Jörg MEYER, Hameln Letzte Änderung: 26. 1. 2025

Elementar-Geometrie mit komplexen Zahlen

Inhalt

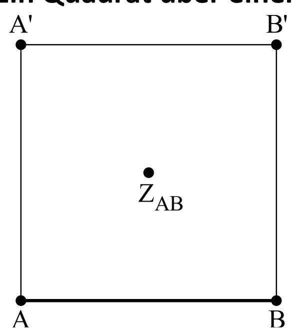
Einleitung und Notation

Manche Sätze der Elementar-Geometrie lassen sich mit Hilfe der komplexen Zahlen recht einfach beweisen bzw. verallgemeinern. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass die Multiplikation mit i eine Drehung um den Ursprung um 90° gegen den Uhrzeigersinn bedeutet.

Zur ***Notation***: Jedem Punkt $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Ebene entspricht die komplexe Zahl $p=x+i\cdot y$. Wir schreiben: $P \triangleq p$. Der Drehung von Punkt $A \triangleq a$ um den Ursprung entspricht die Abbildung $a \mapsto i\cdot a$.

Der Drehung von Punkt $A \triangleq a$ um $Z \triangleq z$ entspricht die Abbildung $a-z \mapsto i\cdot(a-z)$, also $a \mapsto z+i\cdot(a-z)$. Dreht man im Uhrzeigersinn, bekommt man $a \mapsto z-i\cdot(a-z)$.

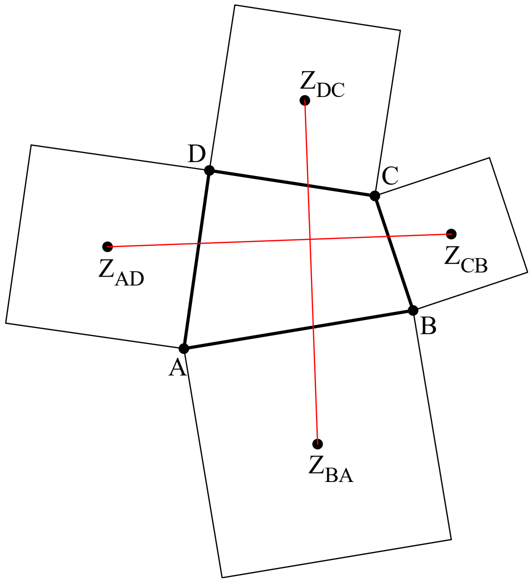
Ein Quadrat über einer Strecke



Es ist

$$A' \triangleq a+i\cdot(b-a)$$
$$B' \triangleq b-i\cdot(a-b)$$
$$2\cdot Z_{AB} \triangleq a+b+i\cdot(b-a)$$

Der Satz von VAN AUBEL: Quadrate über Vierecksseiten



Über den Seiten eines beliebigen Vierecks ABCD in der komplexen Ebene werden über den Seiten nach außen Quadrate errichtet. Wegen

$$2 \cdot Z_{BA} \triangleq a+b+i \cdot (a-b)$$
$$2 \cdot Z_{DC} \triangleq c+d+i \cdot (c-d)$$
$$2 \cdot Z_{AD} \triangleq a+d+i \cdot (d-a)$$
$$2 \cdot Z_{CB} \triangleq c+b+i \cdot (b-c)$$

ist

$$2 \cdot Z_{CB} - 2 \cdot Z_{AD} \triangleq c+b-a-d+i \cdot (b-c-d+a)$$
$$2 \cdot Z_{DC} - 2 \cdot Z_{BA} \triangleq d+c-a-b+i \cdot (c-d-a+b)$$

und daher

$$i \cdot (z_{CB} - z_{AD}) = z_{DC} - z_{BA} \,.$$

Die beiden roten Strecken sind daher zueinander senkrecht und von gleicher Länge.
Dies ist der (für jedes Viereck gültige) Satz von Henricus VAN AUBEL.[1] Der Vorteil eines analytischen Beweises gegenüber einem synthetischen liegt darin, dass er auch für konkave oder ausgeartete Vierecke seine Gültigkeit behält. Synthetisch müsste man dann stets eine neue Figur heranziehen[2].

Der Satz von VAN AUBEL lässt sich nur unter speziellen Voraussetzungen auf den Fall übertragen, dass man die aufgesetzten Quadrate durch aufgesetzte regelmäßige n-Ecke ersetzt[3].

[1] Andere (aufwändigere) Beweise (ohne komplexe Zahlen) dieses und einiger der folgenden Sätze finden sich in J. Meyer: Zwei Quadrate mit einem gemeinsamen Eckpunkt. In: Der Mathematikunterricht 69(3) (August 2023), S. 37-48.
[2] http://mathematik-meyer.de/Materialien/AubelVektor.pdf
[3] http://mathematik-meyer.de/Materialien/AubelVar.pdf

Quadrate über Parallelogrammseiten

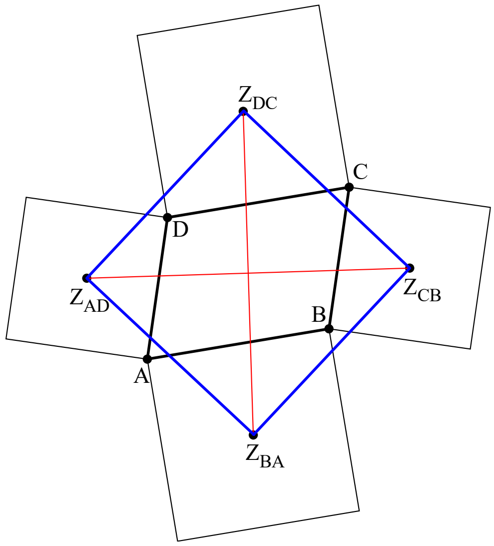
Ist das Ausgangsviereck sogar ein Parallelogramm, so ist

$$a-b=d-c$$
$$b-c=a-d$$

und daher

$$2\cdot Z_{BA}-2\cdot Z_{AD}\triangleq b-d+i\cdot(2\cdot a-b-d)=b-d+i\cdot(a-c)$$
$$2\cdot Z_{BA}-2\cdot Z_{CB}\triangleq a-c+i\cdot(a-2\cdot b+c)=a-c+i\cdot(d-b)$$

usw., daher sind die blauen Strecken zueinander senkrecht und von gleicher Länge, bilden also ein Quadrat.



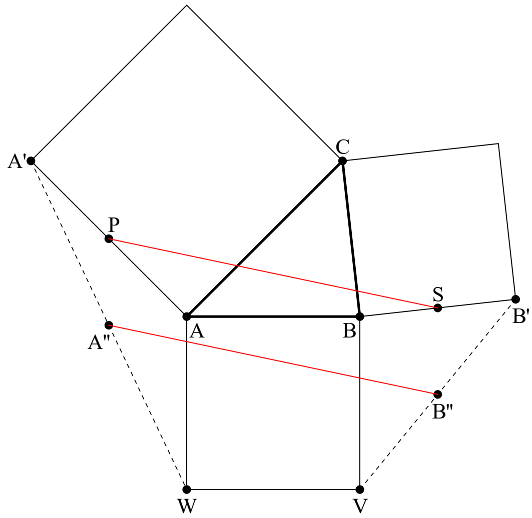
Quadrate über Dreiecksseiten

Mit den Bezeichnungen wie in der Graphik ist wegen

$$B'\triangleq b+i\cdot(b-c)$$
$$A'\triangleq a+i\cdot(c-a)$$
$$V\triangleq b+i\cdot(a-b)$$
$$W\triangleq a+i\cdot(a-b)$$

$$2\cdot(B''-A'')=V+B'-W-A'\triangleq 2\cdot(b-a)+i\cdot(a+b-2\cdot c)$$
$$2\cdot(S-P)=B+B'-A-A'\triangleq 2\cdot(b-a)+i\cdot(a+b-2\cdot c)$$

Beide rote Strecken sind also zueinander parallel und von gleicher Länge.



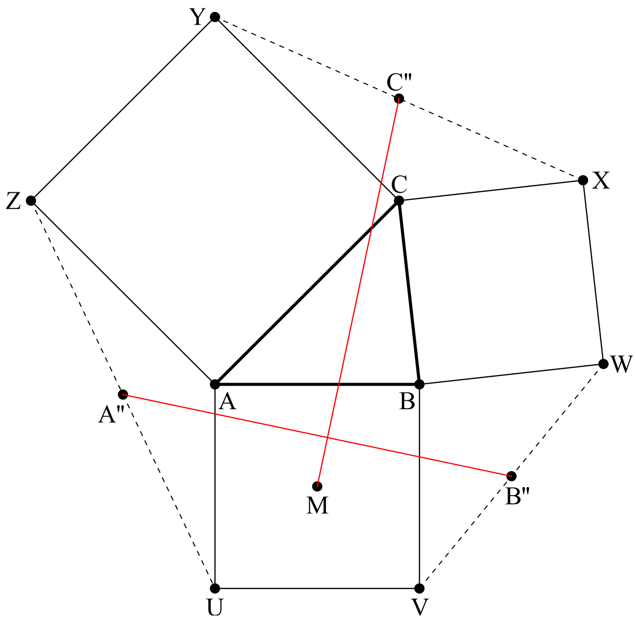
In der Graphik ist

$$U\triangleq a+i\cdot(a-b);\ V\triangleq b+i\cdot(a-b)$$
$$W\triangleq b+i\cdot(b-c);\ X\triangleq c+i\cdot(b-c)$$
$$Y\triangleq c+i\cdot(c-a);\ Z\triangleq a+i\cdot(c-a)$$

und deshalb

$$2\cdot(A''-B'')=Z+U-V-W$$
$$\triangleq 2\cdot(a-b)+i\cdot(2\cdot c-a-b)$$
$$2\cdot(C''-M)=X+Y-A-V$$
$$\triangleq 2\cdot c-a-b+i\cdot(2\cdot b-2\cdot a)$$

Daher sind die roten Strecken zueinander senkrecht und von gleicher Länge.



Wegen

$$D \triangleq b - i\cdot(c-b);\; F \triangleq c + i\cdot(b-c)$$
$$G \triangleq c - i\cdot(a-c);\; E \triangleq a + i\cdot(c-a)$$

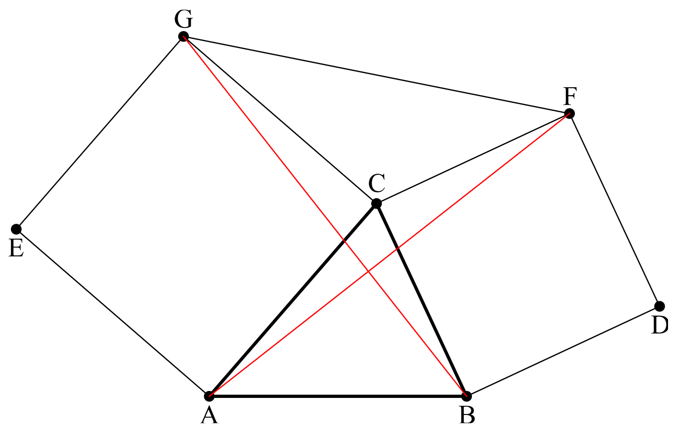
ist

$$F - A \triangleq c - a + i\cdot(b-c)$$
$$G - B \triangleq c - b - i\cdot(a-c)$$

und daher

$$g - b = i\cdot(f-a).$$

AF und BG haben daher gleiche Länge und sind zueinander orthogonal.



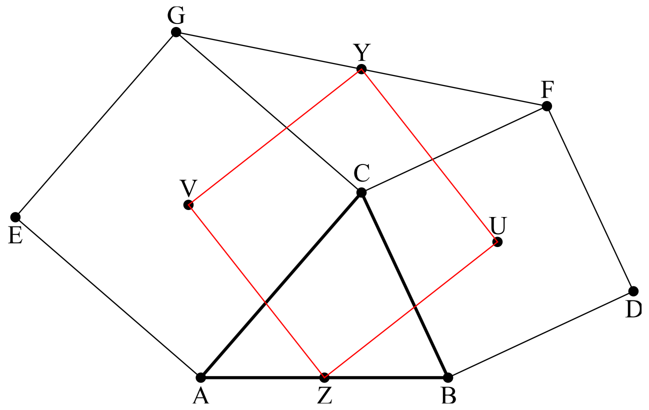
Sind U und V die Quadrat-Mittelpunkte und Z der Mittelpunkt von AB, so ist

$$2\cdot(U-Z) \triangleq (f+b)-(a+b) = f - a \triangleq F - A$$
$$2\cdot(V-Z) \triangleq (g+a)-(a+b) = g - b \triangleq G - B.$$

Daher sind ZU und ZV von gleicher Länge und zueinander orthogonal. Ferner ist

$$2\cdot(V-Y) \triangleq (a+g)-(g+f) = a - f \triangleq A - F$$
$$2\cdot(U-Y) \triangleq (b+f)-(f+g) = b - g \triangleq B - G$$

Daher ist ZUYV ein Quadrat.



Dieser Sachverhalt wurde von Joseph NEUBERG (1840-1926) gefunden[4].

Wegen

$$D \triangleq b - i\cdot(c-b);\; F \triangleq c + i\cdot(b-c)$$
$$G \triangleq c - i\cdot(a-c);\; E \triangleq a + i\cdot(c-a)$$
$$K \triangleq a - i\cdot(b-a);\; L \triangleq b + i\cdot(a-b)$$

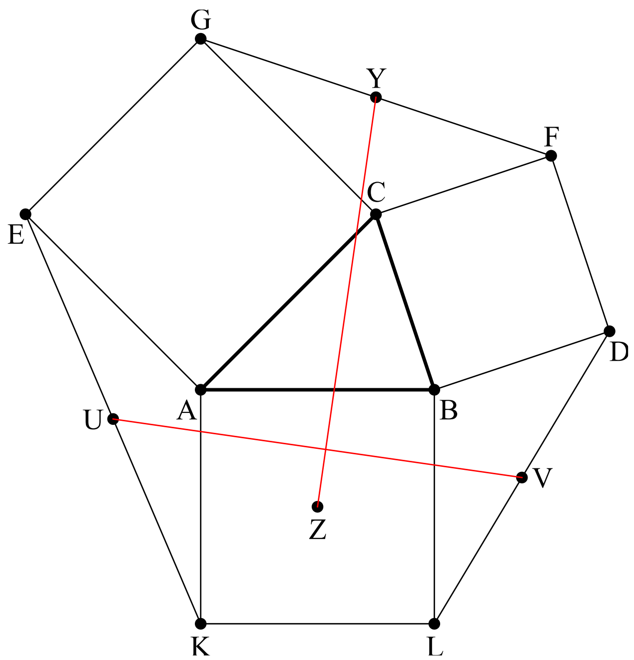
ist

$$2\cdot(Y-Z) = F + G - (B+K)$$
$$\triangleq 2\cdot c - a - b + 2\cdot i\cdot(b-a)$$

und

$$2\cdot(U-V) = E + K - D - L$$
$$\triangleq 2\cdot(a-b) + i\cdot(2\cdot c - a - b)$$

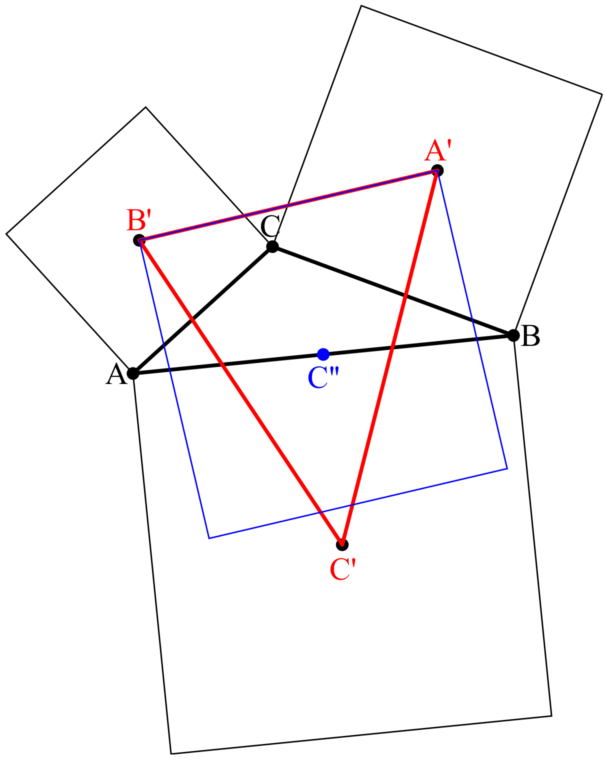
und daher sind Y-Z und U-V zueinander orthogonal und haben die gleiche Länge.



[4] Neuberg J. (1878): Quelques propriétés du triangle. In: Nouvelle Correspondance de Mathématiques IV, 142-145, n° 4; insbesondere S. 143.

Ein weiterer Satz von NEUBERG

Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks ABC nach außen Quadrate, so bilden deren Mittelpunkte A', B', C' wieder ein Dreieck. Errichtet man über dessen Dreiecksseiten nach **innen** Quadrate, so liegen deren Mittelpunkte auf den Mittelpunkten der Seiten von ABC[5].



Hier ist schon die Skizze unübersichtlich, daher wird nur das Innenquadrat über A'B' gezeichnet. Aber der Beweis ist einfach: Nach Obigem ist

$$2\cdot a' = b + c + i\cdot(b - c)$$

$$2\cdot b' = c + a + i\cdot(c - a)$$

$$2\cdot c' = a + b + i\cdot(A - b)$$

und analog nach leichter Rechnung

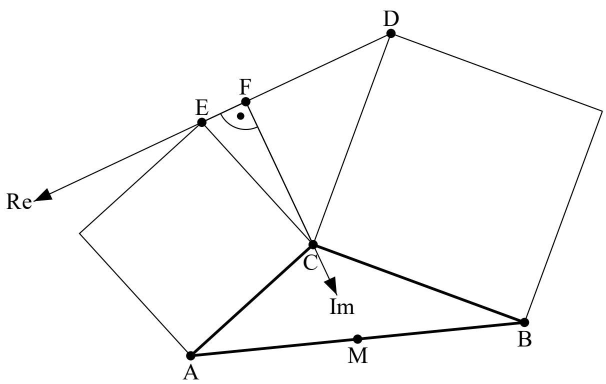
$$4\cdot c'' = a' + b' - i\cdot(a' - b') = 2\cdot a + 2\cdot b\,,$$

was die Behauptung beweist.

Höhen und Seitenhalbierende

Die folgende Aufgabe[6] setzt Höhen und Seitenhalbierende in Beziehung und macht wieder eine Aussage über Quadrate; sie ist etwas anspruchsvoller, da das Koordinatensystem erst passend gewählt werden sollte:

Es sei ABC ein Dreieck in der komplexen Ebene, über BC und CA werden nach außen Quadrate angetragen, deren „innere“ Eckpunkte D und E seien. Ist F der Lotpunkt von C auf DE und M der Mittelpunkt von AB, so sind F, C und M kollinear.

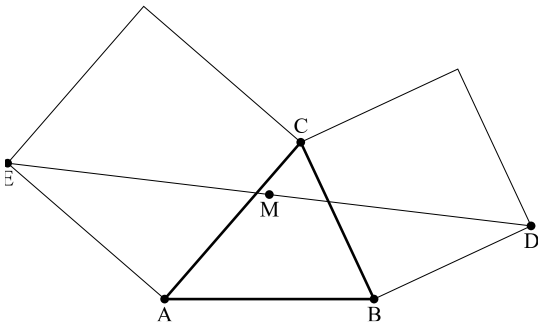


Der Ursprung sei F, FE sei die reelle Achse und FC die imaginäre Achse[7]. Wir suchen A und B. Dreht man E um C im Uhrzeigersinn, bekommt man $e \mapsto c + i\cdot(e - c) = a \triangleq A$.

Dreht man D um C gegen den Uhrzeigersinn, bekommt man $d \mapsto c - i\cdot(d - c) = b \triangleq B$. Der Mittelpunkt von A und B ist $M \triangleq \frac{a+b}{2} = \frac{c + i\cdot(e-c) + c - i\cdot(d-c)}{2} = c + i\cdot\frac{e-d}{2}$; M liegt offensichtlich auf der imaginären Achse.

[5] R. Honsberger (1991): More Mathematical Morsels, morsel 21. MAA.
[6] Warburton, I. (1996): Bride's chair revisited again! In: Mathem. Gazette **80**, S. 557-558.
[7] Idee: Andreescu / andrica (2006): Complex Numbers from A to…Z. Boston usw.: Birkhäuser.

Eine unvermutete Invarianz

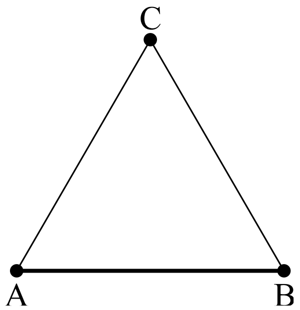


Quadrate über zwei Dreiecksseiten führen zu einer weiteren bemerkenswerten Eigenschaft:
Es ist $D \triangleq b - i\cdot(c-b)$ und $E \triangleq a + i\cdot(c-a)$; für den Mittelpunkt M von ED gilt also

$$M \triangleq \frac{d+e}{2} = \frac{a+b+i\cdot(b-a)}{2}.$$

Überraschenderweise ist M unabhängig von C: Bewegt man C, so ändert sich die Lage von M überhaupt nicht.

Ein gleichseitiges Dreieck über einer Strecke



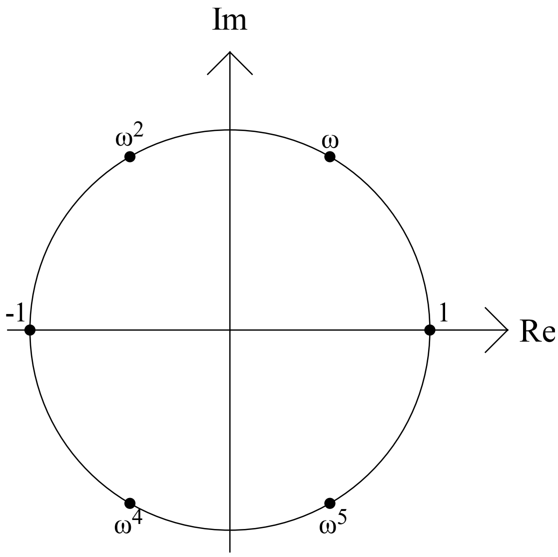
Man bekommt C, indem man B um A um 60° gegen den Uhrzeigersinn dreht. Mit $a \triangleq A$, $b \triangleq B$ und mit $\boxed{\omega := e^{i\cdot\pi/3} = \cos(60°) + i\cdot\sin(60°)}$ ist $c - a = \omega\cdot(b-a)$, also

$$c = a + \omega\cdot(b-a).$$

Dreht man um B im Uhrzeigersinn und ist $\boxed{\omega^* := \cos(-60°) + i\cdot\sin(-60°)}$, so gilt $c - b = \omega^*\cdot(a-b)$ und somit

$$c = b + \omega^*\cdot(a-b).$$

Der Mittelpunkt S von ABC ist als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden durch $3\cdot s = a+b+c$ gegeben.

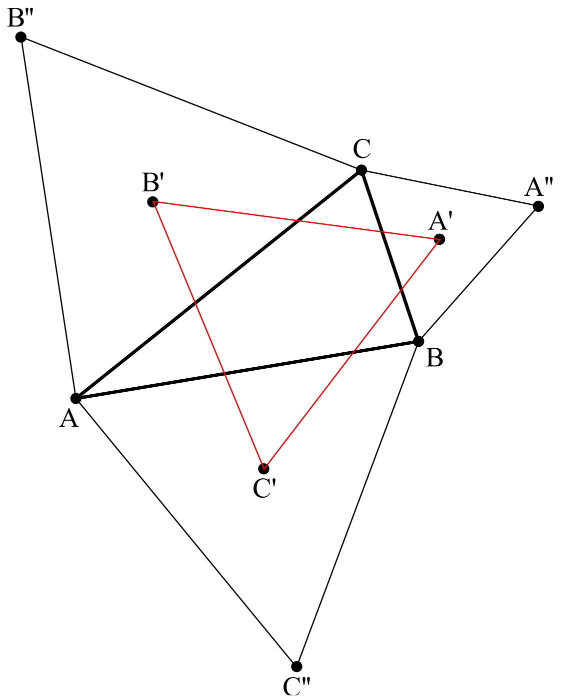


Es sind ω und $\omega^* = \omega^5$ zueinander konjugiert komplex, und ferner gilt $\omega^3 = -1$ sowie $\omega + \omega^* = \omega + \omega^5 = 1$, also auch $\omega^2 = \omega - 1$.

Für den Mittelpunkt S des gleichseitigen Dreiecks ABC gilt dann

$$\begin{aligned} 3\cdot s &= b\cdot(1+\omega) + a\cdot(2-\omega) \\ &= (1+\omega)\cdot\left(b - \omega^2\cdot a\right) \end{aligned}$$

Der Satz von Napoleon: Gleichseitige Dreiecke über Dreiecksseiten



Nun sei ABC ein beliebiges Dreieck in der komplexen Ebene mit der nun schon bekannten Zuordnung $A \triangleq a,\ B \triangleq b,\ C \triangleq c$ zwischen den Punkten A, B, C und den zugehörigen komplexen Zahlen a, b, c.
Auf den Seiten von ABC werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet. Dann bilden deren Mittelpunkte A', B', C' ein gleichseitiges Dreieck.
Dieser Satz wird Napoleon zugeschrieben. Dann ist

$$\frac{3}{1+\omega}\cdot A' \triangleq b-\omega^2\cdot c$$
$$\frac{3}{1+\omega}\cdot B' \triangleq c-\omega^2\cdot a$$
$$\frac{3}{1+\omega}\cdot C' \triangleq a-\omega^2\cdot b$$

und

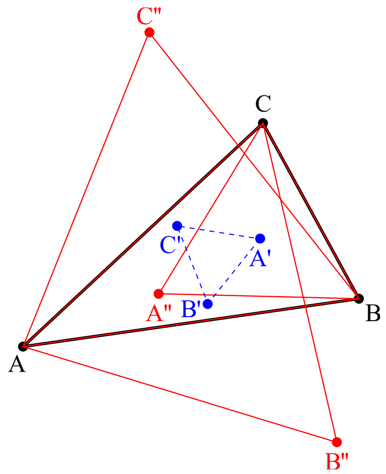
$$\frac{3}{1+\omega}\cdot(A'-C') \triangleq b-\omega^2\cdot c-a+\omega^2\cdot b=b-a+\omega^2\cdot(b-c)$$
$$\frac{3}{1+\omega}\cdot(B'-C') \triangleq c-\omega^2\cdot a-a+\omega^2\cdot b=c-a+\omega^2\cdot(b-a)$$

dann hat man folgende Kette zueinander äquivalenter Gleichungen:

$$b'-c'=\omega\cdot(a'-c')$$
$$c-a+\omega^2\cdot(b-a)=\omega\cdot\left(b-a+\omega^2\cdot(b-c)\right)$$
$$c-a+\omega^2\cdot(b-a)=\omega\cdot(b-a)+c-b$$
$$-a+(\omega-1)\cdot(b-a)=\omega\cdot(b-a)-b$$
$$-a+\omega\cdot(b-a)+a-b=\omega\cdot(b-a)-b$$

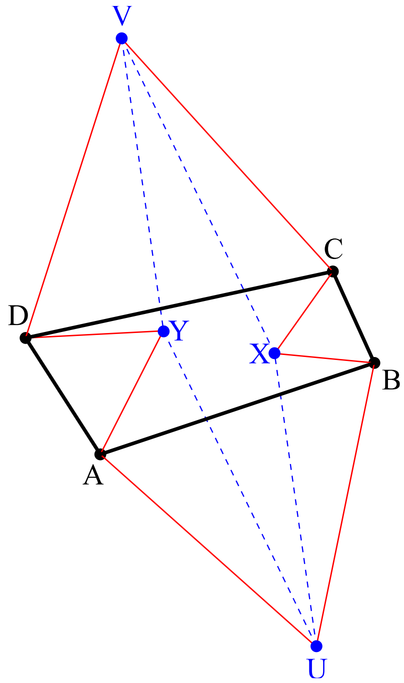
Damit ist der Satz bewiesen.

Natürlich hätte man den Satz von Napoleon auch elementargeometrisch beweisen können; ganz trivial ist ein solcher Beweis allerdings auch nicht. Der Beweis mit komplexen Zahlen hat den Vorteil, dass er sich ganz analog durchführen lässt, wenn die Dreiecke nach innen abgetragen werden und eine entsprechende Skizze für einen synthetischen Beweis recht unübersichtlich wird.



Gleichseitige Dreiecke über Vierecksseiten

Bei einem beliebigen Viereck werden auf gegenüber liegenden Seiten gleichseitige Dreiecke nach außen und auf den beiden anderen Seiten gleichseitige Dreiecke nach innen aufgesetzt. Dann bilden die neu entstehenden Eckpunkte U, V, X, Y ein Parallelogramm[8].



Es ist

$$V \triangleq d+\omega\cdot(c-d)$$
$$U \triangleq b+\omega\cdot(a-b)$$
$$X \triangleq b+\omega\cdot(c-b)$$
$$Y \triangleq d+\omega\cdot(a-d)$$

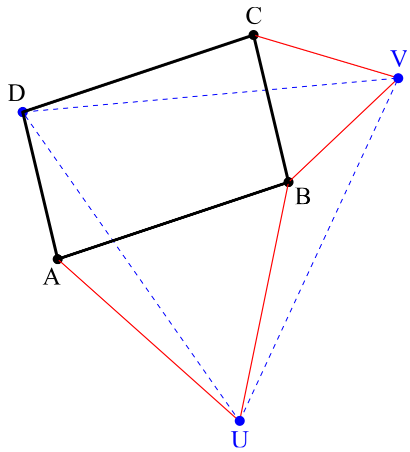
und deshalb

$$V-Y \triangleq \omega\cdot(c-a) \triangleq X-U$$
$$Y-U \triangleq = d-b+\omega\cdot(b-d) \triangleq V-X$$

Das beweist die Parallelogramm-Eigenschaft.

Gleichseitige Dreiecke über Parallelogrammseiten

Bei einem Parallelogramm ABCD werden über AB und über BC nach außen gleichseitige Dreiecke aufgesetzt. Dann bilden die neuen Eckpunkte U und V zusammen mit D ein gleichseitiges Dreieck[9].



Wegen

$$V \triangleq c+\omega\cdot(b-c)$$
$$U \triangleq b+\omega\cdot(a-b)$$

ist

$$U-D \triangleq 2\cdot b-c-a+\omega\cdot(a-b)$$
$$V-D \triangleq b-a+\omega\cdot(b-c)$$

und damit $v-d=\omega\cdot(u-d)$ usw.

Man muss sich nicht auf gleichseitige Dreiecke und Quadrate beschränken:

---

[8] Hahn, L-s. (1994): Complex numbers & geometry, S. 112. MAA.

[9] Hahn, loc. cit., S. 112

Regelmäßige Fünfecke

Ein regelmäßiges Fünfeck hat einen Zentralwinkel von $36° \triangleq \frac{2\cdot\pi}{5}$.

Damit lassen sich die Ecken mit der „fünften Einheitswurzel“

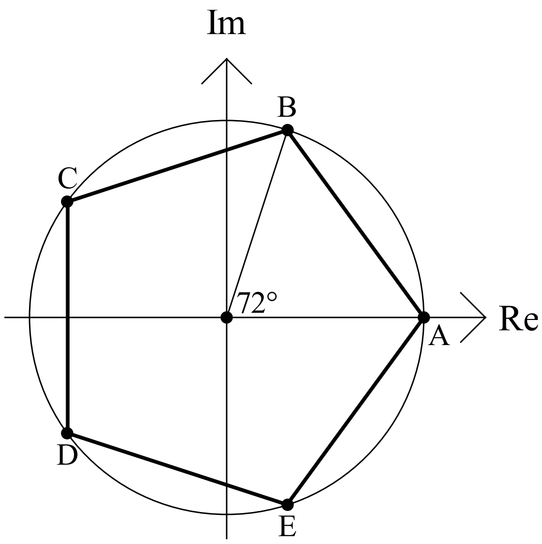
$$\zeta = \cos 72° + i\cdot\sin 72°$$

beschreiben durch

$$B = \zeta,\ C \triangleq \zeta^2,\ D \triangleq \zeta^3,\ E \triangleq \zeta^4,\ A \triangleq \zeta^5 = 1\,.$$

Wegen $\zeta^5 - 1 = (\zeta - 1)\cdot\left(1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4\right)$ ist

$$1+\zeta+\zeta^2+\zeta^3+\zeta^4 = 0\,.$$



Die Punkte C und D liegen symmetrisch zur reellen Achse, und es ist $\zeta^2+\zeta^3 = 2\cdot\cos 144° = -2\cdot\cos 36°$, also gilt $\left(\zeta^2+\zeta^3\right)^2 = \zeta^4 + 2 + \zeta = 1 - \left(\zeta^2+\zeta^3\right)$.

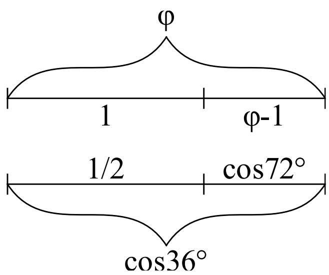
Damit hat man die quadratische Gleichung

$$\left(-2\cdot\cos 36°\right)^2 = 1 - \left(\zeta^2+\zeta^3\right) = 1 + 2\cdot\cos 36°$$

mit der positiven Lösung $\boxed{2\cdot\cos\left(36°\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (Goldener Schnitt). Hiermit hat man neben $\cos 30°,\ \cos 45°,\ \cos 60°$ einen weiteren explizit angebbaren Cosinus-Wert gewonnen.

Mit $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist $\frac{\varphi-1}{1} = \frac{1}{\varphi}$.

(In der Skizze rechts sind Strecken-Verhältnisse angegeben.)



Auch die Punkte B und E liegen symmetrisch zur reellen Achse mit $\zeta + \zeta^4 = 2\cdot\cos 72°$, also ist mit analoger Argumentation

$$\left(\zeta+\zeta^4\right)^2 = \zeta^2 + 2 + \zeta^3 = 1 - \left(\zeta+\zeta^4\right)$$

$$\left(\zeta+\zeta^4\right)^2 + \left(\zeta+\zeta^4\right) - 1 = 0$$

$$\left(2\cdot\cos 72°\right)^2 + 2\cdot\cos 72° - 1 = 0$$

$$\boxed{2\cdot\cos 72° = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi - 1}\ \text{(Goldener Schnitt)}$$

Damit hat man noch einen weiteren Cosinus-Wert. Insbesondere ist $\cos 36° - \cos 72° = \frac{1}{2}$.

Man sieht noch mehr: Es ist

$$\begin{aligned}\frac{CE}{BA} &\triangleq \frac{\zeta^2-\zeta^4}{\zeta-1} = -\zeta^2\cdot(\zeta+1) = -\zeta^2-\zeta^3\\ &= -\cos 144° - i\cdot\sin 144° - \cos 216° - i\cdot\sin 216°\\ &= \cos 36° - i\cdot\sin 36° + \cos 36° + i\cdot\sin 36°\\ &= 2\cdot\cos 36°\\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

Im regelmäßigen Fünfeck tritt demnach der Goldene Schnitt auf: Die Diagonale ist $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ -mal so lang wie die Seite.

Dass der Goldene Schnitt im regelmäßigen Fünfeck auftritt, hätte man auch elementargeometrisch einsehen können, und es fallen auch die Werte für $\cos 36°$ und $\cos 72°$ ab; es ist nach dem Cosinussatz

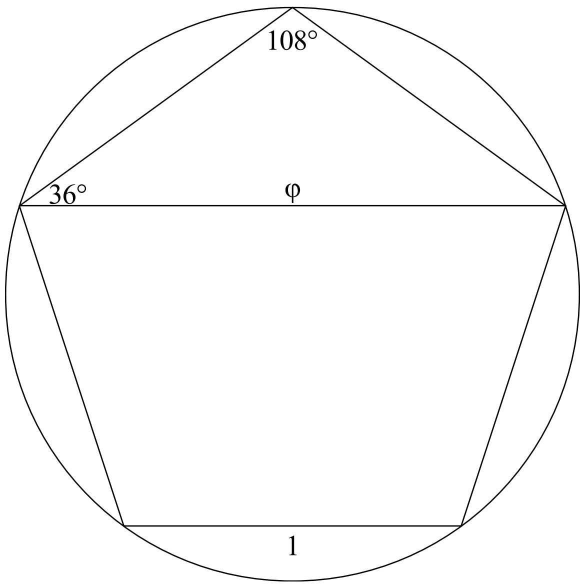
$$\varphi^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos 108° = 2 + 2\cdot\cos 72°$$

bzw. $\cos 72° = \frac{\varphi-1}{2}$

und

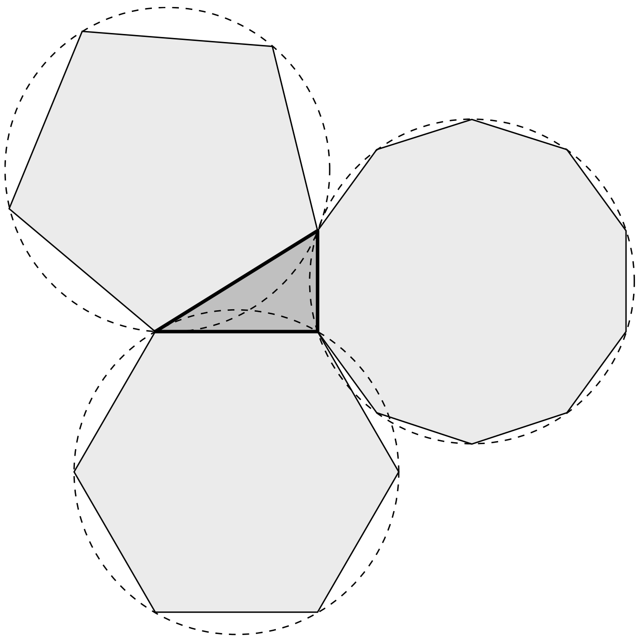
$$1^2 = 1^2 + \varphi^2 - 2\cdot 1\cdot\varphi\cdot\cos 36°$$

bzw. $\cos 36° = \frac{\varphi}{2}$.



Folgerung: Ein Satz von EUKLID

Aus alledem folgt ein besonders durchsichtiger Beweis von Satz 10 im 13. Buch der Elemente von EUKLID: Beschreibt man einem Kreis ein regelmäßiges Fünfeck ein und errichtet auf einer der Seiten ein Quadrat, so habe das den Flächeninhalt q_5. Beschreibt man demselben Kreis ein regelmäßiges Sechseck und ein regelmäßiges Zehneck ein und errichtet jeweils auf einer der Seiten ein Quadrat mit den jeweiligen Flächeninhalten q_6 und q_{10}, so gilt $q_5 = q_6 + q_{10}$.



Eine Seite des Fünfecks im Einheitskreis ist begrenzt durch 1 und $\cos(72°) + i\cdot\sin(72°)$ und hat das Längenquadrat $q_5 = (1-\cos(72°))^2 + \sin^2(72°) = 2 - 2\cdot\cos(72°) = 2 - (\varphi-1) = 3-\varphi$.

Für das Zehneck gilt analog $q_{10}=\left(1-\cos(36°)\right)^2+\sin^2(36°)=2-2\cdot\cos(36°)=2-\varphi$, und für das Sechseck ist $q_6=\left(1-\cos(60°)\right)^2+\sin^2(60°)=2-2\cdot\cos(60°)=1$.

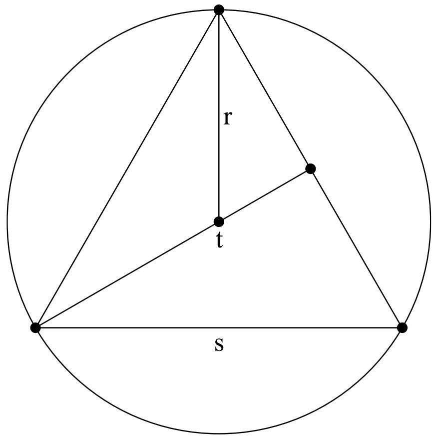
Der Beweis von EUKLID ist deutlich unübersichtlicher.

Wird einem Kreis mit Radius r ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben, so gilt für das Längenquadrat q_3 einer Dreiecksseite

$$\frac{q_3}{r^2}=\left(1-\cos(120°)\right)^2+\sin^2(120°)=2-2\cdot\cos(120°)=2+2\cdot\cos(60°)=2+2\cdot\sin(30°)=3,$$

es ist also dreimal so groß wie das Radiusquadrat (EUKLID, Buch 13, Satz 12).

Auch dies hätte man einfacher sehen können: Hat das Dreieck die Seitenlänge s, so hat die Transversale die Länge $\tau=s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, also hat der Radius die Länge $r=\frac{2}{3}\cdot s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{s}{\sqrt{3}}$, woraus $s^2=3\cdot r^2$ folgt.



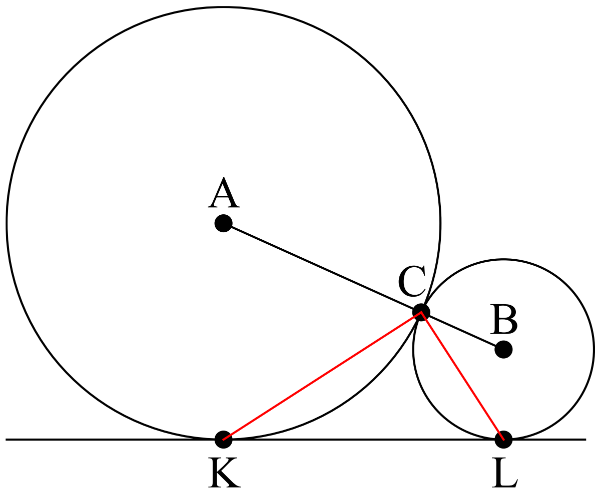
Zwei Kreise und eine Gerade

Zwei Kreise (mit den Mittelpunkten A und B) und den Radien R und r) berühren einander in C, und sie berühren die Gerade in K und L.
Der Abstand zwischen K und L ist $d=2\cdot\sqrt{r\cdot R}$.
Mit $K\triangleq 0$, $L\triangleq d$ ist $A\triangleq i\cdot R$, $B\triangleq d+i\cdot r$ sowie

$$C=\frac{r\cdot A+R\cdot B}{R+r}\triangleq\frac{r\cdot i\cdot R+R\cdot(d+i\cdot r)}{R+r}=R\cdot\frac{d+2\cdot i\cdot r}{R+r}.$$

Daher ist $C-K\triangleq 2\cdot R\cdot\sqrt{r}\cdot\frac{\sqrt{R}+i\cdot\sqrt{r}}{R+r}$ und

$$C-L\triangleq R\cdot\frac{d+2\cdot i\cdot r}{R+r}-d=2\cdot r\cdot\sqrt{R}\cdot\frac{i\cdot\sqrt{R}-\sqrt{r}}{R+r}.$$



Wegen $\frac{c-\ell}{c-k}=i\cdot\sqrt{\frac{r}{R}}$ stehen die Strecken CK und CL aufeinander senkrecht.