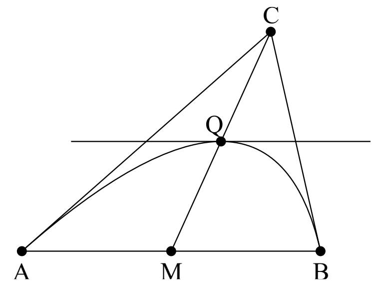
Jörg MEYER, Hameln

1.9.2021

Der Brennpunkt einer Bézier-Parabel

ABC sei ein Dreieck. Zu A, C, B gehört die quadratische Bézierkurve mit dem allgemeinen Punkt $K(t)=s^2\cdot A+2\cdot s\cdot t\cdot C+t^2\cdot B$ mit $s=1-t$. Es ist $K(0)=A$ und $K(1)=B$.

Der Richtungsvektor von $Q=K\left(\frac{1}{2}\right)$ ist $2\cdot(t-1)\cdot A+2\cdot(1-2\cdot t)\cdot C+2\cdot t\cdot B\big|_{t=\frac{1}{2}}=-A+B$,

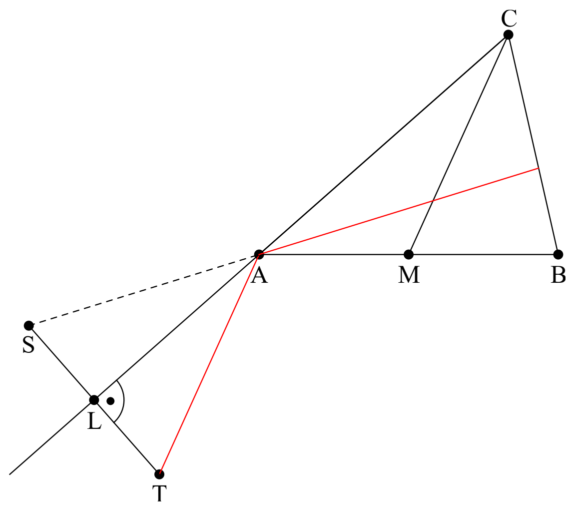


ist also zu AB parallel.

Die Gerade durch Q und durch $M=\frac{A+B}{2}$ ist als Gerade durch die Mittelpunkte zweier zueinander paralleler Sehnen parallel zur Parabelachse.

Wegen $Q=\frac{A}{4}+\frac{C}{2}+\frac{B}{4}=\frac{M+C}{2}$ halbiert Q die Strecke MC.

Die Tangente in A hat den Richtungsvektor $C-A$; die Tangente in B hat den Richtungsvektor $C-B$.



Trifft ein achsenparalleler Strahl TA in A von unten auf die Parabel, wird er so reflektiert, dass er anschließend durch den Brennpunkt geht. Spiegelt man $T=A-(C-M)$, benötigt man den Lotfußpunkt L von T auf AC. Die Normale TL hat die Gleichung $X\cdot(C-A)=T\cdot(C-A)$ und schneidet $AC: X=A+\lambda\cdot(C-A)$ für

$$\lambda=\frac{(M-C)\cdot(C-A)}{(C-A)^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(A-C+B-C)\cdot(A-C)}{b^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(A-C)^2+(B-C)\cdot(A-C)}{b^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{b+a\cdot\cos\gamma}{b}$$

in $L=A-\frac{1}{2}\cdot\frac{b+a\cdot\cos\gamma}{b}\cdot(C-A)$, , so dass man $S=2\cdot L-T=\frac{3\cdot b+2\cdot a\cdot\cos\gamma}{2\cdot b}\cdot A-\frac{B}{2}-\frac{a\cdot\cos\gamma}{b}\cdot C$ bekommt.

Damit hat die gespiegelte Gerade SA den allgemeinen Punkt

$$X(\mu)=A+\mu\cdot(S-A)=A+\frac{\mu}{2\cdot b}\cdot\left((b+2\cdot a\cdot\cos\gamma)\cdot A-b\cdot B-2\cdot a\cdot\cos\gamma\cdot C\right).$$

Analog hat die gespiegelte in B einfallende Gerade den allgemeinen Punkt

$$Y(\nu)=B+\frac{\nu}{2\cdot a}\cdot\left(-a\cdot A+(a+2\cdot b\cdot\cos\gamma)\cdot B-2\cdot b\cdot\cos\gamma\cdot C\right).$$

Man hat

$$X\left(2\cdot\sigma\cdot b^2\right)=A+\sigma\cdot\left(\left(b+2\cdot a\cdot\cos\gamma\right)\cdot b\cdot A-b^2\cdot B-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\cdot C\right)$$
$$=A\cdot\left(1+\sigma\cdot\left(b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\right)\right)-\sigma\cdot b^2\cdot B-2\cdot a\cdot b\cdot\sigma\cdot\cos\gamma\cdot C$$
$$=A\cdot\left(1+\sigma\cdot\left(2\cdot b^2+a^2-c^2\right)\right)-\sigma\cdot b^2\cdot B-2\cdot a\cdot b\cdot\sigma\cdot\cos\gamma\cdot C$$

und

$$Y\left(2\cdot\sigma\cdot a^2\right)=-\sigma\cdot a^2\cdot A+\left(\sigma\cdot\left(2\cdot a^2+b^2-c^2\right)+1\right)\cdot B-\sigma\cdot 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\cdot C\,.$$

Damit die Koeffizienten bei A übereinstimmen, muss sein:

$$1+\sigma\cdot\left(2\cdot b^2+2\cdot a^2-c^2\right)=0\,,$$

und damit die Koeffizienten bei B übereinstimmen, muss sein:

$$\sigma\cdot\left(2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2\right)+1=0\,.$$

Damit ist der Koeffizient bei A gegeben durch

$$1+\sigma\cdot\left(2\cdot b^2+a^2-c^2\right)=\frac{2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2-2\cdot b^2-a^2+c^2}{2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2}=\frac{a^2}{2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2}\,,$$

so dass der Schnittpunkt die Gestalt

$$X\left(2\cdot\sigma\cdot b^2\right)=\frac{a^2\cdot A+b^2\cdot B+2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\cdot C}{2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2}=\boxed{\frac{a^2\cdot A+b^2\cdot B+\left(a^2+b^2-c^2\right)\cdot C}{2\cdot a^2+2\cdot b^2-c^2}=:F}$$

hat.