Jörg MEYER, Hameln

Zur Fakultät von1/2

Inhalt

Einleitung

Jeder weiß, dass $5^3 = 5\cdot5\cdot5$ ist, aber was soll 5^{-1} oder $5^{1/2}$ sein? Auf diese zunächst als unsinnig erscheinende Frage erfährt man in Klasse 9, dass es sinnvoll ist, $5^{-1} = \frac{1}{5}$ und $5^{1/2} = \sqrt{5}$ zu setzen.

Jeder weiß, dass $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ ist, aber was soll $\left(\frac{1}{2}\right)!$ sein? Dieser Beitrag zeigt, dass man nur Oberstufen-Kenntnisse braucht, um diese Frage beantworten zu können. Es werden drei (unabhängig voneinander beschreitbare) Wege geschildert. Der erste interpoliert Fakultäten, der zweite geht von (gut beherrschbaren) Integralen aus, der dritte interpoliert Binomialkoeffizienten.
Auf den Interpolationswegen werden einfache Eigenschaften der EULER'schen Gamma- und Beta-Funktion gestreift; insofern wirft dieser Beitrag auch einen Blick auf Funktionen, die zwar im Schulunterricht nicht vorkommen, jedoch elementar genug sind, um vorkommen zu können.
In dieser Datei wird nicht erläutert, wie man auf die Γ-Funktion oder die B-Funktion kommt.

Definition der Γ-Funktion

Es werden die (für natürlichzahlige Argumente definierten) Fakultäten interpoliert. Da man die Funktionswerte für nicht-natürlichzahlige Argumente (fast) beliebig vorschreiben kann, gibt es allerdings viele interpolierende Funktionen.

Mit $\boxed{\gamma(t) := \int_0^\infty x^t \cdot e^{-x} \cdot dx}$ ist die EULER'sche Γ-Funktion durch $\gamma(n) = \Gamma(n+1)$ definiert.

Es ist $\gamma(0) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$, und mit der partiellen Integration

$$\gamma(t+1) = \int_0^\infty \underset{u}{x^{t+1}} \cdot \underset{v'}{e^{-x}} \cdot dx = \underbrace{-x^{t+1} \cdot e^{-x}\Big|_0^\infty}_{w} + (t+1) \cdot \underbrace{\int_0^\infty x^t \cdot e^{-x} \cdot dx}_{\gamma(t)} = w + (t+1) \cdot \gamma(t)$$

und wegen $w = -x^{t+1} \cdot e^{-x}\Big|_0^\infty = 0$ für $t+1 > 0$ folgt $\boxed{\gamma(t+1) = (t+1) \cdot \gamma(t) \text{ für } t > -1}$, also $\gamma(n) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion γ interpoliert somit tatsächlich die Fakultät.

Zusammenhang mit der Normalverteilung; Wertermittlung

Bekanntlich ist $\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot dx = \sqrt{2\cdot\pi}$. Die Substitution $z = \frac{x^2}{2}$ liefert

$$\frac{\sqrt{2\cdot\pi}}{2} = \int_0^{\infty} e^{-x^2/2} \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-z} \cdot \frac{dz}{\sqrt{2\cdot z}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_0^{\infty} z^{-1/2} \cdot e^{-z} \cdot dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$

und damit $\gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und auch $\boxed{\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}}$, $\gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$, $\gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$ usw.

Allgemein ist $\gamma\left(\frac{2\cdot n-1}{2}\right) = \frac{(2\cdot n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi} = \boxed{\frac{(2\cdot n)!}{4^n\cdot n!}\cdot\sqrt{\pi} = \gamma\left(\frac{2\cdot n-1}{2}\right)}$.

Eine Eigenschaft der Γ-Funktion

Für $b \neq 0$ gilt $\boxed{a!\cdot a! < (a-b)!\cdot(a+b)!}$.

Die Aussage schreibt sich für positive b als $\frac{a!}{(a-b)!} < \frac{(a+b)!}{a!}$ bzw. als

$(a-b+1)\cdot\ldots\cdot a < (a+1)\cdot\ldots\cdot(a+b)$, was richtig ist, da der k-te Faktor links um b kleiner ist als der k-te Faktor rechts (k=1, …, b).

Ist $c = -b$ für negative b, so ist $\frac{a!}{(a-c)!} < \frac{(a+c)!}{a!}$ bzw. $(a-c+1)\cdot\ldots\cdot a < (a+1)\cdot\ldots\cdot(a+c)$, und man kann analog argumentieren.

Logarithmiert man die eingekastelte Beziehung, bekommt man $\ln(a!) < \frac{\ln((a-b)! + \ln((a+b)!))}{2}$; der Logarithmus der Fakultät ist also konvex.

Das Vertrauen in die Γ-Funktion würde gestärkt, wenn die zur oben eingekastelten Ungleichung analoge Ungleichung $\boxed{(\gamma(a))^2 < \gamma(a-b)\cdot\gamma(a+b) \text{ für } b \neq 0}$ gelten würde.

Das ist tatsächlich der Fall! Der Trick besteht darin, die Differenz $(\gamma(a))^2 - \gamma(a+b)\cdot\gamma(a-b)$ als Diskriminante einer quadratischen Gleichung aufzufassen, die dann keine Lösung haben darf.
Eine passende quadratische Gleichung ist

$$\gamma(a-b)\cdot z^2 - 2\cdot\gamma(a)\cdot z + \gamma(a+b) = 0$$

$$z^2 - 2\cdot\frac{\gamma(a)}{\gamma(a-b)}\cdot z + \frac{\gamma(a+b)}{\gamma(a-b)} = 0$$

$$z = \frac{\gamma(a)}{\gamma(a-b)} \pm \sqrt{\frac{(\gamma(a))^2}{(\gamma(a-b))^2} - \frac{\gamma(a+b)\cdot\gamma(a-b)}{(\gamma(a-b))^2}}$$

Nun ist für alle z der Ausdruck

$$\gamma(a-b)\cdot z^2-2\cdot\gamma(a)\cdot z+\gamma(a+b)=\int_0^\infty\left(x^{a-b}\cdot z^2-2\cdot x^a\cdot z+x^{a+b}\right)\cdot e^{-x}\cdot dx$$
$$=\int_0^\infty x^{a-b}\cdot\left(z^2-2\cdot x^b\cdot z+x^{2\cdot b}\right)\cdot e^{-x}\cdot dx$$
$$=\int_0^\infty x^{a-b}\cdot\left(z-x^b\right)^2\cdot e^{-x}\cdot dx$$

echt positiv. Die zu beweisende Ungleichung gilt also tatsächlich.
Es wurde schon bemerkt, dass es viele Funktionen gibt, die die fakultäten interpolieren, aber nur die Gamma-Funktion ist zusätzlich logarithmisch konvex (Satz von Harald Bohr (Bruder von Niels Bohr) und Mollerup; ein lesbarer Beweis findet sich in W. Rudin: Analysis).

Doppelfakultäten

Da auf dem folgenden Weg Doppelfakultäten auftreten, werden zunächst deren Eigenschaften herausgestellt.

Es ist $(2\cdot n)!!:=2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot(2\cdot n)=\boxed{2^n\cdot n!=(2\cdot n)!!}$ und

$$(2\cdot n-1)!!:=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n-1)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n-2)\cdot(2\cdot n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2\cdot n-2)}\cdot\frac{2\cdot n}{2\cdot n}=\boxed{\frac{(2\cdot n)!}{(2\cdot n)!!}=(2\cdot n-1)!!}$$

und daraus $(2\cdot n+1)!!=\dfrac{(2\cdot n+1)!}{(2\cdot n)!!}$.

Ein anderer Weg zu halbzahligen Argumenten

Für $\boxed{I_n:=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\cdot dx}$ ist $I_0=1$, $I_1=\dfrac{2}{3}$ und $I_{1/2}=\int_0^1\left(1-x^2\right)^{1/2}\cdot dx=\dfrac{\pi}{4}$ sowie

$$I_n=\int_0^1\underset{u'}{1}\cdot\underbrace{\left(1-x^2\right)^n}_{v}\cdot dx=x\cdot\left(1-x^2\right)^n\Big|_0^1+\int_0^1 x\cdot n\cdot\left(1-x^2\right)^{n-1}\cdot 2\cdot x\cdot dx=2\cdot n\cdot\int_0^1 x^2\cdot\left(1-x^2\right)^{n-1}\cdot dx$$
$$=2\cdot n\cdot\int_0^1\left(1-\left(1-x^2\right)\right)\cdot\left(1-x^2\right)^{n-1}\cdot dx=2\cdot n\cdot\left(I_{n-1}-I_n\right)$$

für $n>0$ und damit $\boxed{I_n=\dfrac{2\cdot n}{2\cdot n+1}\cdot I_{n-1}}$, also einerseits $I_1=\dfrac{2}{3}\cdot 1$; $I_2=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}$; $I_3=\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}$ usw. und

allgemein $\boxed{I_n=\dfrac{(2\cdot n)!!}{(2\cdot n+1)!!}}=\dfrac{\left[(2\cdot n)!!\right]^2}{(2\cdot n+1)!}=\dfrac{4^n\cdot[n!]^2}{(2\cdot n+1)!}=\boxed{\dfrac{4^n}{(n+1)}\cdot\dfrac{1}{\binom{2\cdot n+1}{n}}=I_n}$ für natürlichzahlige n und

andererseits $I_{3/2}=\dfrac{3}{4}\cdot I_{1/2}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\pi}{4}$, $I_{5/2}=\dfrac{5}{6}\cdot I_{3/2}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\pi}{4}$ usw. und damit für natürlichzahlige n

allgemein $\boxed{I_{n-1/2}=\dfrac{(2\cdot n-1)!!}{(2\cdot n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\dfrac{(2\cdot n)!}{\left[(2\cdot n)!!\right]^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(2\cdot n)!}{4^n\cdot[n!]^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\boxed{\dfrac{1}{4^n}\cdot\binom{2\cdot n}{n}\cdot\dfrac{\pi}{2}=I_{n-1/2}}$.

Nimmt man (in unstatthafter Weise) in der letzten Beziehung die Einsetzung $n=\frac{1}{2}$ vor, bekommt man $I_0=\frac{\binom{1}{1/2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$; andererseits war $I_0=1$, was zu $\binom{1}{1/2}=\frac{4}{\pi}$ und damit zu $\left(\frac{1}{2}\right)!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ in Übereinstimmung mit dem früheren Resultat $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$ führt.

Allgemein ergibt das Einsetzen von $n=\frac{2\cdot m-1}{2}$ die Beziehung

$$\frac{2^{m-1}\cdot(m-1)!\cdot 2^m\cdot m!}{(2\cdot m)!}=I_{m-1}=\frac{(2\cdot m-1)!}{4^m\cdot\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)!\right]^2}\cdot\pi$$

bzw. $\left(m-\frac{1}{2}\right)!=\frac{(2\cdot m)!}{4^m\cdot m!}\cdot\sqrt{\pi}$ in Übereinstimmung mit $\gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)=\frac{(2\cdot m)!}{4^m\cdot m!}\cdot\sqrt{\pi}$.

Zusammenhang der Integrale I_n mit der Normalverteilung

Bekanntlich ist $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}e$, also auch $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\left(\left(1+\frac{1}{n/a}\right)^{n/a}\right)^a\xrightarrow{n/a\to\infty}e^a$ und deshalb auch $\left(1-\frac{x^2/2}{n}\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}e^{-x^2/2}$.

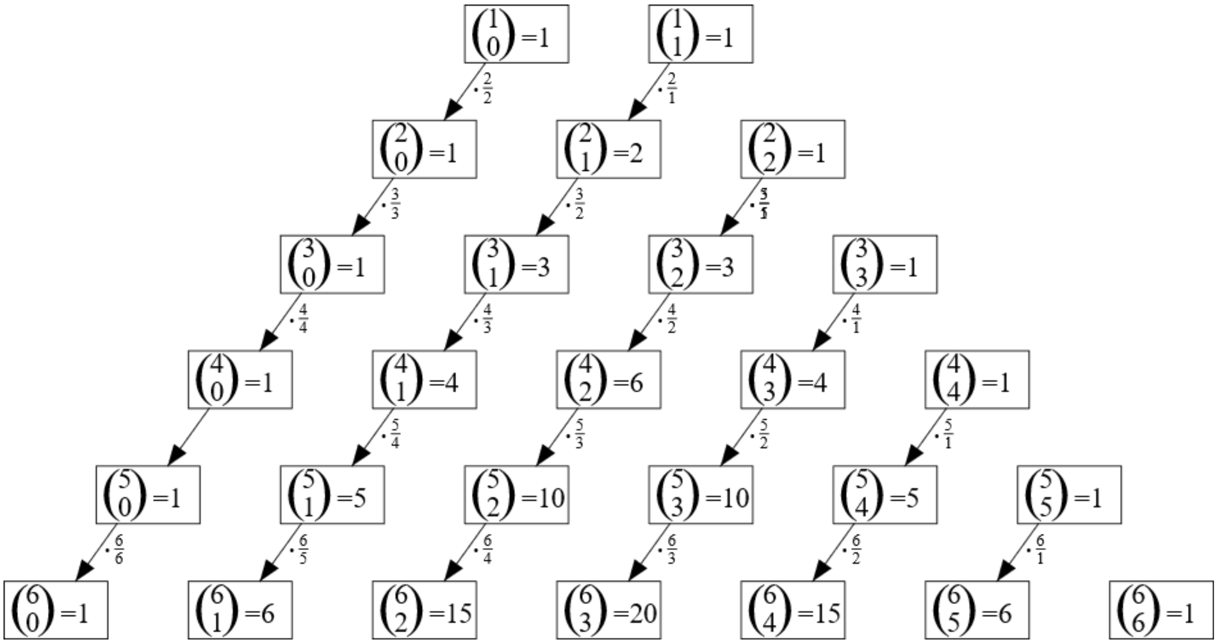
Mit der Substitution $x=\frac{z}{\sqrt{2\cdot n}}$ ist $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{2\cdot n}}\cdot\int_0^{\sqrt{2\cdot n}}\left(1-\frac{z^2}{2\cdot n}\right)^n\cdot dz$. Der Integrand strebt gegen $e^{-z^2/2}$, die obere Integralgrenze gegen ∞. Nimmt man an, dass das letzte Integral gegen $\frac{\Psi}{2}$ strebt, ist $\frac{\Psi}{2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2\cdot n}\cdot I_n$.

Interpolation der Binomialkoeffizienten

Achtung: Dieser Weg erfordert den größten Aufwand.

Setzt man voraus, dass sich $\frac{1!}{\left(\frac{1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{1}{2}\right)!}$ schreiben lässt als $\binom{1}{1/2}$, stellt sich die Frage, ob man an solche Binomialkoeffizienten auch durch Interpolation herankommt.

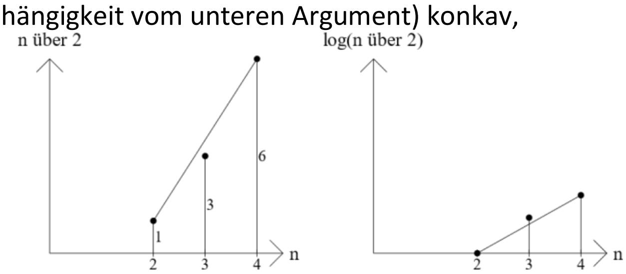
Um auf Ideen zu kommen, sehen wir uns die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ für ganzzahlige Argumente an.



Stets ist $\dfrac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{n+1}{n+1-k}$, und diese Beziehung soll auch für halbzahlige Argumente beibehalten werden. Längs der angedeuteten Diagonalen wachsen die Binomialkoeffizienten monoton.

Es gilt sogar noch mehr: Für $k>0$ ist stets $\boxed{\binom{n}{k}^2 > \binom{n-1}{k}\cdot\binom{n+1}{k}}$ in Analogie zu $a!\cdot a! < (a-b)!\cdot(a+b)!$, denn die eingekastelte Beziehung schreibt sich als $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k}} > \dfrac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}$, was zu $\dfrac{n}{n-k} > \dfrac{n+1}{n+1-k}$ und damit zu $k>0$ äquivalent ist).

Logarithmiert man die eingekastelte Beziehung, bekommt man $\ln\binom{n}{k} > \dfrac{\ln\binom{n-1}{k} + \ln\binom{n+1}{k}}{2}$, d.h. die logarithmierten Binomialkoeffizienten sind (in Abhängigkeit vom unteren Argument) konkav, obwohl die Binomialkoeffizienten selber nicht konkav zu sein brauchen, denn für $k=2$ ist $3 = \binom{3}{2} > \dfrac{\binom{2}{2}+\binom{4}{2}}{2} = \dfrac{1+6}{2}$ falsch.



Die logarithmische Konvexität soll auch für halbzahlige Argumente gelten, also auch

$$\ln\binom{n}{1/2} > \frac{\ln\binom{n-1}{1/2}+\ln\binom{n+1}{1/2}}{2} \text{ bzw. } \boxed{\binom{n}{1/2}^2 > \binom{n-1}{1/2}\cdot\binom{n+1}{1/2}} \text{ und auch}$$

$$\ln\binom{n}{1/2} > \frac{\ln\binom{n-1/2}{1/2}+\ln\binom{n+1/2}{1/2}}{2} \text{ bzw. } \boxed{\binom{n}{1/2}^2 > \binom{n-1/2}{1/2}\cdot\binom{n+1/2}{1/2}}.$$

Das hier zu verfolgende Permanenzprinzip besteht darin, dass die letzten Formeln zusammen mit $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ auch für Binomialkoeffizienten mit halbzahligen Argumenten richtig sein sollen, ohne dass geklärt wird, was ein Ausdruck wie $\binom{3/2}{1/2}$ überhaupt inhaltlich bedeuten soll.

Die Frage war: Was groß ist $x:=\binom{1}{1/2}$? Wegen $\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{n+1-k}$ ist $\frac{\binom{2}{1/2}}{\binom{1}{1/2}}=\frac{2}{2-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$ und deshalb

$\binom{2}{1/2}=\frac{4}{3}\cdot x$, weiter $\binom{3}{1/2}=\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot x$, $\binom{4}{1/2}=\frac{8}{7}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot x$ und allgemein

$$\binom{m}{1/2}=\frac{(2\cdot m)\cdot(2\cdot m-2)\cdot\ldots\cdot 2}{(2\cdot m-1)\cdot(2\cdot m-3)\cdot\ldots\cdot 1}\cdot\frac{x}{2}=\frac{(2\cdot m)!!}{(2\cdot m-1)!!}\cdot\frac{x}{2}=\frac{\left[(2\cdot m)!!\right]^2}{(2\cdot m)!}\cdot\frac{x}{2}$$

$$=\frac{4^m\cdot m!\cdot m!}{(2\cdot m)!}\cdot\frac{x}{2}=\boxed{\frac{4^m}{\binom{2\cdot m}{m}}\cdot\frac{x}{2}=\binom{m}{1/2}}$$

und daraus $\boxed{\binom{m+1}{1/2}=\frac{2^{2\cdot m+1}\cdot(m+1)}{\binom{2\cdot m}{m}\cdot(2\cdot m+1)}\cdot\frac{x}{2}}$.

Wegen $\binom{1/2}{1/2}=1$ und $\frac{\binom{3/2}{1/2}}{\binom{1/2}{1/2}}=\frac{1/2+1}{1/2+1-1/2}=\frac{3/2}{1}$ gilt auch $\binom{3/2}{1/2}=\frac{3}{2}$, $\binom{5/2}{1/2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}$,

$\binom{7/2}{1/2}=\frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}$ und allgemein

$$\binom{(2\cdot m+1)/2}{1/2}=\frac{(2\cdot m+1)!!}{(2\cdot m)!!}=\frac{(2\cdot m+1)!}{\left[(2\cdot m)!!\right]^2}=\frac{(2\cdot m+1)!}{4^m\cdot m!\cdot m!}=\boxed{\frac{2\cdot m+1}{4^m}\cdot\binom{2\cdot m}{m}=\binom{m+1/2}{1/2}}$$

und daraus $\boxed{\binom{m-1/2}{1/2}=\frac{m}{2^{2\cdot m-1}}\cdot\binom{2\cdot m}{m}}$.

Nun soll einerseits stets $\binom{n}{1/2}^2>\binom{n-1/2}{1/2}\cdot\binom{n+1/2}{1/2}$ gelten, also $x^2>\frac{n\cdot(2\cdot n+1)}{2^{8\cdot n-3}}\cdot\binom{2\cdot n}{n}^4$.

Andererseits soll auch stets $\binom{n+1/2}{1/2}^2 > \binom{n}{1/2}\cdot\binom{n+1}{1/2}$ gelten, also $x^2 < \frac{(2\cdot n+1)^3}{2^{8\cdot n-1}\cdot(n+1)}\cdot\binom{2\cdot n}{n}^4$.

Zusammen ist

$$\frac{2\cdot n}{2\cdot n+1} < \frac{x^2\cdot 2^{8\cdot n-2}}{(2\cdot n+1)^2\cdot\binom{2\cdot n}{n}^4} < \frac{(2\cdot n+1)}{2\cdot(n+1)},$$

Demnach ist $\frac{x^2\cdot 2^{8\cdot n-3}}{(2\cdot n+1)^2\cdot\binom{2\cdot n}{n}^4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, also $\boxed{x = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2\cdot n+1)\cdot\binom{2\cdot n}{n}^2}{2^{4\cdot n-1}}}$.

Zum Annäherungsterm

Der unbekannte Wert x wird angenähert durch

$$w_n := 2\cdot\frac{(2\cdot n+1)\cdot\binom{2\cdot n}{n}^2}{2^{4\cdot n}} = 2\cdot\frac{(2\cdot n+1)\cdot((2\cdot n)!)^2}{2^{4\cdot n}\cdot(n!)^4} = 2\cdot\frac{(2\cdot n+1)\cdot((2\cdot n)!)^2}{((2\cdot n)!!)^2\cdot((2\cdot n)!!)^2} = 2\cdot(2\cdot n+1)\cdot\frac{((2\cdot n-1)!!)^2}{((2\cdot n)!!)^2}$$

$$= 2\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}{(2\cdot n)\cdot(2\cdot n)} = 2\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{4\cdot i^2-1}{4\cdot i^2} \xrightarrow{n\to\infty} 2\cdot\prod_{i\ge 1}\frac{4\cdot i^2-1}{4\cdot i^2} = 2\cdot\prod_{i\ge 1}\left(1-\frac{1}{4\cdot i^2}\right)$$

Hier erinnert man sich vielleicht an die Methode von EULER zur Begründung, dass $\sum\limits_{n\ge 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ gilt; er verwendete das Sinusprodukt $\frac{\sin x}{x} = \prod\limits_{i\ge 1}\left(1-\frac{x^2}{i^2\cdot\pi^2}\right)$. Mit $x = \frac{\pi}{2}$ ist $\frac{2}{\pi} = \prod\limits_{i\ge 1}\left(1-\frac{1}{4\cdot i^2}\right)$, also $w_n \xrightarrow{n\to\infty} 2\cdot\prod\limits_{i\ge 1}\left(1-\frac{1}{4\cdot i^2}\right) = \frac{4}{\pi}$.

Man kann statt dessen auch mit den Integralen I_n arbeiten; es war $I_n = \frac{(2\cdot n)!!}{(2\cdot n+1)!!} = \sqrt{\frac{2}{(2\cdot n+1)\cdot w_n}}$ und $I_{n-1/2} = \frac{(2\cdot n-1)!!}{(2\cdot n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{w_n}{2\cdot(2\cdot n+1)}}$. Wegen der offensichtlichen Ungleichungskette

$$I_n < I_{n-1/2} < I_{n-1} \text{ bzw. } I_n^2 < I_{n-1/2}^2 < I_{n-1}^2$$

und wegen $I_n = \frac{2\cdot n}{2\cdot n+1}\cdot I_{n-1}$ ist

$$4 < \frac{\pi^2}{4}\cdot w_n^2 < \frac{(2\cdot n+1)^2}{n^2}$$

und damit $w_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4}{\pi}$.

Falls man annimmt, dass $\binom{1}{1/2} = \frac{1!}{\left(\frac{1}{2}\right)!\cdot\left(\frac{1}{2}\right)!}$ gilt, so folgt hieraus $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Das Teilresultat $\boxed{\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n+1)}{(2\cdot n)\cdot(2\cdot n)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{\pi}}$ ist nach John WALLIS (1616 – 1703) benannt. Zur numerischen Bestimmung von π ist die Konvergenz allerdings viel zu langsam.

Zur Beta-Funktion

Die Fakultäten werden durch die Gamma-Funktion interpoliert, so dass man sich fragt, ob es auch eine Funktion gibt, die die Binomialkoeffizienten interpoliert. Ja, die gibt es, und zwar die (reziproke) EULER'sche Beta-Funktion.

Substituiert man $x = 2\cdot z - 1$ in $I_n = \int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^n \cdot dx$, bekommt man

$$I_n = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-1}^{1} (1+x)^n\cdot(1-x)^n\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^1 2^n\cdot z^n\cdot 2^n\cdot(1-z)^n\cdot 2\cdot dz = 2^{2\cdot n}\cdot\int\limits_0^1 z^n\cdot(1-z)^n\cdot dz\,.$$

So ähnlich ist die B-Funktion definiert, nämlich als

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \int\limits_0^1 x^k\cdot(1-x)^{n-k}\cdot dx}\,.$$

Wir benutzen die eckige Klammer, um die Funktion von der Originaldefinition $B(a, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}\cdot dx$ zu unterscheiden. Es ist $B(a, b) = \begin{bmatrix} a+b-2 \\ a-1 \end{bmatrix}$. Die Beta-Funktion ist definiert für $n \geq -2$ und für $k \geq -1$.

Insbesondere ist $I_n = 2^{2\cdot n}\cdot\begin{bmatrix} 2\cdot n \\ n \end{bmatrix}$, also $\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\cdot I_{1/2} = \frac{\pi}{8}$.

Natürlich wüsste man jetzt gerne, was die Beta-Werte mit den Binomialkoeffizienten zu tun haben. Mit der Substitution $x = 1-y$ folgt die Symmetriebeziehung

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 x^k\cdot(1-x)^{n-k}\cdot dx = -\int\limits_1^0 (1-z)^k\cdot z^{n-k}\cdot dz = \int\limits_0^1 z^{n-k}\cdot(1-z)^k\cdot dz = \boxed{\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}}\,.$$

Die „Randwerte" sind $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 x^n\cdot dx = \frac{1}{n+1} = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ (man beachte, dass $n > -1$ vorausgesetzt wurde; n braucht jedoch nicht natürlichzahlig zu sein).

Ferner liefert die partielle Integration mit

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \int\limits_0^1 \underset{u'}{x^k}\cdot\underbrace{(1-x)^{n-k}}_{v}\cdot dx = \underbrace{\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\cdot(1-x)^{n-k}\right|_0^1}_{0} + \frac{n-k}{k+1}\cdot\int\limits_0^1 x^{k+1}\cdot(1-x)^{n-k-1}\cdot dx$$

$$= \boxed{\frac{n-k}{k+1}\cdot\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}}$$

für alle $n > k$ und $k > -1$ (die nicht natürlichzahlig zu sein brauchen) eine Möglichkeit, weitere Werte zu bestimmen:

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=1 \qquad\qquad \binom{0}{0}=1$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2};\ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2} \qquad\qquad \binom{1}{0}=1;\ \binom{1}{1}=1$$

$$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3};\ \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{6};\ \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{3} \qquad\qquad \binom{2}{0}=1;\ \binom{2}{1}=2;\ \binom{2}{2}=1$$

$$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{4};\ \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{12};\ \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{12};\ \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{4} \qquad\qquad \binom{3}{0}=1;\ \binom{3}{1}=3;\ \binom{3}{2}=3;\ \binom{3}{3}=1$$

Die analoge Beziehung für Binomialkoeffizienten lautet $\binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k}$.

Man erkennt, dass $\boxed{\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{1}{(n+1)\cdot\binom{n}{k}}}$ gilt wegen des Induktionsschritts

$$\begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix}=\frac{k+1}{n-k}\cdot\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{k+1}{n-k}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot\binom{n}{k}}=\frac{k+1}{n-k}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot\frac{k+1}{n-k}\binom{n}{k+1}}=\frac{1}{(n+1)\cdot\binom{n}{k+1}}.$$

Neben $\frac{n-k}{k+1}\cdot\begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ gibt es auch eine Rekursion bzgl. des oberen Arguments:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}&=\int_0^1 x^k\cdot(1-x)^{n+1-k}\cdot dx=\int_0^1 x^{k-1}\cdot\left(1-(1-x)\right)\cdot(1-x)^{n+1-k}\cdot dx\\&=\int_0^1 x^{k-1}\cdot(1-x)^{n+1-k}\cdot dx-\int_0^1 x^{k-1}\cdot(1-x)^{n+2-k}\cdot dx=\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}n+1\\k-1\end{bmatrix}\\&=\frac{n-k+1}{k}\cdot\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}-\frac{n+1-k+1}{k}\cdot\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}\end{aligned}$$

und daraus $\boxed{\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}=\frac{n-k+1}{n+2}\cdot\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}}$ in Analogie zu $\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{n+1-k}$.

Nun zum eigentlichen Ziel, nämlich zu Beta-Werten für Argumente, die keine natürlichen Zahlen sind:
Mit der Substitution $x=\sin^2 t$ folgt

$$\begin{bmatrix}-1\\-1/2\end{bmatrix}=\int_0^1 x^{-1/2}\cdot(1-x)^{-1/2}\cdot dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot 2\cdot\sin t\cdot\cos t\cdot dt=\pi$$

Mit Hilfe der obigen Rekursionen gewinnt man die Werte

$$\begin{bmatrix}-1\\1/2\end{bmatrix}=-\pi;\ \begin{bmatrix}0\\1/2\end{bmatrix}=\frac{\pi}{2};\ \begin{bmatrix}1\\1/2\end{bmatrix}=\frac{\pi}{8}$$ (in Übereinstimmung mit dem früheren Resultat).

Damit ist das Ziel erreicht: $\binom{1}{1/2}=\frac{1}{2\cdot\begin{bmatrix}1\\1/2\end{bmatrix}}=\frac{1}{2\cdot\pi/8}=\frac{4}{\pi}$.

Der Zusammenhang zwischen der Γ- und der B-Funktion als Grund für die Parameterverschiebung

Analog zu $\binom{u+v}{u} = \frac{(u+v)!}{u! \cdot v!}$ gilt für die originalen Gamma- und Beta-Funktionen, dass

$B(u, v) = \frac{\Gamma(u) \cdot \Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ (ein Beweis findet sich in dem erwähnten Buch von Rudin). Mit den hier verwendeten Funktionen $\Gamma(a) = \gamma(a-1)$ und $B(a, b) = \begin{bmatrix} a-1+b-1 \\ a-1 \end{bmatrix}$ hat man

$\begin{bmatrix} u-1+v-1 \\ u-1 \end{bmatrix} = \frac{\gamma(u-1) \cdot \gamma(v-1)}{\gamma(u+v-1)}$ und mit $a = u-1;\ b = v-1$ die weniger schöne Beziehung

$\begin{bmatrix} a+b \\ a \end{bmatrix} = \frac{\gamma(a) \cdot \gamma(b)}{\gamma(a+b+1)}$, die wegen $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{(n+1) \cdot \binom{n}{k}}$ für natürlichzahlige Argumente sofort verifizierbar ist.

Schlussbemerkung

Wenn man nur an der Fakultät von 1/2 interessiert ist, kann man sich natürlich mit dem Weg über die Integrale I_n bescheiden, man kann aber auch diese Frage zum Anlass nehmen, etwas weiter auszuholen und sich an einem überschaubaren Beispiel zu überlegen, wie man interpolieren kann. Die Gamma- und die Beta-Funktion sind beide hinreichend elementar, um in der Sek II Thema werden zu können, haben jedoch derart viele bemerkenswerte und weitreichende Eigenschaften (die hier alle gar nicht erwähnt wurden), so dass sich viele Mathematiker mit ihnen beschäftigt haben.