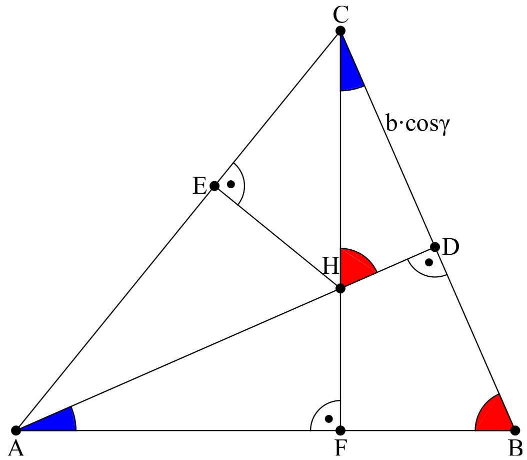
Jörg MEYER, Hameln

Letzte Änderung am 20. 7. 2023

Höhen und Cosinusprodukt

Im Dreieck ABC schneiden die Höhen die zu ihnen senkrechten Seiten in D, E, F. Der Umkreisradius sei R. Gleichfarbige Winkel haben gleiche Größe.



Im ***spitz***winkligen Dreieck ABC gilt: Wegen

$\sin(\text{blau}) = \frac{HF}{AH} = \frac{HD}{CH}$ ist $\boxed{AH \cdot HD = CH \cdot HF}$.

Man fragt sich, wie groß dieses Produkt ist.

Wegen $\sin\beta = \frac{b \cdot \cos\gamma}{CH}$ ist $\frac{CH}{\cos\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = 2 \cdot R$, also

$\boxed{CH = 2 \cdot R \cdot \cos\gamma}$ und analog

$\boxed{\frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{BH}{\cos\beta} = \frac{CH}{\cos\gamma} = 2 \cdot R}$ (SEGNER).

Es ist $CF = b \cdot \sin\alpha$, also

$$\frac{CH}{CF} = \frac{b \cdot \cos\gamma}{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{-\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = 1 - \cot\alpha \cdot \cot\beta .$$

Andererseits ist $\frac{CH}{CF} = \frac{CF - HF}{CF} = 1 - \frac{HF}{CF}$ und somit $\boxed{\frac{HF}{CF} = \cot\alpha \cdot \cot\beta}$, also

$$HF = b \cdot \sin\alpha \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta = b \cdot \cos\alpha \cdot \cot\beta = 2 \cdot R \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \cdot \cot\beta = \boxed{2 \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = HF} .$$

Wir waren interessiert am Produkt

$$CH \cdot HF = 2 \cdot R \cdot \cos\gamma \cdot 2 \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \boxed{(2 \cdot R)^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = CH \cdot HF} .$$

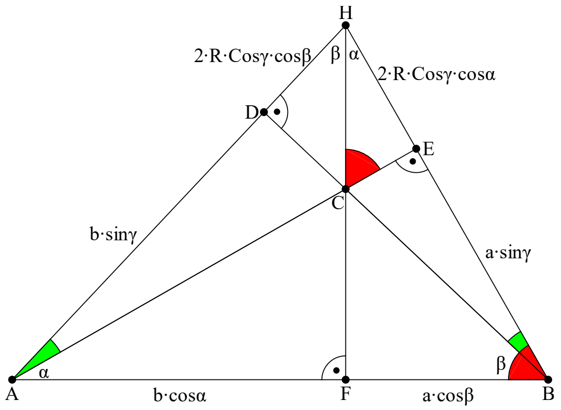
Wegen SEGNER schreibt sich dies auch als

$$CH \cdot HF = (2 \cdot R)^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = (2 \cdot R)^2 \cdot \frac{AH}{2 \cdot R} \cdot \frac{BH}{2 \cdot R} \cdot \frac{CH}{2 \cdot R} ,$$

und daher ist $\boxed{HF = \frac{AH \cdot BH}{2 \cdot R}}$ und analog $\boxed{HD = \frac{BH \cdot CH}{2 \cdot R}}$; $\boxed{HE = \frac{CH \cdot AH}{2 \cdot R}}$.

Wenn man AH, BH und CH sowie R kennt, kann man HF, HD und HE ausrechnen.

Ferner ist $\boxed{\frac{HD}{HE} \cdot HF = \frac{BH^2}{2 \cdot R}}$ usw., man kann also mit HF, HD und HE und R auch AH, BH und CH ausrechnen.



Im ***stumpf***winkligen Fall ($\gamma > 90°$; hier ist $\cos\gamma < 0$)
sei $\operatorname{Cos}\gamma := -\cos\gamma$.
Der grüne Winkel hat die Größe
$90° - (\alpha + \beta) = 90° - (180° - \gamma) = \gamma - 90°$, also ist

$$\sin(\text{grün}) = \operatorname{Cos}\gamma;\ \cos(\text{grün}) = \sin\gamma .$$

Mit $\cos(\text{grün}) = \frac{EB}{a} = \frac{AD}{b}$ und $\sin(\text{grün}) = \frac{CE}{a} = \frac{CD}{b}$

ist $HC = \frac{CD}{\sin\beta} = \frac{b \cdot \sin(\text{grün})}{\sin\beta} = 2 \cdot R \cdot \operatorname{Cos}\gamma$ und

$$HE = HC \cdot \cos\alpha = \boxed{2 \cdot R \cdot \operatorname{Cos}\gamma \cdot \cos\alpha = EH}\ ; \quad DH = CH \cdot \cos\beta = \boxed{2 \cdot R \cdot \cos\gamma \cdot \operatorname{Cos}\beta = DH} .$$

Nun ist

$$HB = a \cdot \sin\gamma - 2 \cdot R \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha = a \cdot \sin\gamma - \frac{c}{\sin\gamma} \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha = \frac{1}{\sin\gamma} \cdot \left(a \cdot \sin^2\gamma - \cos\gamma \cdot (b - a \cdot \cos\gamma)\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\gamma} \cdot (a - b \cdot \cos\gamma) = \frac{1}{\sin\gamma} \cdot c \cdot \cos\beta = \boxed{2 \cdot R \cdot \cos\beta = HB}$$

und analog $\boxed{2 \cdot R \cdot \cos\alpha = HA}$, und oben wurde schon $\boxed{HC = 2 \cdot R \cdot \operatorname{Cos}\gamma}$ gesehen. Der Satz von SEGNER gilt mutatis mutandis also auch im stumpfwinkligen Fall.

Wegen $\cos\alpha = \frac{HF}{HB}$ ist

$$HF \cdot HC = HB \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot R \cdot \operatorname{Cos}\gamma = 2 \cdot R \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha \cdot 2 \cdot R \cdot \operatorname{Cos}\gamma = (2 \cdot R)^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{Cos}\gamma$$

und

$$BH \cdot HE = 2 \cdot R \cdot \cos\beta \cdot 2 \cdot R \cdot \operatorname{Cos}\gamma \cdot \cos\alpha$$

wie im spitzwinkligen Fall.