Jörg MEYER, Hameln 13. 11. 2024

Zur „schönsten Gleichung der Mathematik“ und deren Umfeld

Inhalt

Ein Weg zur EULER-Formel 1
Polarform und Potenzen 2
Einheitswurzeln 2
Abbildungen mit der Exponentialfunktion 3
Periodizität 3
cosh und sinh 4
Warum hyperbolicus? 5

Es geht um die EULER-Formel $e^{i\cdot t}=\cos t+i\cdot\sin t$ sowie um die damit zusammenhängenden Funktionen sinh und cosh.

Ein Weg zur EULER-Formel

Man kennt e^x für reelle x; dieser Ausdruck lässt sich besonders leicht ableiten.

Hat auch der Ausdruck e^i einen Sinn? Selbst wenn man die Exponentialreihe $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ für reelle x kennt, liefert das formale Einsetzen von i für x eher Ratlosigkeit.

Mitunter ist es hilfreich, ein Problem in einen etwas größeren Kontext zu stellen: Wir suchen nicht nur e^i, sondern fragen nach der „Bedeutung“ von $e^{i\cdot t}$ für reelle t. Dadurch wird das Ausgangsproblem nur auf den ersten Blick komplizierter, aber man hat nun mehr Möglichkeiten, mit dem fraglichen Term etwas herumzuspielen. Beispielsweise könnte man ihn ableiten unter der Voraussetzung, dass alle „reellen Ableitungsregeln“ weiterhin gelten.

Der Ausdruck $e^{i\cdot t}$ wird wohl eine komplexe Zahl sein, sich also schreiben lassen als $e^{i\cdot t}=f(t)+i\cdot g(t)$ mit von t abhängigen reellen Funktionen f und g.

Die Ableitung der letzten Gleichung liefert $i\cdot e^{i\cdot t}=f'(t)+i\cdot g'(t)$, und wenn man noch einmal ableitet, bekommt man $-1\cdot e^{i\cdot t}=f''(t)+i\cdot g''(t)$, also zusammen mit der Ausgangsgleichung $f(t)+i\cdot g(t)=-f''(t)-i\cdot g''(t)$. Nun müssen Real- und Imaginärteile jeweils übereinstimmen, was auf $f''(t)=-f(t)$ und $g''(t)=-g(t)$ führt. Dies sind zwei Differentialgleichungen mit den Lösungen $\sin t$ und $\cos t$ mit t im Bogenmaß.

Bedenkt man noch, dass $e^{i\cdot 0}=f(0)+i\cdot g(0)$ ist, also $f(0)=1$ und $g(0)=0$ sein muss, hat man die Lösung des Ausgangsproblems: Es ist $\boxed{e^{i\cdot t}=\cos t+i\cdot\sin t}$. Diese Formal hat weitreichende Konsequenzen; sie stammt von Leonhard EULER (1707–1783).

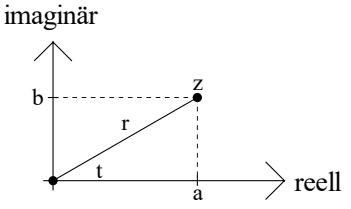
Setzt man $t=1$, bekommt man das nicht besonders schöne Resultat $e^i=\cos 1+i\cdot\sin 1$; es hatte also schon Sinn, nicht direkt nach e^i, sondern gleich nach $e^{i\cdot t}$ zu fragen.

Interessanter ist es, $t=\pi$ zu setzen mit dem Resultat $\boxed{e^{i\cdot\pi}=\cos\pi+i\cdot\sin\pi=-1}$, eine Beziehung, die oftmals als „schönste Formel der Mathematik“ bezeichnet wird, da sie e, π und i miteinander verknüpft.

Polarform und Potenzen

Man kann jede komplexe Zahl $z=a+i\cdot b$ auch schreiben kann als

$$\boxed{z=r\cdot(\cos t+i\cdot\sin t)=r\cdot e^{i\cdot t}}$$



mit $r=\sqrt{a^2+b^2}$ und $\tan(t)=\frac{b}{a}$.

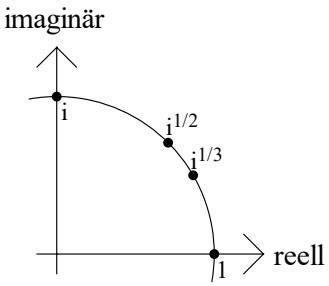
Der Winkel t heißt ***Argument*** von z und wird mit $\arg(z)$ bezeichnet.

Insbesondere ist $(\cos t+i\cdot\sin t)^n=\left(e^{i\cdot t}\right)^n=e^{i\cdot n\cdot t}=\cos(n\cdot t)+i\cdot\sin(n\cdot t)$, also

$$\boxed{(\cos t+i\cdot\sin t)^n=\cos(n\cdot t)+i\cdot\sin(n\cdot t)}.$$

Die Potenzen von komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 liegen daher auf einem Kreis; dabei muss n nicht natürlichzahlig sein.

(Dies liefert neben $(1+i)^2=2\cdot i$ einen anderen Zugang zu $\sqrt{i}$.)

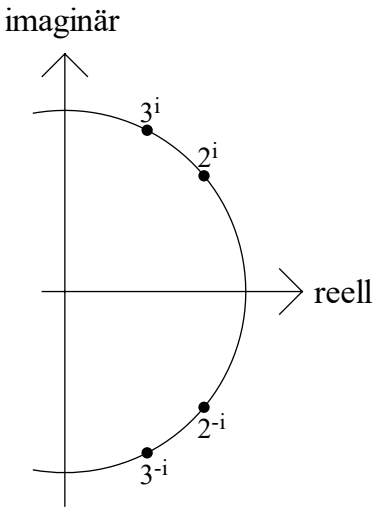


Kennt man $e^{i\cdot t}$, so kennt man wegen $e^{a+b\cdot i}=e^a\cdot e^{b\cdot i}$ auch den Wert der Exponentialfunktion für jedes komplexe Argument. Insbesondere gilt auch:

$2^i=e^{i\cdot\ln 2}=\cos(\ln 2)+i\cdot\sin(\ln 2)$. Wegen $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$ ist

$$\left(\frac{1}{2}\right)^i=2^{-i}=e^{-i\cdot\ln 2}=\cos(-\ln 2)+i\cdot\sin(-\ln 2)$$
$$=\cos(\ln 2)-i\cdot\sin(\ln 2)$$

Daher liegen 2^i und $\left(\frac{1}{2}\right)^i$ spiegelbildlich zur reellen Achse.



Einheitswurzeln

Die zweiten Einheitswurzeln sind die Lösungen von $x^2=1$ bzw. $0=x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$, also 1 und -1.

Die vierten Einheitswurzeln sind die Lösungen von $x^4=1$ bzw.
$0=x^4-1=\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2+1\right)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-i)\cdot(x+i)$, also 1, -1, i und -i.

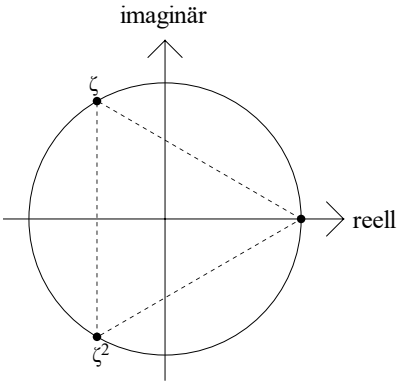
Die dritten Einheitswurzeln sind die Lösungen von $x^3 = 1$ bzw. $0 = x^3 - 1 = (x-1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)$,

also 1 sowie $\zeta = \frac{-1 + i\cdot\sqrt{3}}{2}$ und $\zeta^2 = \frac{-1 - i\cdot\sqrt{3}}{2}$.

Die beiden letzten Lösungen schreiben sich auch als $\zeta = \cos 120° + i\cdot\sin 120°$ und

$\zeta^2 = \cos 240° + i\cdot\sin 240°$.

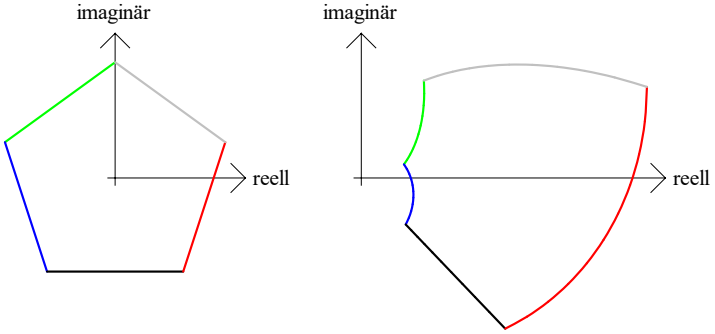
Es ist $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$.



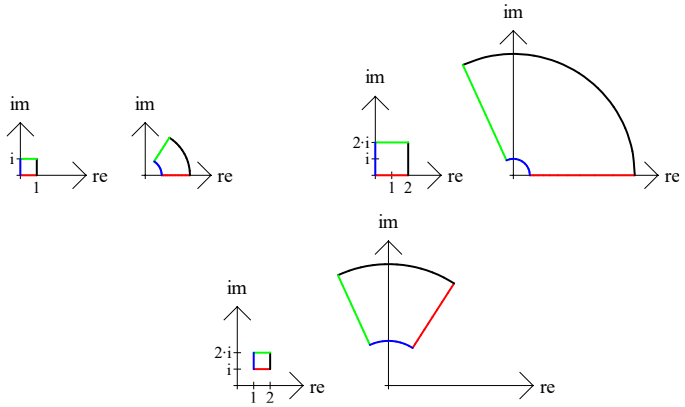
Analog bekommt man die 4., 5., … Einheitswurzeln.

Abbildungen mit der Exponentialfunktion

Interessant ist es, n-Ecke in der komplexen Ebene mit der Exponentialfunktion abzubilden. Rechts sieht man das Bild eines regelmäßigen Fünfecks.



Rechts sind Quadrate verschiedener Größe bzw. an unterschiedlichen Stellen.



Periodizität

Da sin und cos periodisch sind, ist auch $e^{i\cdot t}$ periodisch, d.h. (mit t im Bogenmaß):

$$e^{i\cdot t} = e^{i\cdot t + i\cdot 2\cdot\pi} = e^{i\cdot t + i\cdot k\cdot 2\cdot\pi} \text{ mit ganzzahligem k,}$$

was zu Problemen beim Logarithmus führt:

Im Reellen gilt: . Für $b^x = w$ ist $x = \log_b w$. Diese Beziehung sollte auch im Komplexen gelten.

Komplexe Zahlen schreiben sich als $z = r\cdot(\cos t + i\cdot\sin t) = r\cdot e^{i\cdot t}$ mit t im Bogenmaß, also als

$z = e^{\ln r}\cdot e^{i\cdot t} = e^{\ln r + i\cdot t + i\cdot k\cdot 2\cdot\pi}$ für ganzzahliges k.

Der natürliche Logarithmus $\ln z = \ln r + i\cdot t + i\cdot k\cdot 2\cdot\pi$ ist daher i.a. nicht eindeutig bestimmbar.

Wegen $i = 1 + i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{i \cdot \pi/2} = e^{i \cdot \pi/2 + i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi}$ ist etwa $\ln i$ nicht eindeutig bestimmbar.

Gleichwohl kann man Aussagen treffen: Es ist $i^i = e^{i \cdot \ln i} = e^{i \cdot (i \cdot \pi/2 + i \cdot k \cdot 2 \cdot \pi)} = e^{-\frac{\pi}{2} \cdot (1 + 4 \cdot k)}$. Das ist überraschenderweise für alle k eine reelle Zahl!

cosh und sinh

Man sieht noch mehr: Wegen

$$e^{i \cdot t} = \cos t + i \cdot \sin t$$
$$e^{-i \cdot t} = \cos(-t) + i \cdot \sin(-t) = \cos t - i \cdot \sin t$$

Ist

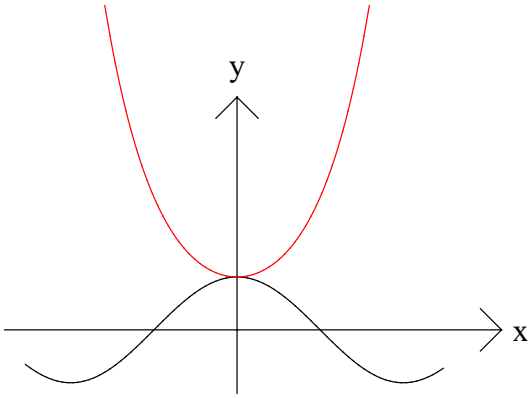
$$\boxed{\sin t = \frac{e^{i \cdot t} - e^{-i \cdot t}}{2 \cdot i}}; \quad \boxed{\cos t = \frac{e^{i \cdot t} + e^{-i \cdot t}}{2}}.$$

Dann ist

$$\boxed{\sin(i \cdot t) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2 \cdot i}}; \quad \boxed{\cos(i \cdot t) = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2}},$$

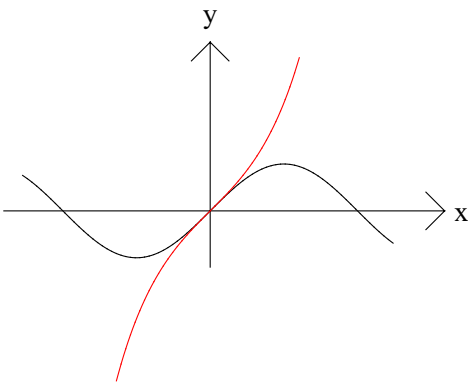
und die rechte Seite von $\cos(i \cdot t)$ ist reell!!!

Man nennt $\cos(i \cdot t) = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \cosh t$ den ***Cosinus hyperbolicus*** (roter Graph).



Eine hängende Kette hat ***nicht*** die Form einer Parabel, sondern die Form des Cosinus hyperbolicus und heißt daher auch *Kettenlinie*.

Es gibt auch einen ***Sinus hyperbolicus***, der durch $\sin(i \cdot t) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2 \cdot i} = i \cdot \sinh t$, also durch $\sinh t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$ definiert ist und nicht einfach den Sinus „fortsetzt“.
Rechts ist der Graph des sinh rot und der Graph des sin schwarz.



Zusammenfassung:

$$\sin t = \frac{e^{i\cdot t} - e^{-i\cdot t}}{2\cdot i};\ \cos t = \frac{e^{i\cdot t} + e^{-i\cdot t}}{2};\ \sinh t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2};\ \cosh t = \frac{e^{t} + e^{t}}{2}$$

$$\sin(i\cdot t) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2\cdot i} = i\cdot\sinh t;\ \cos(i\cdot t) = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} = \cosh t$$

Warum hyperbolicus?

Die zum Winkel α gehörigen Punkte auf dem Einheitskreis mit $x^2 + y^2 = 1$ werden durch $\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ beschrieben; entsprechend ist $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

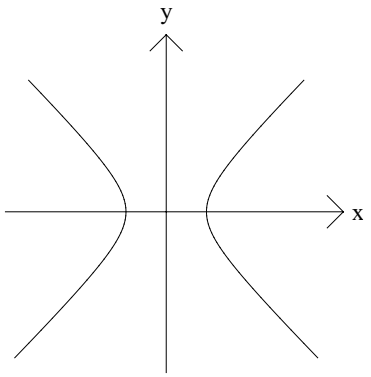
Man rechnet nach, dass

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{e^{2\cdot t} + 2 + e^{-2\cdot t} - \left(e^{2\cdot t} - 2 + e^{-2\cdot t}\right)}{4} = 1$$

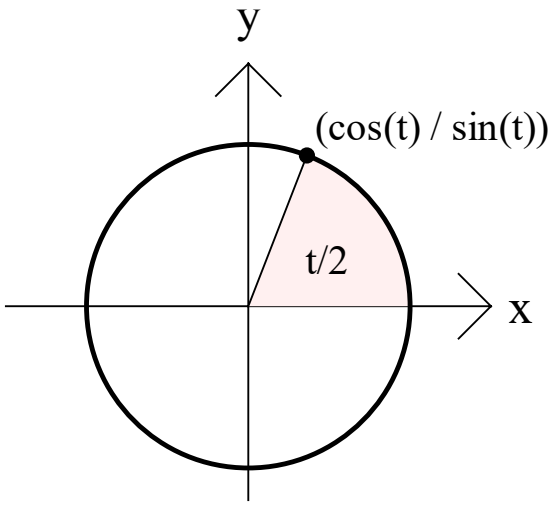
gilt.

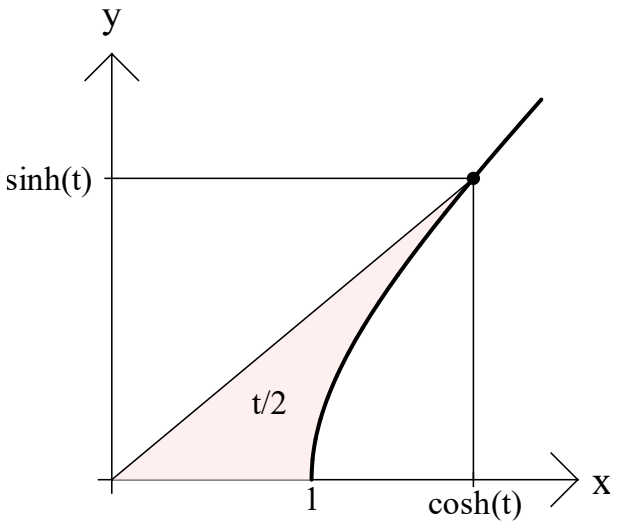
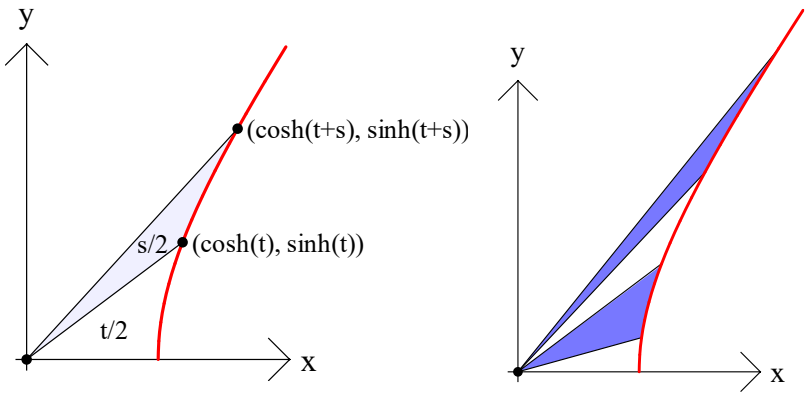
Die Punkte $\begin{pmatrix}\pm\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix}$ beschreiben eine ***Hyperbel*** mit der Gleichung $\boxed{x^2 - y^2 = 1}$.

Allerdings ist t kein Winkel mehr, sondern ein Flächeninhalt:



Mit t im Bogenmaß gilt:





Damit haben die blauen Flächen ganz rechts alle denselben Inhalt.