Jörg MEYER, Hameln 15. 10. 2024

Mittelpunkts-Kegelschnitte mit gleicher Exzentrizität

Alle Kreise sind ähnlich zueinander, also nur verschieden groß. Bekanntlich sind auch alle Parabeln ähnlich zueinander. Wie steht es mit Ellipsen oder Hyperbeln?

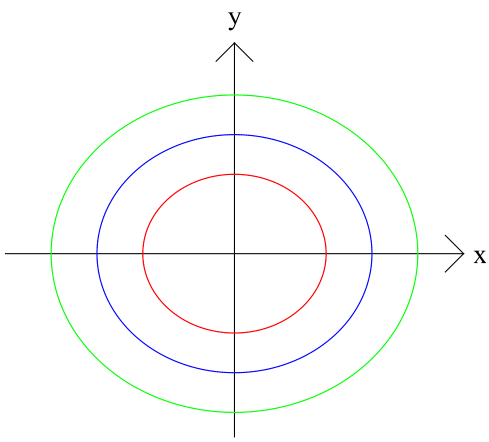
Mittelpunkts-Kegelschnitte zeichnen sich dadurch aus, dass sie einen Brennpunkt F und eine Leitlinie g haben, so dass für jeden Kurvenpunkt das Abstandsverhältnis $\frac{\text{Punkt zu Brennpunkt}}{\text{Punkt zu Leitgerade}}$ konstant ist.

Dies Verhältnis heißt (numerische) Exzentrizität ε. Die Exzentrizität ist naturgemäß positiv, für Parabeln ist $\varepsilon = 1$, für Ellipsen ist $\varepsilon < 1$ und für Hyperbeln ist $\varepsilon > 1$. Für die folgenden Überlegungen sei $\varepsilon \neq 1$ (zumal Parabeln keine Mittelpunkts-Kegelschnitte sind).

Mit der Koordinatisierung $F = \begin{pmatrix} a\cdot\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g: x = \frac{a}{\varepsilon}$ muss für jeden Kurvenpunkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Gleichung

$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\cdot\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \varepsilon^2 \cdot \left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)^2$ und damit $\boxed{x^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = a^2}$ gelten.

Ist $\varepsilon < 1$ (Ellipsenfall), so hat der allgemeine Punkt die Form $K(t) = a \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot \sin t \end{pmatrix}$; alle Ellipsen mit gleicher Exzentrizität sind also zueinander ähnlich.



Ist $\varepsilon > 1$ (Hyperbelfall), so hat der allgemeine Punkt die Form $K(t) = \frac{a}{\cos t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \end{pmatrix}$; alle Hyperbeln mit gleicher Exzentrizität sind also zueinander ähnlich.
Die Asymptoten sind gegeben durch $y = \pm\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \cdot x$; sie sind zueinander orthogonal für $\varepsilon = \sqrt{2}$.