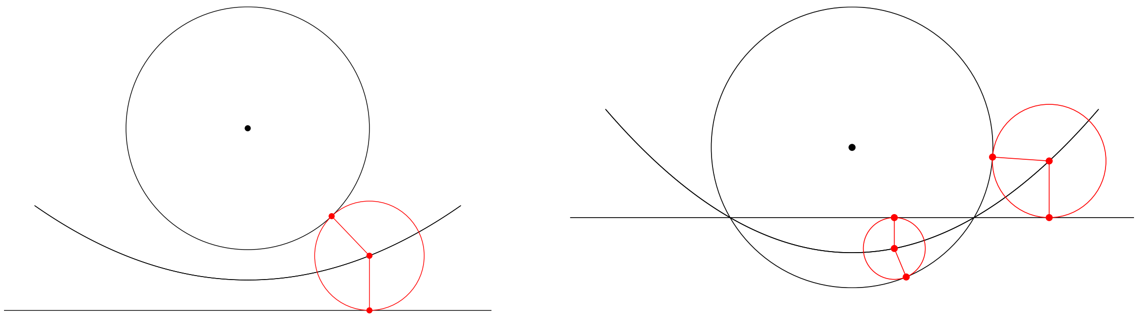
Jörg MEYER, Hameln 16. 6. 2024

Punkte, die gleichabständig zu einer Geraden und einem Kreis sind

Was kann man über die Punkte $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sagen, die von einem Kreis (o.B.d.A. mit der Gleichung $x^2 + (y-f)^2 = r^2$) und einer Geraden (o.B.d.A. mit der Gleichung $y = -f$) den gleichen Abstand haben?

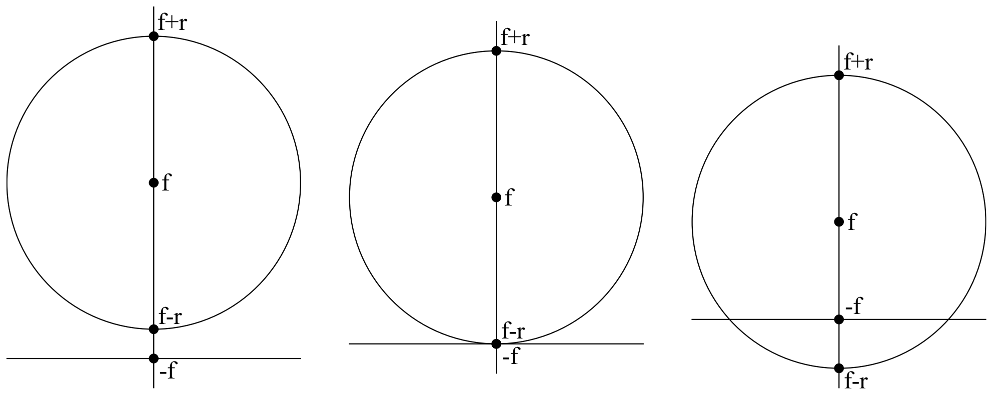
Die Gleichung $\sqrt{x^2 + (y-f)^2} - r = y + f$ liefert $\boxed{y = \frac{x^2 - r^2 - 2 \cdot f \cdot r}{4 \cdot f + 2 \cdot r}}$.



Erwartungsgemäß bekommt man Parabeln.

Interessanter wird es, wenn man unter dem „Abstand eines Punktes zu einem Kreis“ nicht den ***minimalen*** Abstand zu einem der Kreispunkte versteht, sondern den ***maximalen*** Abstand.

Hier ist zu unterscheiden, ob die Gerade den Kreis passiert ($r < 2 \cdot f$), berührt ($r = 2 \cdot f$) oder schneidet ($r > 2 \cdot f$).



Wenn es Punkte gibt, deren Abstand zur Geraden so groß ist wie deren maximaler Abstand zu einem Kreispunkt, so gibt es auch einen Punkt $P = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ mit dieser Eigenschaft auf der Symmetrieachse, also auf der Senkrechten zur Geraden durch den Kreismittelpunkt $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$.

Natürlich kann $y = f$ nur im Berührungsfall sein.

Ist $y > f$, so muss $y - (f - r) = y - (-f)$ sein, was auch auf auf $r = 2 \cdot f$ führt.

Ist $y < f$, muss $f + r - y = y - (-f)$ sein, was $y = \frac{r}{2}$ liefert.

Es gibt also im Schnittfall keine Punkte auf der Symmetrieachse.

Im Berührfall findet man Punkte $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft, von der Geraden genauso weit entfernt zu sein wie vom entferntesten Kreispunkt, anhand der Gleichung $\sqrt{x^2+(y-f)^2}+r=y+f$, die zu

$$\boxed{x^2+r\cdot(2\cdot f-r)=2\cdot y\cdot(2\cdot f-r)}$$

führt. Wegen $2\cdot f=r$ liefert dies die (doppelte) Lösung $x=0$.

Ist $r<2\cdot f$, so hat die Gerade mit dem Kreis keinen Punkt gemeinsam, und die eingekastelte Gleichung beschreibt eine Parabel mit der Gleichung

$$y=\frac{x^2}{2\cdot(2\cdot f-r)}+\frac{r}{2}.$$