Lineare Abbildungen und Eigenwerte mit Geogebra[1]

Die Wirkung einer Matrix im Zweidimensionalen kann gut mit dynamischer Geometrie-Software untersucht werden. Sie kann sogar auf diese Weise viel besser erfahren werden als mit statischen Betrachtungen. Insbesondere erhält man auch ein gutes Verständnis der Eigenwerte.
Aufgrund der bequemen Termeingabemöglichkeit wird hier das Programm Geogebra gewählt.

1. Was macht eine Matrix?

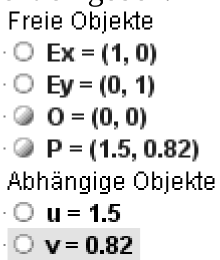
Die Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bildet den Punkt

$$P = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = u \cdot \underset{E_x}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + v \cdot \underset{E_y}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

ab auf

$$Q := M \cdot P = u \cdot \underset{\text{Spalte 1}}{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}} + v \cdot \underset{\text{Spalte 2}}{\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}} \;.$$

Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren. Dies lässt sich gut für die Konstruktion ausnutzen:
Man gibt in Geogebra die Punkte O=(0, 0), Ex=(1, 0) sowie Ey=(0, 1) ein. Ferner definiere man einen beliebigen Punkt P.
Man bekommt die Koordinaten u und v von P durch die Skalarprodukte u=P*Ex und v=P*Ey; man kann diese Skalarprodukte direkt eingeben.

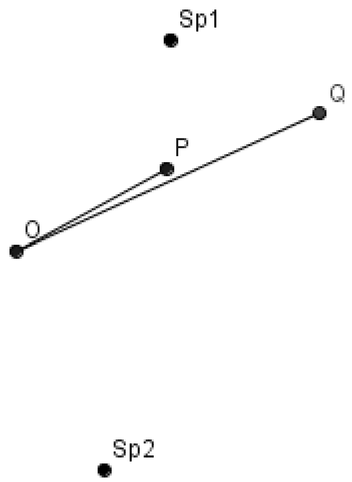


Die Matrixspalten Sp1 und Sp2 sind als Punkte beliebig wählbar.
Definiert man Q=u*Sp1+v*Sp2, so lässt sich die Wirkung der Abbildung von P nach Q gut beobachten: Man zieht an P und besichtigt die Wirkung auf Q.

2. Eine Auffälligkeit

Verbindet man O mit P sowie O mit Q, so stellt man fest, dass für gewisse Konstellationen OP und OQ zueinander kollinear sind. Bei manchen Matrizen (d.h. bei manchen Wahlen von Sp1 und Sp2) kommt das gar nicht vor, bei anderen an verschiedenen Orten.

---
[1] erschien in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **62** (5); S. 278 - 279 (2009).



Man stellt bald fest, dass es null, eine oder zwei ausgezeichnete Richtungen von OP gibt, bei denen so etwas auftritt.

3. Etwas mehr Übersichtlichkeit

Nun wird man die Angelegenheit theoretisch behandeln und vielleicht die passende Terminologie (Eigenvektor, Eigenwert) einführen.
Zur Ermittlung der Eigenvektoren braucht man zunächst die Eigenwerte. Die Gleichung ist

$$M \cdot P = t \cdot P$$

bzw.

$$(M - t \cdot E) \cdot P = 0$$

(mit E als Einheitsmatrix).
Es muss also

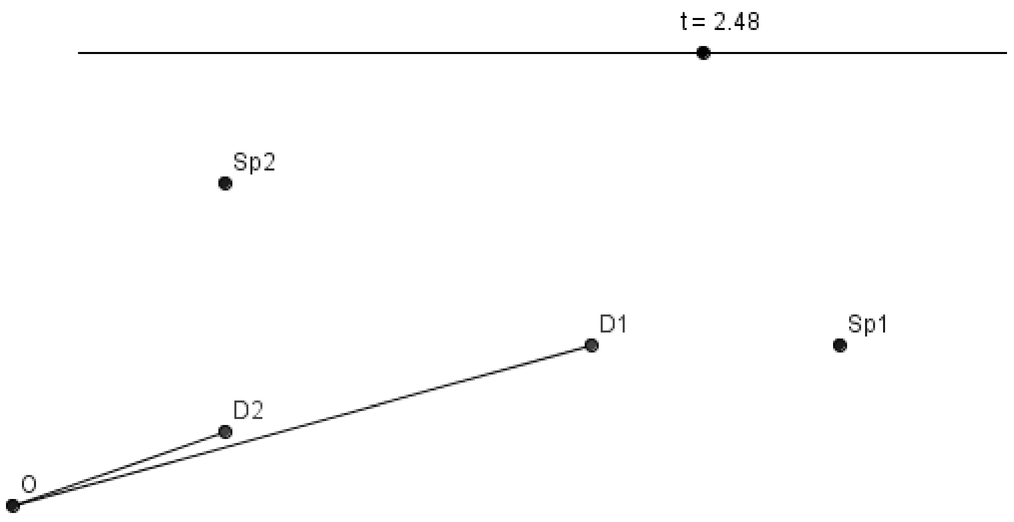
$$u \cdot (Sp_1 - t \cdot E_x) + v \cdot (Sp_2 - t \cdot E_y) = 0$$

sein (mit den Einheitsvektoren $E_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).
Das geht nur, wenn

$$Sp_1 - t \cdot E_x \text{ und } Sp_2 - t \cdot E_y \text{ linear abhängig}$$

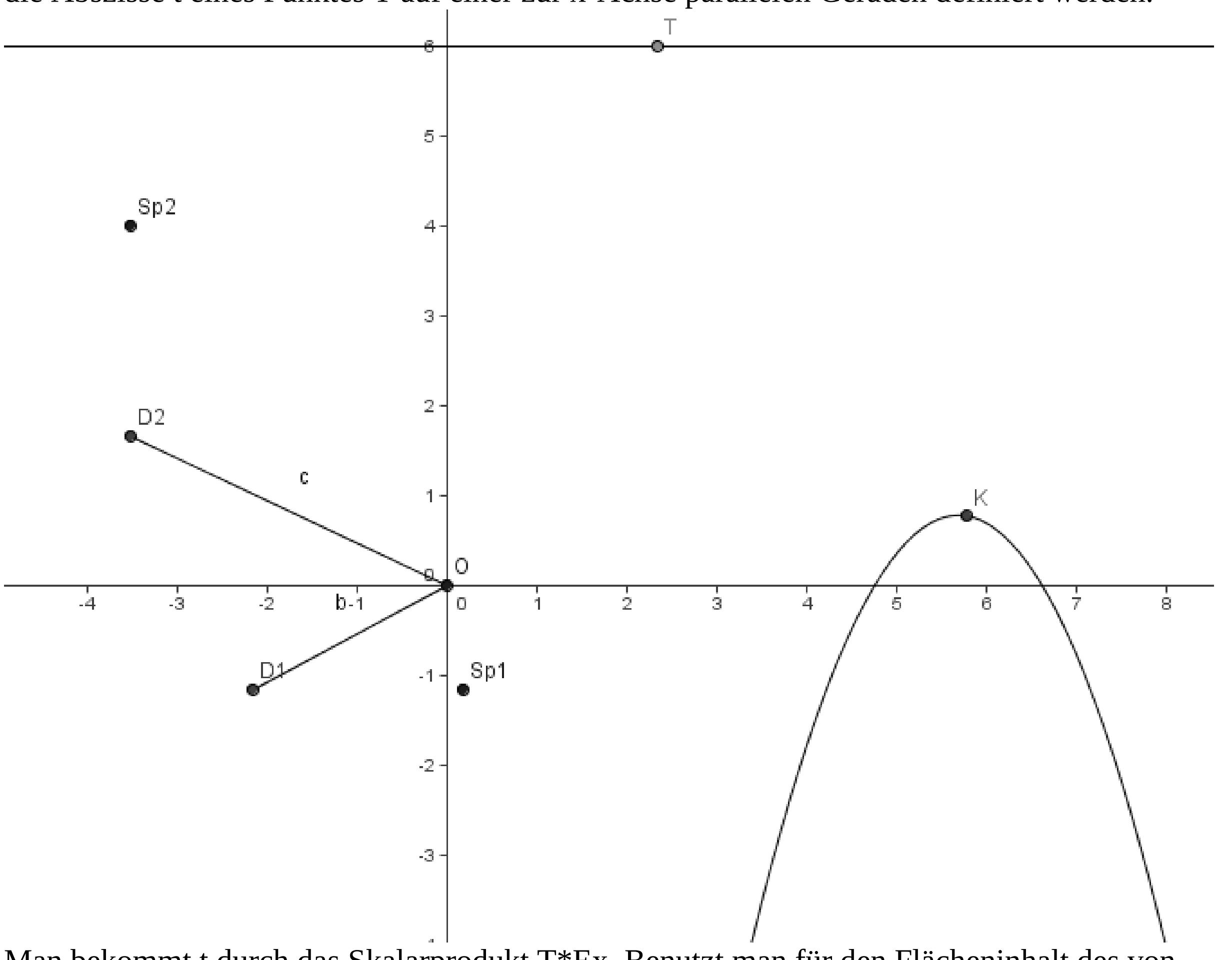
sind!

Man hat also genau dann einen Eigenwert t, wenn $D_1 := Sp_1 - t \cdot E_x$ und $D_2 := Sp_2 - t \cdot E_y$ zueinander kollinear sind.
Das lässt sich wiederum mit Geogebra schön visualisieren! Man richtet für t einen Schieberegler ein und definiert D1 und D2 direkt wie oben. Da man sich nun gar nicht mehr für P und Q interessiert, können diese Objekte ausgeblendet werden.



Man sieht sehr deutlich, für welche Werte von t das durch O, D1 und D2 aufgespannte Dreieck verschwindenden Flächeninhalt hat.

<u>4. Noch mehr Übersicht</u>
Um den Einfluss von t auf den vorzeichenbehafteten Flächeninhalt noch besser untersuchen zu können, ist die Betrachtung der entsprechenden Kurve sinnvoll. Diese Kurve ist eine Ortskurve. Um sie darzustellen, sollte man t nicht durch einen Schieberegler, sondern durch die Abszisse t eines Punktes T auf einer zur x-Achse parallelen Geraden definiert werden.



Man bekommt t durch das Skalarprodukt T*Ex. Benutzt man für den Flächeninhalt des von O, Ex und Ey definierten Dreiecks die von Geogebra vorgesehene Funktion, so erhält man

den absoluten Flächeninhalt. Besser ist es also, den Flächeninhalt selber zu definieren, was man etwa so machen kann:
Mit dem Befehl D22=drehe(D2, 90°) (Gradzeichen nicht vergessen!) wird D1 um 90° um den Ursprung O gedreht. Dann liefert f=D22*D1 das Doppelte des gewünschten Flächeninhalts. (Der Faktor 2 ist nicht schlimm, das es uns nur auf das Verschwinden des Flächeninhalts ankommt.)
Der Punkt K=(5+t/3, f/10) ist ein typischer Punkt der gesuchten Kurve, die man sich mit dem Ortslinien-Button zeichnen lassen kann. (Die Translation mit 5 und die Skalierungen 1/3 bzw. 1/10 lassen sich natürlich auch anders wählen!)
Nun ist es gut möglich, den Einfluss von Sp1 und Sp2 (und damit der Abbildungsmatrix) auf die Anzahl der Schnittpunkte der Ortskurve mit der x-Achse zu untersuchen.

5. Ausblick

Mit der Software Archimedes Geo3D (www.Raumgeometrie.de) lässt sich auf ganz analoge Weise untersuchen, was es mit den Eigenwerten dreireihiger Matrizen auf sich hat.