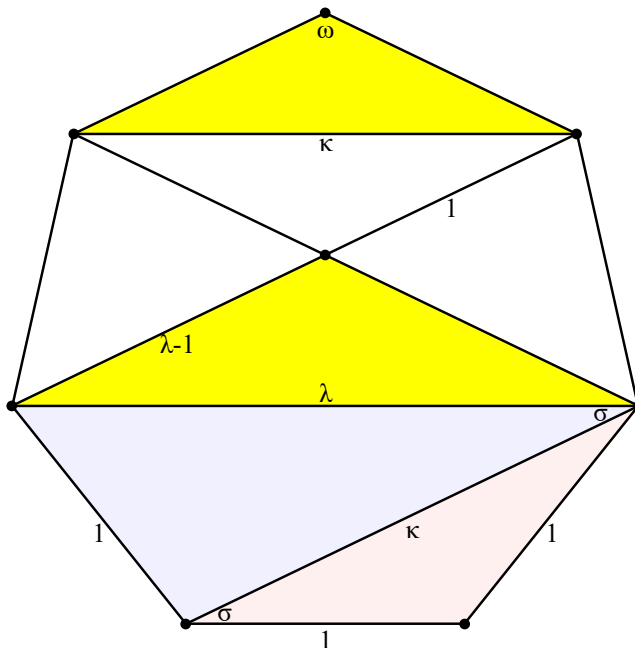


Zum regelmäßigen Siebeneck



Das regelmäßige Siebeneck hat lange Diagonalen der Länge λ (lambda) und kurze Diagonalen der Länge κ (kappa). Der Randwinkel ω hat die Größe $\frac{5 \cdot 180^\circ}{7}$.

Damit ist $\sigma = 90^\circ - \frac{\omega}{2} = \frac{180^\circ}{7}$.

Nach dem Cosinussatz im rötlichen Dreieck ist $1^2 = 1^2 + \kappa^2 - 2 \cdot \kappa \cdot \cos \sigma$, also

$$\boxed{\kappa = 2 \cdot \cos \sigma}.$$

Im bläulichen Dreieck ist

$$1^2 = \lambda^2 + \mu^2 - 2 \cdot \lambda \cdot \kappa \cdot \cos \sigma$$

$$1^2 - \lambda^2 = \kappa^2 - \lambda \cdot \kappa^2$$

$$\lambda + 1 = \kappa^2$$

$$\boxed{\lambda = \kappa^2 - 1}$$

Da die gelben Dreiecke zueinander ähnlich sind, gilt $\frac{\kappa}{1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, also $\boxed{\lambda \cdot \kappa = \lambda + \kappa}$.

Damit hat man eine Gleichung für κ , nämlich $\boxed{\kappa^3 - \kappa^2 - 2 \cdot \kappa + 1 = 0}$.

Aus $\kappa^2 = \lambda + 1$ folgt $\frac{\kappa}{\lambda + 1} = \frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$, also $\lambda^2 - 1 = \lambda \cdot \kappa = \lambda + \kappa$ bzw. $\boxed{\lambda^2 = \lambda + \kappa + 1}$.

Damit hat man auch eine Gleichung für λ , nämlich $(\lambda^2 - 1)^2 = \lambda^2 \cdot (\lambda + 1)$ bzw.

$$\lambda^4 - \lambda^3 - 3 \cdot \lambda^2 + 1 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda^3 - 2 \cdot \lambda^2 - \lambda + 1) = 0.$$

Beide Gleichungen machen keinen einladenden Eindruck.

Man hat die Relationen $\kappa \cdot \lambda = \lambda + \kappa$, $\lambda^2 = \lambda + \kappa + 1$, $\kappa^2 = \lambda + 1$. Dann ist

$$\lambda^2 = \lambda + \kappa + 1 =: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = 3 \cdot \lambda + 2 \cdot \kappa + 1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = 6 \cdot \lambda + 5 \cdot \kappa + 3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ist } \lambda^n = f_n \cdot \lambda + g_n \cdot \kappa + h_n = \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \\ h_n \end{pmatrix}, \text{ so ist } \lambda^{n+1} = f_n \cdot (\lambda + \kappa + 1) + g_n \cdot (\lambda + \kappa) + h_n \cdot \lambda = \begin{pmatrix} f_n + g_n + h_n \\ f_n + g_n \\ f_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ist } \kappa^n = u_n \cdot \lambda + v_n \cdot \kappa + w_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \text{ so ist } \kappa^{n+1} = u_n \cdot (\kappa + \lambda) + v_n \cdot (\lambda + 1) + w_n \cdot \kappa = \begin{pmatrix} u_n + v_n \\ v_n + w_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Die Potenzen von λ und κ sind Linearkombinationen aus λ und κ und 1.

Damit schreiben sich die Gleichungen für λ und κ als

$$\lambda^3 - 2 \cdot \lambda^2 - \lambda + 1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\kappa^3 - \kappa^2 - 2 \cdot \kappa + 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus $\lambda \cdot \kappa = \lambda + \kappa$ folgt $\frac{\lambda}{\kappa} = \lambda - 1$. Damit sind alle Längenverhältnisse geklärt.