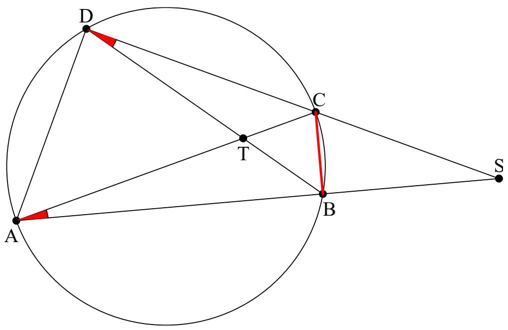
Jörg MEYER, Hameln 15. 4. 2023

Der Abstand von der Umkreismitte zu den Berührkreismitten

Es geht um einen Zugang[1] zur bekannten Formel von CHAPPLE und EULER.

Der Umkreis hat den Mittelpunkt M und den Radius R, der Inkreis den Mittelpunkt W und den Radius ρ, der A gegenüber liegende Ankreis den Mittelpunkt W_a und den Radius ρ_a.

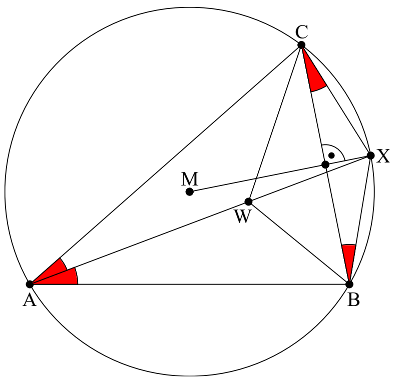
Erste Vorbemerkung: Der Sehnensatz



Die beiden Kreissehnen AC und BD schneiden sich in T. Aufgrund des Umfangswinkelsatzes sind die Dreiecke TCD und ABT zueinander ähnlich, also ist $\frac{DT}{AT} = \frac{TC}{TB}$ bzw. $\boxed{AT \cdot TC = BT \cdot TD}$.

Der Sehnenschnittpunkt kann auch außerhalb des Kreises liegen:
Die Dreiecke SCA und BSD sind zueinander ähnlich, so dass $\frac{CS}{BS} = \frac{AS}{DS}$ gilt bzw. $\boxed{SC \cdot SD = SB \cdot SA}$.

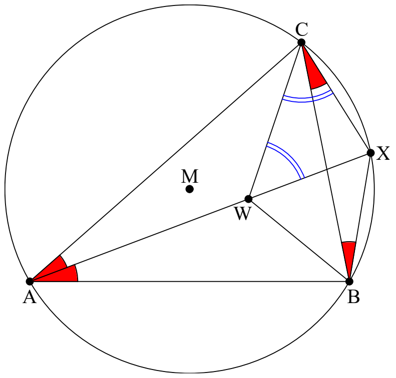
Zweite Vorbemerkung: Beobachtung an Winkelhalbierenden



Verlängert man AW bis zum Schnittpunkt X mit dem Umkreis, so entsteht mit CBX ein gleichschenkliges Dreieck.
Da aufgrund des Satzes vom Südpol auch die Mittelsenkrechte zu BC durch X verläuft, lässt sich

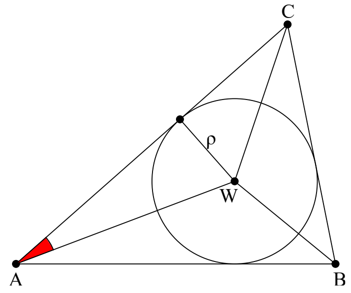
$$CX = \frac{a/2}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{R \cdot \sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}} = R \cdot \frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2 \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

berechnen.



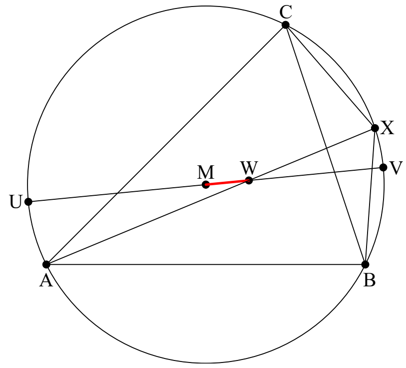
Die blauen Winkel haben beide die Größe $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, daher ist $XC = XW$, und C, W und B liegen auf einem Kreis um X mit dem Radius $XW = XB = XC = 2 \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

[1] angeregt durch Yiu 2005, Elegant Geometric Constructions, in: Forum Geometricorum **5**, 75–96. Weitere synthetische Beweise finden sich in Müller-Sommer 2022: Entdeckungen im Umfeld der Abstandsformel von EULER und CHAPPLE, in: Der Mathematikunterricht **68** (4), 17-31.



Stets ist $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{AW}$ und damit

$XW = XB = XC = 2 \cdot R \cdot \frac{\rho}{AW}$ bzw. $\boxed{AW \cdot XW = 2 \cdot \rho \cdot R}$.



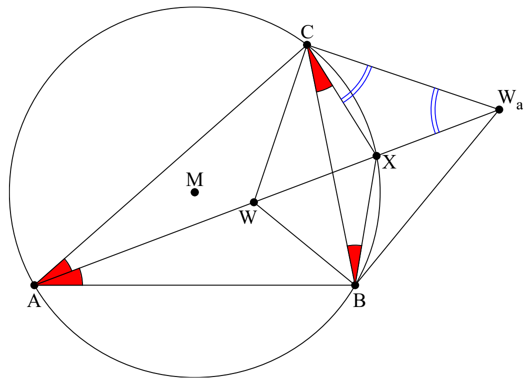
Nach diesen Vorbereitungen kommt endlich MW ins Spiel. Es ist

$AW \cdot WX = UW \cdot WV = (R + MW) \cdot (R - MW) = R^2 - MW^2$,

und da die linke Seite den Wert $2 \cdot \rho \cdot R$ hat, folgt das Ergebnis

$$\boxed{MW^2 = R^2 - 2 \cdot \rho \cdot R}.$$

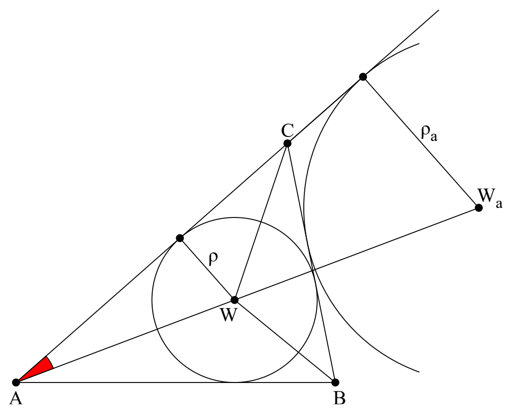
Die Vorgehensweise lässt sich übertragen auf den Abstand zwischen Umkreismitte M und Ankreismitte W_a:



Weiterhin ist CBX gleichschenklig. Da WC auf W_aC senkrecht steht, haben die beiden blauen Winkel die Größe $\frac{\beta}{2}$, so dass

$XC = XB = XW_a = 2 \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ ist.

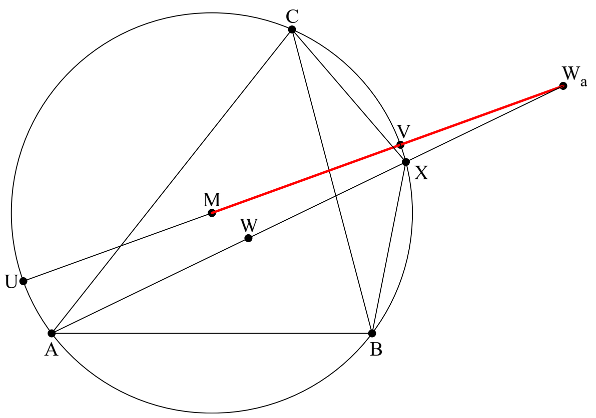
C, W, B, W_a liegen auf einem Kreis um X; insbesondere halbiert X die Strecke WW_a.



Stets ist $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_a}{AW_a}$ und damit

$XW_a = XB = XC = 2 \cdot R \cdot \frac{\rho_a}{AW_a}$ oder

$$\boxed{W_aX \cdot W_aA = 2 \cdot \rho_a \cdot R}.$$



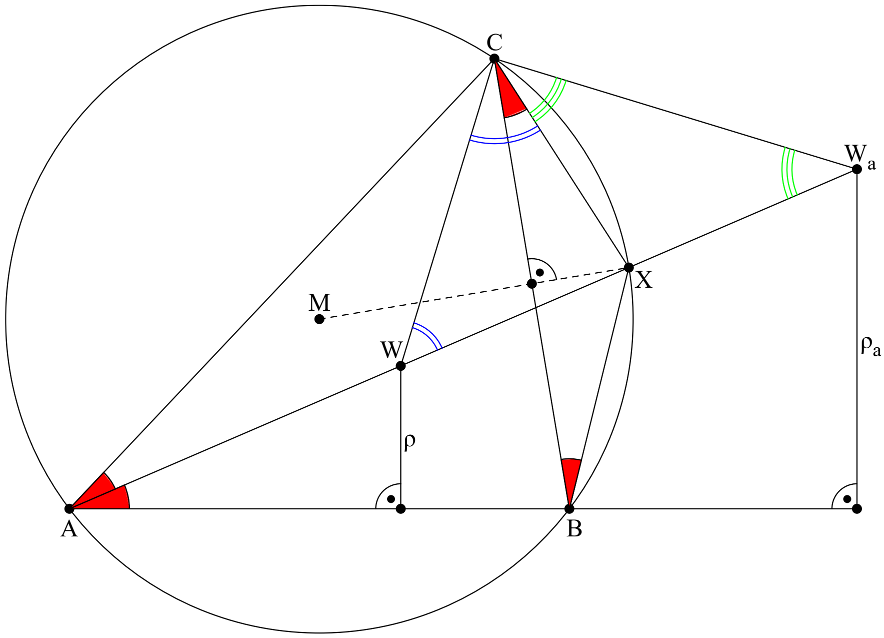
Es ist

$$\begin{aligned} W_aA \cdot W_aX = W_aU \cdot W_aV \\ &= \left(R + MW_a\right) \cdot \left(MW_a - R\right), \\ &= MW_a^2 - R^2 \end{aligned}$$

und da die linke Seite den Wert $2 \cdot \rho_a \cdot R$ hat, folgt das Ergebnis

$$\boxed{MW_a^2 = R^2 + 2 \cdot \rho_a \cdot R}.$$

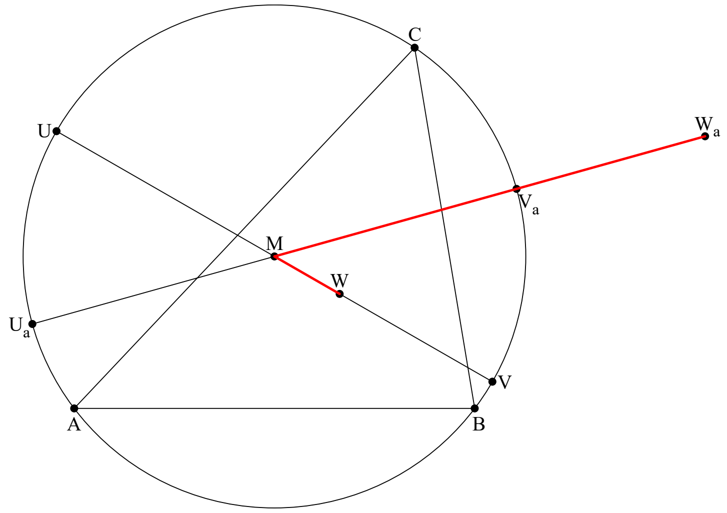
Hier sieht man eine Zusammenfassung:



Die roten Winkel sind $\frac{\alpha}{2}$, die blauen $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ und die grünen $\frac{\beta}{2}$.

Daher $XC = XW = XB = XW_a$. Im Dreieck CBX ferner $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{CX} = \frac{a/2}{WX} = \frac{R \cdot \cos\alpha}{WX} = R \cdot \frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{WX}$

und daraus $WX = 2 \cdot R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot R \cdot \frac{\rho}{WA} = 2 \cdot R \cdot \frac{\rho_a}{W_aA}$, also $WX \cdot WA = 2 \cdot \rho \cdot R$ und $W_aX \cdot W_aA = 2 \cdot \rho_a \cdot R$.



Dann ist

$$
\begin{aligned}
&WU \cdot WV \\
&= (R + MW) \cdot (R - MW) \\
&= R^2 - MW^2
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&W_aU_a \cdot W_aV_a \\
&= (MW_a + R) \cdot (MW_a - R) \\
&= MW_a^2 - R^2
\end{aligned}
$$

Mit dem Sehnensatz folgt das Ergebnis.