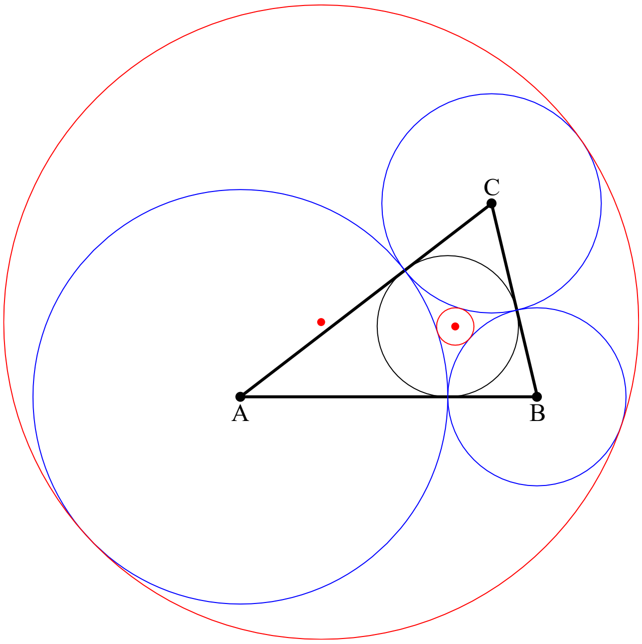
Jörg MEYER, Hameln
7. 10. 2020

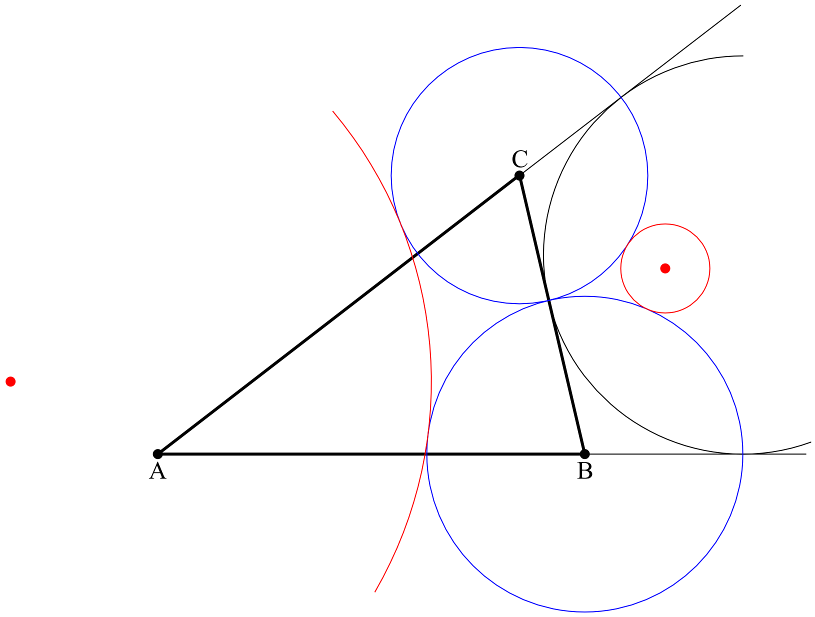
Der fehlende Kreis



In einem Dreieck liefert der Inkreis (schwarz) Anlass zu drei sich berührenden Kreisen (blau) und diese wiederum zu einem Innenkreis und einem Außenkreis (rot), die beide nach dem Chemie-Nobelpreisträger Frederick SODDY benannt werden.
Die beiden (durch einen dicken roten Punkt gekennzeichneten) Mittelpunkte der beiden SODDY-Kreise liegen auf der Geraden durch W und G; dabei ist W der Mittelpunkt des Inkreises und G der GERGONNE-Punkt als Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den Inkreis-Berührpunkten.
Mit den Dreiecksseiten a, b, c, dem (später benötigten) Inkreisradius ρ und den Ankreisradien ρ_a, ρ_b, ρ_c haben[1] W und G die baryzentrischen Koordinaten $W=(a:b:c)$ und $G=(\rho_a:\rho_b:\rho_c)$. Für den Mittelpunkt X des inneren SODDY-Kreises gilt[2] die Beziehung $WX:XG=(\rho_a+\rho_b+\rho_c):(a+b+c)$; der Mittelpunkt Y des äußeren SODDY-Kreises ist zu X bzgl. W und G harmonisch konjugiert.

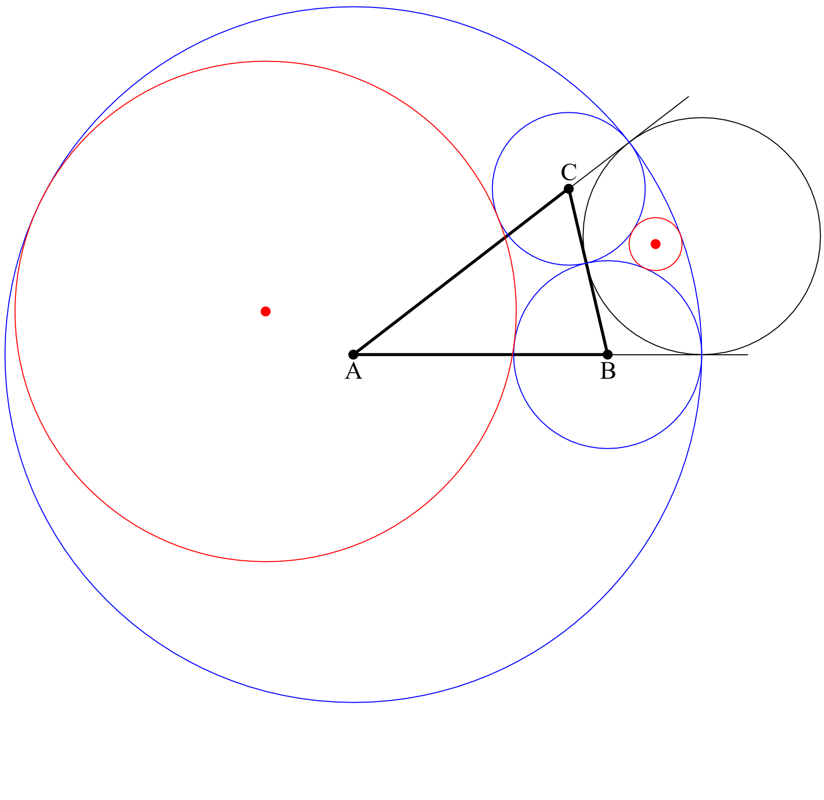
Nun ist es immer eine gute Idee, das, was man für den Inkreis erkannt hat, auf einen der Ankreise zu übertragen. Der Mittelpunkt des A gegenüber liegenden Ankreises ist $W_a=(-a:b:c)$, und die Ecktransversalen zu den Berührpunkten dieses Ankreises schneiden sich im äußeren GERGONNE-Punkt $G_a=(-\rho:\rho_c:\rho_b)$. Allerdings liefert der A-Ankreis (schwarz) nur Anlass zu *zwei* sich berührenden Kreisen (blau). Für den analog gebildeten Mittelpunkt X_a eines inneren SODDY-Kreises (rot) gilt dann $W_aX_a:X_aG_a=(-\rho+\rho_c+\rho_b):(-a+b+c)$, und der analog gebildete Mittelpunkt Y_a des äußeren SODDY-Kreises (rot) ist zu X_a bzgl. W_a und G_a harmonisch konjugiert.

[1] Alles Hintergrundmaterial findet man bei J. Meyer: Baryzentrische Dreiecksgeometrie. http://mathematik-meyer.de/Materialien/Ceva.pdf.
[2] N. Dergiades: The Soddy Circles. In: Forum Geometricorum, Vol. 7 (2007), 191–197.



Beide roten Kreise berühren die beiden blauen Kreise von außen, aber natürlich gibt es unendlich viele Kreise, die die beiden blauen Kreise von außen berühren. Daraus ergibt sich die Frage des Titels dieses kurzen Beitrags: Wo ist der dritte blaue Kreis, der die beiden roten Kreise eindeutig festlegt?

Die Antwort ist naheliegend:
Es fehlt noch der Kreis um A durch die beiden Ankreis-Berührpunkte, die A *nicht* gegenüber liegen.
Damit ist das Bild komplett.



Die Struktur ist übrigens recht reichhaltig: Die Geraden WG und W_aG_a schneiden einander im nach LONGCHAMPS benannten Punkt L, den man bekommt, wenn man den Höhenschnittpunkt H am Umkreismittelpunkt M spiegelt. Bei der nebenstehenden Graphik wurde ein stumpfwinkliges Dreieck zugrunde gelegt; bei spitzwinkligen Dreiecken sind die Winkel zwischen den Geraden zu klein.