Dr. Jörg Meyer, Hameln

29. 3. 2020

Vom Goldenen Schnitt zur Fibonacci-Folge

Der Goldene Schnitt ist die positive Wurzel von $\varphi^2 = \varphi + 1$. Dann ist

$$\varphi^3 = 2 \cdot \varphi + 1; \quad \varphi^4 = 3 \cdot \varphi + 2; \quad \varphi^5 = 5 \cdot \varphi + 3; \quad \varphi^6 = 8 \cdot \varphi + 5$$

Man erkennt das (leicht mit vollständiger Induktion beweisbare) Bildungsgesetz

$$\boxed{\varphi^{n+1} = f_{n+1} \cdot \varphi + f_n},$$

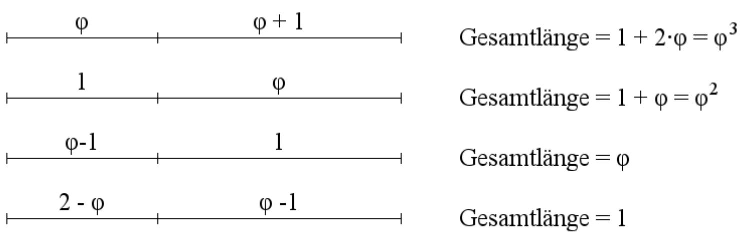
wo f_n die Glieder der FIBONACCI-Folge mit $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ mit $f_1 = f_2 = 1$ darstellen:

f_{-6}	f_{-5}	f_{-4}	f_{-3}	f_{-2}	f_{-1}	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8

Das eingekapselte Bildungsgesetz gilt auch für negative Exponenten:

$$\varphi^{-5} = 5 \cdot \varphi - 8; \quad \varphi^{-4} = -3 \cdot \varphi + 5; \quad \varphi^{-3} = 2 \cdot \varphi - 3; \quad \varphi^{-2} = -\varphi + 2; \quad \varphi^{-1} = \varphi - 1.$$

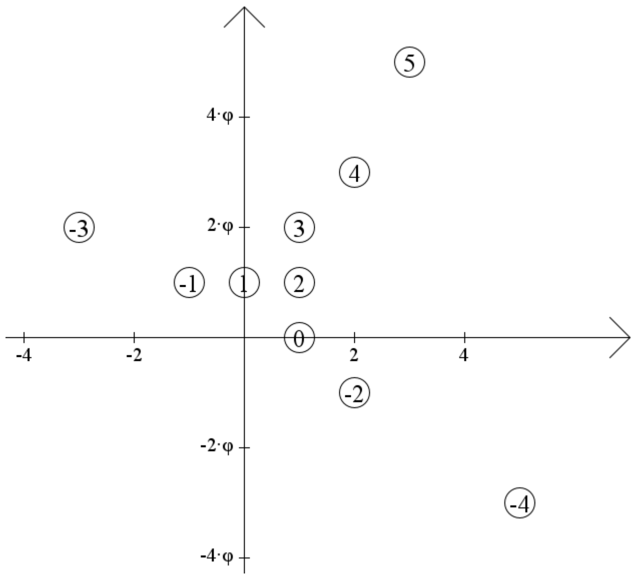
Dies spiegelt sich auch in der folgenden Graphik:



Wegen $\varphi^2 = \varphi + 1$ ist stets $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$ (auch für negative Werte von n).

In der Graphik bedeuten die Zahlen die Exponenten von φ^n.

(Lesehilfe: $\varphi^4 = 2 + 3 \cdot \varphi$)



Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ überführt $\varphi^{n+1} = f_{n+1} \cdot \varphi + f_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ in $\varphi^{n+2} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix}$, hat als charakteristische Gleichung die zum Goldenen Schnitt gehörige Gleichung und $\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi \end{pmatrix}$ als betragsgrößten Eigenvektor.

Das hört hier zunächst jäh auf. Es handelt sich um den Beginn des Hintergrundmaterials zu einem Kurs im Schülerforschungszentrum Hameln-Pyrmont, der wegen Corona jäh abgebrochen werden musste; die Fortsetzung sollte unter den Fragen stehen: Wie bekommt man Ordung in das Chaos der Graphik? Handelt es sich überhaupt im Chaos?