Unendlichkeit im Mathematikunterricht[1]

1. Einleitung

Selbst große Mathematiker gingen früher recht unbefangen mit der Unendlichkeit um. So schreibt Leonhard EULER im § 115 seiner „Introductio in analysin infinitorum“ (1748)[2]:

„Da $a^{\omega} = 1 + k \cdot \omega$ ist, so wird, welche Zahl man auch für i einsetzen möge, $a^{i \cdot \omega} = (1 + k \cdot \omega)^{i}$. Es ist mithin:

$$a^{i \cdot \omega} = 1 + \frac{i}{1} \cdot k \cdot \omega + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot k^2 \cdot \omega^2 + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot k^3 \cdot \omega^3 + \ldots$$

Setzt man nun $i = \frac{z}{\omega}$, wobei z irgend eine endliche Zahl bedeuten soll, so wird i, weil ω eine *unendlich kleine* Zahl ist, *unendlich groß*, und da hieraus $\omega = \frac{z}{i}$ folgt, so wird ω gleich einem Bruche mit *unendlich großem* Nenner, also, wie angenommen, *unendlich klein* sein. Substituiert man daher $\frac{z}{i}$ für ω, so erhält man

$$\begin{aligned} a^{z} = {} & 1 + \frac{1}{1} \cdot k \cdot z + \frac{1 \cdot (i-1)}{1 \cdot 2 \cdot i} \cdot k^2 \cdot z^2 + \frac{1 \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{1 \cdot 2 \cdot i \cdot 3 \cdot i} \cdot k^3 \cdot z^3 \\ & + \frac{1 \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdot (i-3)}{1 \cdot 2 \cdot i \cdot 3 \cdot i \cdot 4 \cdot i} \cdot k^4 \cdot z^4 + \ldots, \end{aligned}$$

eine Gleichung, die vollkommen richtig ist, sobald für i ein *unendlich großer* Wert gesetzt wird. (…)“ [Kursivsetzung von mir, J.M.]

Diese Unbefangenheit mit den Ausdrücken „unendlich groß“ und „unendlich klein“, diese Unbefangenheit gegenüber dem Hantieren mit der Unendlichkeit würde man heutigen Schülerinnen und Schülern übel nehmen. Man versucht im Mathematikunterricht, den Gebrauch der Vokabel „unendlich“ möglichst zu vermeiden. Dass dies häufig ohne

---

[1] Vortrag im 22. Dresdner Kolloquium zur Mathematik und ihrer Didaktik am 7. 2. 2017. Es handelt sich um eine modifizierte Fassung von J. Meyer: Grenzprozesse im Analysisunterricht. In: Meyer, J. / Leydecker, F. (Hrsg.): Grenzprozesse. DASU: Schroedel; S. 5 – 31 (2014)

[2] zitiert nach der deutschen Ausgabe (Einleitung in die Analysis des Unendlichen); 1983: Springer.

durchschlagenden Erfolg geschieht, hat wohl wesentlich damit zu tun, dass die Schülerinnen und Schüler die Fallstricke, die es bei der unbefangenen Verwendung der Vokabel „unendlich“ gibt, gar nicht kennen und daher die Scheu der Lehrperson vor diesem Wort nicht nachvollziehen können.

Auch EULER fehlte diese Scheu. Es zeigt sich hier ein grundlegendes Problem des Analysisunterrichts: Einerseits soll man die Schülerinnen und Schüler am Begriffsaufbau teilhaben lassen (sie sollen Mathematik weniger als Produkt und eher als Prozess erfahren), andererseits ist der korrekte begriffliche Aufbau von Kenntnissen und mathematischen Erfahrungen geprägt, die die Schülerinnen und Schüler gar nicht haben können.

Die Geschichte der Analysis zeigt, dass ein heutigen Standards gemäßer begrifflicher Aufbau mit CAUCHY und WEIERSTRASS recht spät kam. Die Mathematiker brauchten erst einmal Erfahrungen, die die Unzulänglichkeit eines naiven anschaulichen Aufbaus zeigten. Lange Zeit war Analysis „nur“ ein Kalkül, ein Calculus, der regelmäßig korrekte Resultate lieferte. Zwar wusste man nicht so genau, was eigentlich Differentiale sein sollten, aber man konnte mit ihnen erfolgreich umgehen. (Das hatte eine Folgerung für den Aufbau der Mathematik des 20. Jahrhundert mit ihren impliziten Definitionen: Man muss nicht wissen, was eine Gruppe, was ein geometrischer Punkt, was eine Wahrscheinlichkeit konkret bedeuten soll; man kann trotzdem erfolgreich Gruppentheorie, Geometrie oder Stochastik betreiben.)

Also: Lange Zeit lieferte der Calculus die richtigen Tangentensteigungen und Flächen, so dass höchstens philosophisch veranlagte Mathematiker Probleme in seiner Grundlegung sahen. Dies entspricht auch den Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler: Man kann mit dem schmalen begrifflichen Aufbau der Schule die Aufgaben erfolgreich lösen – und bekommt sogar oft das Richtige heraus, wenn man mit „unendlich“ unbefangen rechnet.

Allerdings hat man mit $\infty-\infty$ und mit $\frac{\infty}{\infty}$ bzw. mit $\infty\cdot 0$ Probleme, und hier zeigen sich die Ansatzpunkte, die Schülerinnen und Schüler von den Vorteilen zu überzeugen, die eine möglichst lange im Endlichen verbleibende Argumentation mit sich bringt.

Dies führt in der Schule noch nicht dazu, den Aufbau nach CAUCHY und WEIERSTRASS motivieren oder begründen zu können. Die Geschichte der Hochschul-Analysis musste i.w. bis FOURIER (eine unendliche Summe stetiger Funktionen war nicht mehr stetig) warten, bis die Mathematiker die Schwäche der bis dahin betriebenen Analysis als Problem sahen.

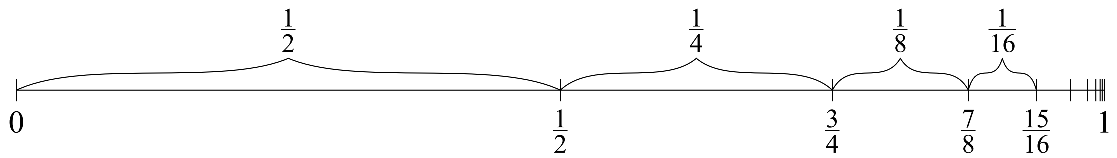
Was also kann und soll der Schulunterricht leisten? Die Schülerinnen und Schüler sollen erfahren, wie man mit $\infty \cdot 0$ sinnvoll umgehen kann. Sie sollen natürlich auch erfahren, dass manche mit der Unendlichkeit zusammenhängende naive Vorstellungen in Wahrheit Fehlvorstellungen sind. Dies wird der wesentliche Inhalt der ersten Kapitel sein.

Analysis beginnt nicht erst in Klasse 11 mit der Parabel-Tangente, sondern früher: Die numerische Bestimmung irrationaler Wurzeln, die Kreisberechnung: All dies ist propädeutische Analysis und sollte auch so unterrichtet werden. Grenzprozesse treten schon bei der schriftlichen Division auf: Was bedeutet die rechte Seite von $\frac{1}{3} = 0,\bar{3}$?

Beginnen möchte ich mit einer Paradoxie aus dem alten Griechenland.

2. Eine Paradoxie von Zenon

Niemand kann eine Strecke 01 von der Stelle 0 zur Stelle 1 durchlaufen, denn er muss ja zunächst die erste Hälfte des Weges zurücklegen, dann von der verbleibenden Hälfte wieder die Hälfte, dann von dem verbleibenden Viertel des Gesamtweges wieder die Hälfte und so weiter. Kurzum: *Er kommt niemals an*.



Man kann die Sache auch anders sehen: Zunächst müsste er die erste Hälfte des Weges zurücklegen; um das zu vollbringen, müsste er aber die erste Hälfte der ersten Hälfte zurücklegen, dazu aber die erste Hälfte des ersten Viertels des Gesamtweges und so weiter. Kurzum: *Er kann gar nicht starten*.

Es sind weitere Variationen denkbar: Er muss erst die erste Hälfte des Gesamtweges zurücklegen, davor aber das erste Drittel des Gesamtweges, davor aber das erste Viertel und so weiter.

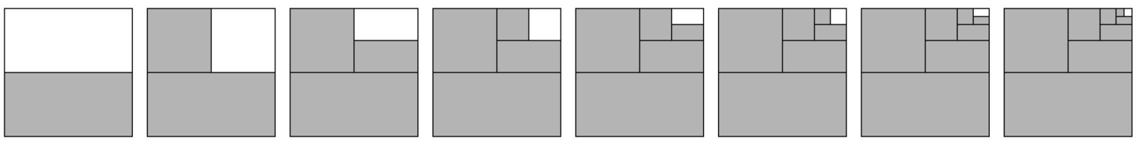
Natürlich war Zenon klar, dass man ohne Schwierigkeiten von 0 nach 1 gelangen kann, dass also die Unendlichkeit in einen begrenzten Zeitrahmen passt. Das Problem liegt anders: Wo genau steckt der Fehler in Zenons Argumentation?

Egal, welche Version des ZENON'schen Paradoxons man nimmt: Stets wird die Strecke 01 in unendlich viele Teilstrecken geteilt. Wenn man den Teilungsvorgang zu Ende führen würde, gelangte man zu Teilstrecken der Länge 0, also zu Punkten. Diese können irgendwo auf der Strecke sein. Da sie durch Teilungen entstanden sind, lassen sich diese Punkte durch Brüche beschreiben. Da kein Punkt gegenüber den anderen ausgezeichnet ist, kann man vermuten, dass die Strecke aus Teilstrecken der Länge 0 besteht. Dann ist aber völlig unklar, wie aus Teilstrecken der Länge 0 eine Strecke mit der Länge 1 entstehen kann.

Man kann beweisen: Wenn es zu jedem Punkt einen Bruch gibt und wenn man alle diese Punkte zusammenklebt, dann bekommt man eine Gesamtstrecke der Länge 0, also überhaupt nicht das, was man haben will.

Offensichtlich muss es weitere Punkte auf der Ausgangstrecke geben, die sich nicht durch einen Bruch beschreiben lassen, und davon muss es sogar sehr, sehr viele geben! Das ist tatsächlich so; Georg CANTOR hat beweisen können, dass die Menge der Zahlen zwischen 0 und 1, die sich nicht durch einen Bruch beschreiben lassen (die irrationalen Zahlen wie z.B. $\sqrt{2}$), in einem wohldefinierten Sinne viel mächtiger ist als die Menge der Bruchzahlen. Die Mächtigkeit der Bruchzahlen ist *abzählbar unendlich*, die aller reellen Zahlen ist *überabzählbar unendlich*.

Kommen wir zurück zum Durchlaufen einer Strecke: Es ist richtig, dass der Läufer unendlich viele Zeit*punkte* durchlaufen muss; gleichwohl besteht die Summe der hierfür erforderlichen Zeit*dauern* aus immer kleiner werdenden Summanden. Dass eine Summe mit unendlich vielen Summanden durchaus endlich sein kann, zeigt schon das Beispiel $\frac{1}{3} = 0,\bar{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$. Beim Läufer handelt es sich um die Summe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$. Dass sich als Summe die „1“ ergibt, illustriert etwa die folgende Figur (die noch keinen Beweis darstellt):



ZENONS Paradoxie berührt die <u>Fehlvorstellung</u>, dass eine Summe mit „unendlich vielen“ Summanden den Wert „unendlich“ haben müsse.

3. Unterschiedliche Repräsentationen von Zahlen

Ist $0,\bar{9}$ etwas kleiner als 1, oder sind die beiden Zahlen gleich groß? Eine der Schwierigkeiten mit dieser Aufgabe besteht in der Fehlvorstellung, dass es zu jeder Zahl eine *eindeutige* Dezimalbruchentwicklung geben müsse. Allerdings bilden Neunerperioden das einzige Beispiel für die Nichteindeutigkeit. Dass tatsächlich $0,\bar{9}=1$ ist, kann man auf unterschiedlichen Wegen einsehen:

i) Es ist bekanntlich $\frac{1}{3}=0,\bar{3}$, und eine Multiplikation mit 3 liefert das Gewünschte. Hier wird naiv angenommen, dass das Distributivgesetz auch für Summanden mit „unendlich vielen“ Summanden wie $0,\bar{9}$ gilt. Und es gibt noch einen anderen Einwand: Die Gleichung $\frac{1}{3}=0,\bar{3}$ ist das Ergebnis einer schriftlichen Division. $0,\bar{9}$ erhält man jedoch *nicht* als Ergebnis einer schriftlichen Division.

ii) Zur Beantwortung dieser Einwände lohnt es sich, die Unterschiede zu betrachten: Es ist

$$\begin{array}{ccccc} 1 & - & 0,9 & = & 0,1 \\ 1 & - & 0,99 & = & 0,01 \\ 1 & - & 0,999 & = & 0,001 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ 1 & - & 0,\bar{9} & = & 0 \end{array}$$

Je mehr Neunen der Näherungsbruch aufweist, um so kleiner ist der Unterschied. Unendlich viele Neunen kann man nicht hinschreiben, also „wird“ der Unterschied nicht „irgendwann einmal“ null; statt dessen geht er mit wachsender Anzahl von Neunen gegen null. Die Schreibfigur $0,\bar{9}$ bezeichnet den Grenzwert. Bei der eben dargestellten Argumentation wird die Gültigkeit des entsprechenden Grenzwertsatzes naiv vorausgesetzt.

Wie immer gilt: Den Grenzprozess als solchen kann man nicht sehen. Die Gleichung $0,\bar{9}=1$ erschließt sich nur durch eine Argumentation.

Hier kann früh die Fehlvorstellung ausgeräumt werden, dass Grenzwertprozesse anschaulich fassbar seien.

iii) Ein dritter Weg benutzt wieder eine naive Manipulation von Summen mit „unendlich vielen“ Summanden: Es gelten die beiden Gleichungen

$$10 \cdot 0,\overline{9} = 9,\overline{9}$$
$$1 \cdot 0,\overline{9} = 0,\overline{9}$$

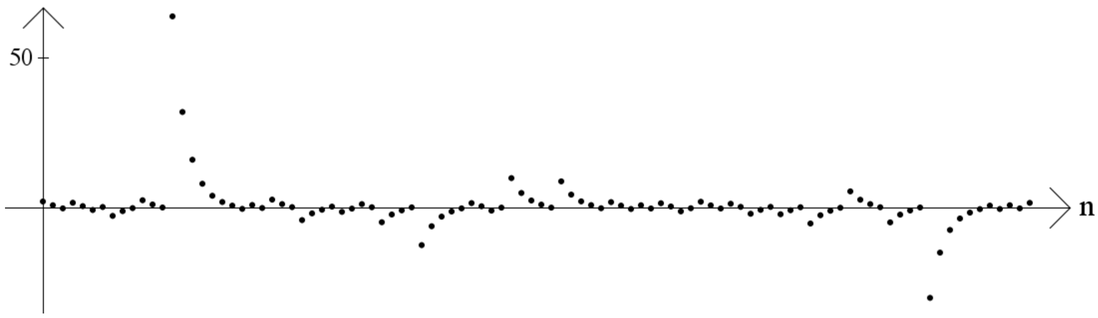
Subtraktion liefert $9 \cdot 0,\overline{9} = 9$ und damit $0,\overline{9} = 1$. Der dritte Weg ist wohl der abstrakteste, weil er nicht $0,\overline{9}$ selber in den Blick nimmt, sondern mit $0,\overline{9}$ operiert.

4. Arten der Nicht-Konvergenz

Grenzprozesse haben mit Unendlichkeit zu tun. Der Begriff einer konvergenten Folge setzt voraus, dass der Index „über alle Grenzen geht". Allerdings konvergieren nicht alle Folgen, zum Beispiel hat $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ keinen endlichen Grenzwert. „Nicht-Konvergenz" ist zunächst ein negativer Begriff, der recht unterschiedliche Ausprägungen haben kann:

Das Heron-Verfahren $h_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(h_n + \frac{N}{h_n}\right)$ zur Ermittlung von $\sqrt{N}$ konvergiert stets (was man auf der Schule nicht beweisen wird), wenn N und der Startwert positiv sind.

Was passiert, wenn $N = -1$ ist? Man bekommt i.a. eine chaotische Folge und bei manchen Startwerten (etwa bei $h_0 = 1$) unendlich große Folgenwerte:

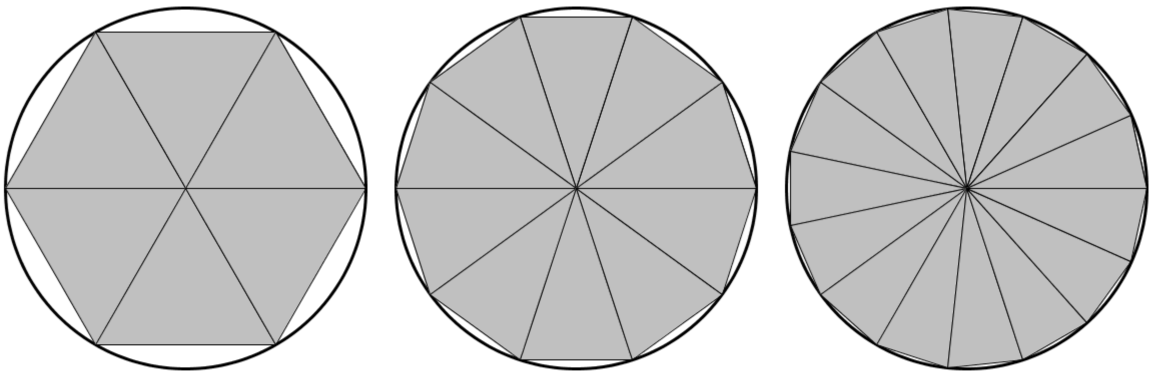


Hier ist mit der <u>Fehlvorstellung</u> aufzuräumen, wonach „Nicht-Konvergenz" mit „Grenzwert = ∞" gleichbedeutend sei.

Andere geeignete Beispiele sind $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $\left(\sin\frac{\pi\cdot(n+6)}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $\left(\sin^{(n)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Kreisberechnung

Wir berechnen gar nicht den Kreis, sondern einfacher zu berechnende Figuren. Dabei sorgen wir dafür, dass die Annäherungsfiguren sich dem Kreis immer mehr annähern.



Auch das 15-Eck ist kein Kreis, und auch das 10.000-Eck ist kein Kreis. Man kann nur sagen: Der Flächeninhalt des 10.000-Ecks wird sich vom Flächeninhalt des Kreises kaum noch unterscheiden. Aber der Unterschied ist da, auch wenn er noch so klein ist. Man kann (durch Vergrößerung von n) den Unterschied noch weiter verkleinern, aber man kann nicht erreichen, dass der Unterschied so groß wie null ist[3].

Hier ist die Fehlvorstellung zu thematisieren, dass die Kategorie (hier: Geradlinigkeit) einer Figur sich beim Grenzübergang nicht ändert.

Schülerinnen und Schüler sind versucht zu sagen: „Der Kreis hat unendlich viele Ecken". Das würde bedeuten, dass dem Kreis unendlich viele kleine Dreiecke einbeschrieben wären, die jeweils den Flächeninhalt 0 hätten. Dann hätte der Kreis den Flächeninhalt $\infty \cdot 0$. Dies Resultat ist allerdings nutzlos, denn was soll $\infty \cdot 0$ sein? Die naive Berechnung $\infty \cdot 0 = \infty \cdot \frac{1}{\infty} = 1$ führt offensichtlich zu einem falschen Ergebnis. (Es ist im Mathematikunterricht sinnvoll, über solche falschen Rechnungen zu sprechen! Hierhin gehört auch der „Beweis", dass $\frac{0}{0} = 17$ ist, denn wenn man beide Seiten mit 0 multipliziert, erhält man eine wahre Aussage.)

[3] Dies ist der wesentliche Inhalt eines propädeutischen Grenzwertbegriffs.

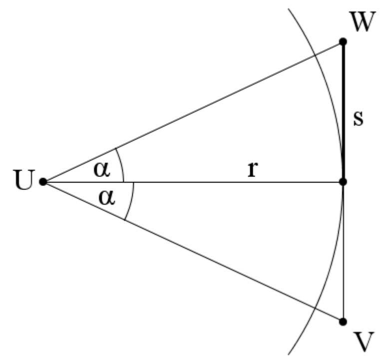
Zielführender ist es, lange im Endlichen zu verbleiben, den Flächeninhalt der n-Ecke zu berechnen und das Ergebnis für wachsendes n zu betrachten.

Ein einfacher Weg ist der folgende:

Dem Kreis wird ein regelmäßiges n-Eck umbeschrieben.

Rechts ist UVW eines der n Teildreiecke.

Man teilt UVW in zwei rechtwinklige Dreiecke auf; letzteres hat den Winkel $\alpha = \frac{180°}{n}$ am Kreismittelpunkt U.



Wegen $s = r \cdot \tan\alpha$ hat der Umfang des n-Ecks die Länge $U_n = 2 \cdot n \cdot s = 2 \cdot r \cdot n \cdot \tan\frac{180°}{n}$,

und der Flächeninhalt des n-Ecks hat den Wert $A_n = 2 \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot s = r^2 \cdot n \cdot \tan\frac{180°}{n}$.

Wenn man für n erst 10, dann 100, dann 1000, ... einsetzt, bekommt man numerisch

$n \cdot \tan\frac{180°}{n} \to \pi$, also $U_n \to 2 \cdot r \cdot \pi$ und $A_n \to r^2 \cdot \pi$.

Insbesondere gehört zu Umfang und zur Fläche derselbe Faktor π, was nicht von vornherein selbstverständlich war.

Kein n-Eck hat den Flächeninhalt π, der Unterschied ist immer größer als 0, aber so klein, wie wir möchten.

Selbstverständlich ist die Methode – mit leichten Modifikationen - auch für einbeschriebene n-Ecke anwendbar.

Die vorgestellte Vorgehensweise ist einfacher als die „Eckenverdopplungs-Methode" nach ARCHIMEDES. Jenes Verfahren führt zu einer Approximation durch Wurzelausdrücke. Aus Sicht der Schülerinnen und Schüler kann man dann auch durch trigonometrische Funktionen approximieren, wie es oben geschehen war.

Die Kreisberechnung (wie auch die Pyramiden- und die Kugelberechnung) sind <u>propädeutische Analysis</u>; sie bereiten einen angemessenen Umgang mit der Unendlichkeit vor.

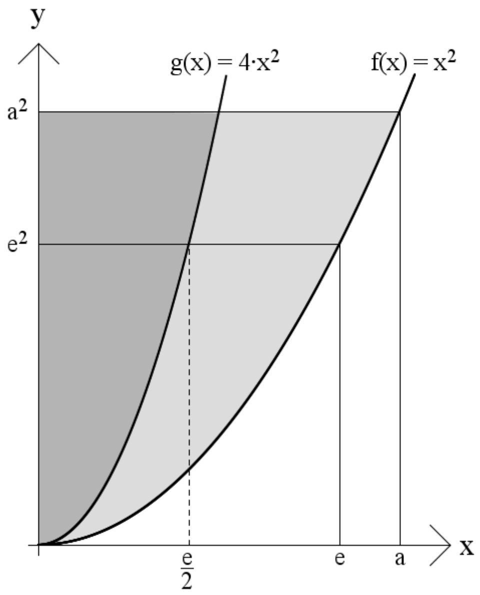
6. Cavalieri

Bei der Berechnung des Volumens von schiefen Pyramiden oder von Kugeln wird das Prinzip von Cavalieri in der Schule als fruchtbares heuristisches Prinzip benutzt. Es besagt zunächst, dass das Volumen eines Körpers dadurch bestimmt werden kann, dass der Körper in dünne zueinander parallele Scheiben zerlegt und diese aufsummiert werden. Daraus folgt: Zwei Körper sind volumengleich, wenn alle ihre Schnittflächen in Ebenen parallel zu einer Grundebene in entsprechenden Höhen flächeninhaltsgleich sind. Dahinter steckt die Vorstellung, dass ein Körper aus „unendlich vielen" „unendlich dünnen" Schichten besteht. So darf man zwar nicht reden; gleichwohl lässt sich das Prinzip des Cavalieri mit Hilfe der Hochschulmathematik streng beweisen.

Dies Prinzip lässt sich auch für Flächenberechnungen verwenden[4]:

Zwei Figuren sind flächeninhaltsgleich, wenn alle ihre Schnittstrecken in Geraden parallel zu einer Grundgerade in entsprechenden Höhen längengleich sind.

Betrachten wir als Beispiel den Flächeninhalt unter der Normalparabel. Im nebenstehenden Bild haben die beiden getönten Flächen den gleichen Inhalt, denn jede waagerechte Strecke wird durch die mittlere Kurve in der Mitte geteilt.



Lässt sich auch der Inhalt der weißen Fläche unter der Normalparabel mit dem Cavalieri'schen Prinzip ermitteln? Die Antwort lautet „Ja"!

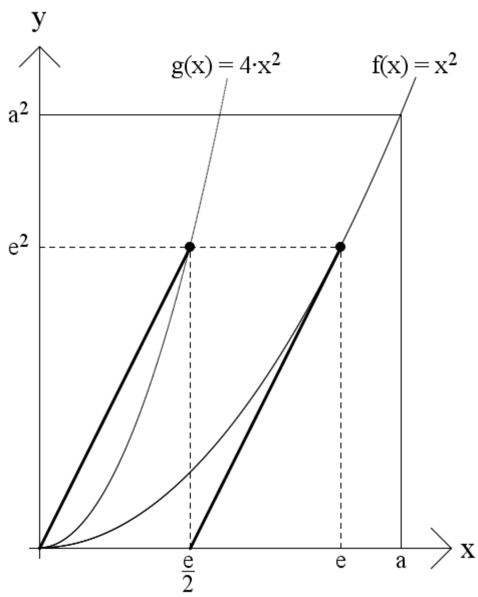
Zu diesem Zweck betrachten wir die Gesamtheit aller Tangentenabschnitte zwischen Normalparabel und x-Achse (die folgende Abbildung zeigt einen dieser Tangentenabschnitte, und zwar an der Stelle e; dass die Gerade zu $y = 2 \cdot e \cdot x - e^2$ mit der

---

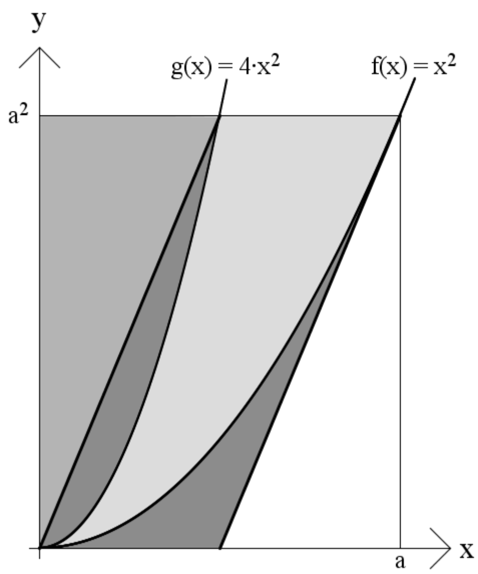
[4] Entnommen aus: J. Meyer: Cavalieri im Einsatz. In: Der Mathematikunterricht 62 (5); S. 59 - 63 (2016)

Parabel einen doppelten Schnittpunkt hat und daher Tangente ist, lässt sich auch ohne Analysis mit Hilfe der Kenntnis über quadratische Gleichungen zeigen.).

Verschiebt man jeden Tangentenabschnitt parallel so, dass der untere Begrenzungspunkt im Ursprung liegt, so liegt der obere Begrenzungspunkt auf der Parabel zu $g(x)=4\cdot x^2$ (wie man leicht ausrechnet).



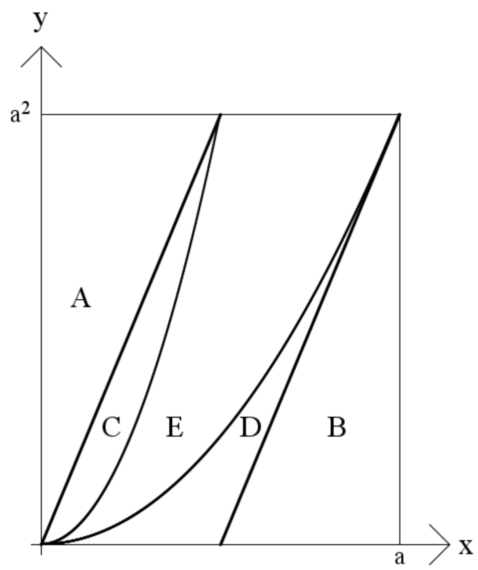
Dies bedeutet: Die beiden sehr dunkel getönten Flächen in der nebenstehenden Abbildung haben den gleichen Inhalt.



Fügt man nun noch die gleich großen Dreiecke A und B links oben und rechts unten hinzu, so hat man folgende Ergebnisse:

$A=B;\ C=D;\ A+C=E$,

und damit sind $D+B$, $C+A$ und E alle gleich groß, woraus $D+B=\frac{a^3}{3}$ folgt.



Was ist der *Vorteil* der Vorgehensweise nach Cavalieri? Die *Berechnung des Flächeninhalts* kommt offenbar *ohne explizite Grenzbetrachtungen* aus und ohne Potenzsummen.

Was ist der *Nachteil* dieser Vorgehensweise? Offenbar ist die übliche Verwendung einer Riemann-Summe wesentlich verallgemeinerungsfähiger. Jedoch gilt: Die hier vorgenommene Betrachtung des Intervalls [0; 1] ist leicht zu verallgemeinern auf ein anderes Intervall [0; b]. Auch ist die Betrachtung nicht an die Normalparabel gebunden; sie funktioniert auch für $y = x^3$ und andere Potenzfunktionen und ebenfalls für die Exponentialfunktion.

7. Tangentensteigung

Man muss zunächst mit den Lernenden klären, was überhaupt eine Tangente sein soll. Sinnvoll ist die Festlegung, dass eine Tangente aus einer schneidenden Geraden dadurch hervorgeht, dass zwei Schnittpunkte zusammenfallen.

Betrachten wir also die Normalparabel an der Stelle a. Eine beliebige Gerade durch $\left(a \mid a^2\right)$ hat die Gleichung $y = m \cdot (x - a) + a^2$; sie hat mit der Parabel die beiden Schnittstellen $x = a$ und $x = m - a$. Wenn beide Schnittstellen zusammenfallen sollen, muss $m = 2 \cdot a$ sein.

Damit hat man die Parabeltangentensteigung *ohne Analysis* bestimmt, und dieses Verfahren lässt sich auch für $y = x^3$, $y = x^{-1}$, $y = \sqrt{x}$ usw. und für alle Polynomfunktionen durchführen.

Gleichwohl wird man im Unterricht die Ermittlung der Tangentensteigung anhand der Normalparabel analytisch durchführen wollen, also anhand eines Beispiels, für das man die zu entwickelnde Methode eigentlich gar nicht braucht. Immerhin hat man dadurch eine Kontrollmöglichkeit für die analytische Methode.

Bekanntlich geht man bei der Tangentenberechnung so vor, dass man zunächst etwas anderes berechnet, nämlich die Sehne durch zwei Kurvenpunkte, und dann dafür sorgt, dass der Unterschied zwischen dem, was man will, und dem, was man kann, beliebig klein wird.

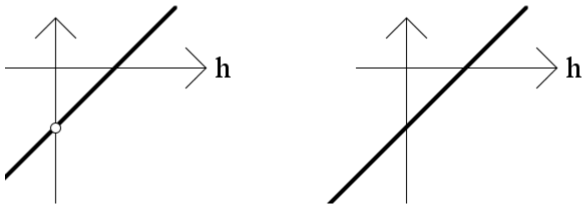
Das lässt sich auf zwei verschiedene Arten machen: Man *dreht* eine Sehne in die Tangentenlage hinein (das ist der übliche Weg), oder man *verschiebt* ein Sehne in die

Tangentenlage hinein. Analog zu den Bemerkungen weiter oben gilt in beiden Fällen: Im Grenzübergang ändert die Sehne ihre Qualität, denn die Grenzfigur „Tangente“ ist keine Sehne mehr.

Beim üblichen Weg macht man (für die Normalparabel an der Stelle a) den Ansatz $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2\cdot a\cdot h+h^2}{h}$. Wenn man erst kürzt und dann $h=0$ setzt, hat man die gesuchte Steigung $2\cdot a$, und über den Grenzübergang bräuchte man gar nicht zu reden. Hätte man jedoch zuerst im Bruch $h=0$ eingesetzt, hätte man das nicht weiter verwertbare Ergebnis $\frac{0}{0}$ (hier ist die <u>Fehlvorstellung</u> aufzugreifen, dass $\frac{0}{0}$ gleich 0 oder gleich 1 oder „verboten“ sei). Was ist hier los? Die Reihenfolge der Termumformungen sollte doch keine Rolle spielen!

Hier muss man mit den Lernenden darüber reden, dass der ungekürzte Bruch $\frac{2\cdot a\cdot h+h^2}{h}$ und der gekürzte Bruch $2\cdot a+h$ zwei verschiedene Terme sind, die nur für $h\neq 0$ wertgleich sind:

Der erste Term (links) ist für $h=0$ nicht definiert; der zweite Term (rechts) ist für alle h definiert. Für alle anderen Einsetzungen von h, also für alle $h\neq 0$, liefern beide Terme dieselben Werte.



Hinter dem Grenzübergang $\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\cdot a\cdot h+h^2}{h}=2\cdot a$ steckt also eine stetige Ergänzung.

Mitunter schlagen Lernende nicht die Sekantendreh-Methode, sondern eine Parallelverschieb-Methode vor. Die Differenzenquotienten sind $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2\cdot h}=\frac{4\cdot a\cdot h}{2\cdot h}\xrightarrow{h\to 0}2\cdot a$. Dabei müssen die Abszissen der Sekantenpunkte nicht gleichabständig zu a sein; auch

$$\frac{f(a+h)-f(a-2\cdot h)}{3\cdot h}=\frac{6\cdot a\cdot h-3\cdot h^2}{3\cdot h}\xrightarrow{h\to 0}2\cdot a \text{ oder}$$

$$\frac{f(a+h)-f\left(a-h^2\right)}{h+h^2}=\frac{2\cdot a\cdot h+h^2+2\cdot a\cdot h^2-h^4}{h\cdot(1+h)}\xrightarrow{h\to 0}2\cdot a$$ führen zum gleichen Ziel.

Die Normalparabel bietet also keinen Anlass zur Besorgnis. Anders sieht es aus mit der Betragsfunktion $f(x)=|x|$, die an der Knickstelle 0 keine eindeutige Tangente haben sollte und deren Differentialquotient an dieser Stelle daher nicht existieren sollte. Es ist $\frac{f(h)-f(-h)}{2\cdot h}=\frac{h-h}{2\cdot h}\xrightarrow{h\to 0}0$, aber $\frac{f(h)-f(-2\cdot h)}{3\cdot h}=\frac{h-2\cdot h}{3\cdot h}\xrightarrow{h\to 0}-\frac{1}{3}$ und

$$\frac{f(h)-f\left(-h^2\right)}{h+h^2}=\frac{h-h^2}{h+h^2}\xrightarrow{h\to 0}1.$$

Dass die Drehsekanten-Methode stets ein eindeutiges Resultat liefert, wird in der Schule nicht bewiesen.

8. Dualisierung der Tangentenberechnung: Hüllkurven

Bisher ging es um die Aufgabe, wie man bei einer gegebenen Kurve in jedem Kurvenpunkt die Tangente berechnet. Eine Kurve wird dabei aufgefasst als Menge von Punkten; gesucht ist die Menge der Berührgeraden.

Dualisiert man diese Fragestellung, so ist eine Kurve aufzufassen als Hüllkurve von Berührgeraden; gesucht ist dann die Menge der Kurvenpunkte. Die Aufgabe besteht also darin, zu einer beliebigen Kurvengeraden den Berührpunkt mit der Kurve zu finden.

Da das neue Problem zum alten dual ist, sollte auch die neue Lösung zur alten dual sein[5]. Wie geht man bei der Lösung des alten Problems vor?

Statt der gesuchten Tangente t_P in einem Kurvenpunkt P berechnet man zunächst die Sekante PQ mit einem zweiten beliebigen Kurvenpunkt Q. Die Tangente in P erklärt man dann als die Grenzgerade der Sekante für $Q\to P$: Es ist $t_P=\lim\limits_{Q\to P}PQ$.

Diese Vorgehensweise lässt sich vollständig dualisieren:
Statt des gesuchten Berührpunkts B_g für eine Kurvengerade g berechnet man zunächst den Schnittpunkt $g\cap h$ mit einer zweiten beliebigen Kurvengerade h. Den Berührpunkt

---

[5] Eine ausführlichere Behandlung dieses Themas findet sich in J. Meyer (1997): Hüllkurven. In: Praxis der Mathematik 39 (3), S. 107 – 116 und 39 (4), S. 170 – 173.

von g erklärt man dann als den Grenzpunkt des Schnittpunkts für $h \to g$: Es ist

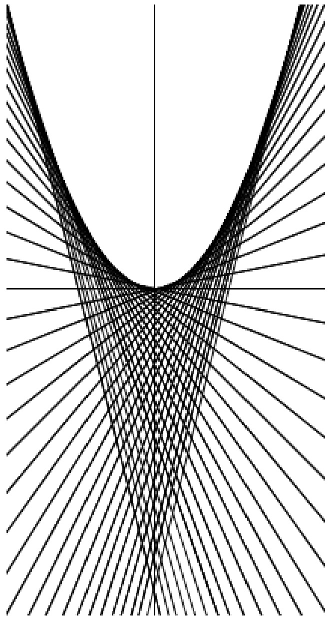
$B_g = \lim\limits_{h \to g} g \cap h$.

<u>Beispiel</u>: Die Tangenten der Normalparabel haben die Form

$g\colon y = 2 \cdot a \cdot x - a^2$ und $h\colon y = 2 \cdot b \cdot x - b^2$.

Sie schneiden einander in $\left(\frac{a+b}{2};\ a \cdot b\right)$;

für $b \to a$ ergibt sich $\left(a;\ a^2\right)$, die Tangenten hüllen also tatsächlich die Normalparabel ein.



9. Ableitungen in anderen Versionen

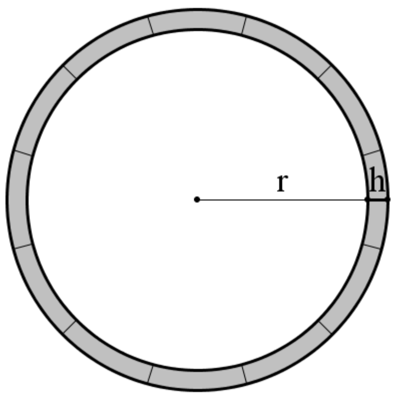
Die Flächeninhaltsfunktion A mit $A(r) = \pi \cdot r^2$ gibt den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r an und $U(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$ dessen Umfang.

Offenbar gilt $A'(r) = U(r)$.

Ist das Zufall? Steckt etwas dahinter?

Die Ableitung ist als Limes von lokalen Änderungsraten definiert.

Der Zähler $A(r+h) - A(r)$ der mittleren Änderungsrate ist die Kreisringfläche.



Zerschneidet man den Kreisring, so bekommt man (etwa) ein Rechteck:

Die Höhe des Rechtecks ist h. Die Breite des Rechtecks ist der Umfang $U(r)$ des Kreises.

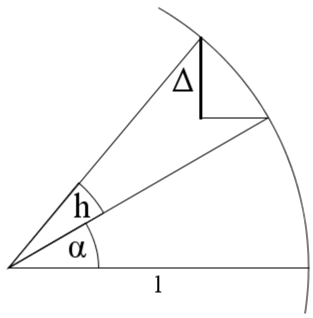
Daher gilt für kleine h die Beziehung $A(r+h)-A(r)\approx h\cdot U(r)$, und Division durch h liefert $\frac{A(r+h)-A(r)}{h}\approx U(r)$. Für $h\to 0$ ist also $A'(r)=U(r)$.

Tragend bei dieser Argumentation ist die <u>Grundvorstellung der Ableitung</u> als Grenzwert von mittleren Änderungsraten; es wäre eine <u>Fehlvorstellung</u>, sich die Ableitung nur als Tangentensteigung vorzustellen.

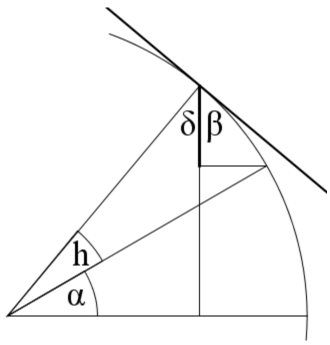
10. Die Ableitung der Sinus-Funktion

Für die Ableitung der Sinusfunktion braucht man den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta}{h}=\frac{\sin(\alpha+h)-\sin\alpha}{h}.$$



Der allgemeine Zähler $\Delta=\sin(\alpha+h)-\sin\alpha$ findet sich beim Einheitskreis wieder.



Problematisch ist nur der Nenner h.

Um zu einem Zusammenhang mit Δ zu kommen, ist das <u>Bogenmaß</u> unabdingbar. Mit $\beta:=\alpha+h$ und $\delta:=90°-\beta$ sieht man, dass $\frac{\Delta}{h}\approx\cos\beta\xrightarrow{h\to 0}\cos\alpha$ gilt.

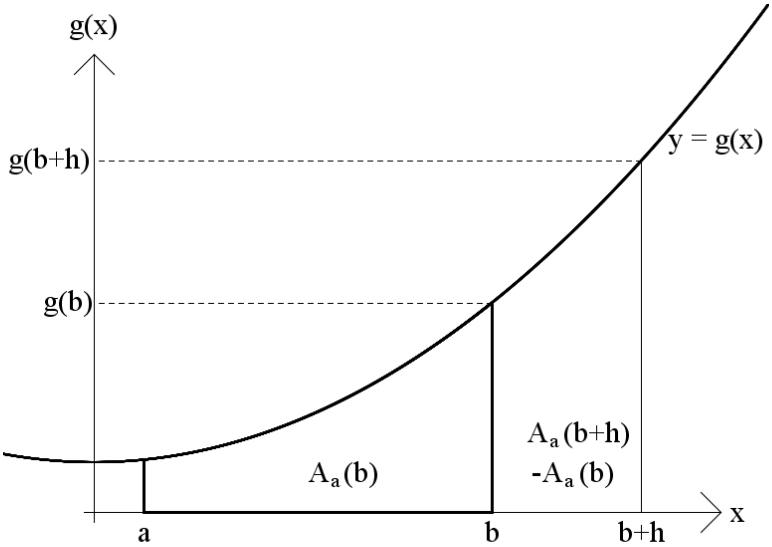
Übrigens: Die Ableitung des Sinus ist die <u>einzige Begründung</u>, das <u>Bogenmaß</u> einzuführen!

11. Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Um einen Flächeninhalt zu bestimmen, kann es sinnvoll sein, zunächst die Änderung des Flächeninhalts zu bestimmen.

Wir interessieren uns für den Flächeninhalt zwischen Graph (zu g) und Rechtsachse im Bereich von a bis b. Dabei soll der Graph g oberhalb der Rechtsachse liegen und über [a; b] monoton steigend sein.

Die Flächeninhaltsfunktion A_a beschreibt diesen Flächeninhalt. Der Zähler $A_a(b+h)-A_a(b)$ der mittleren Änderungsrate ist leicht zu finden und lässt sich leicht abschätzen:



$h \cdot g(b) \leq A_a(b+h) - A_a(b) \leq h \cdot g(b+h)$ führt nach Division durch h und anschließendem Grenzübergang für $h \to 0$ zu $g(b) \leq A_a'(b) \leq g(b)$ und damit zu $A_a'(b) = g(b)$.

Das heißt: Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion ist die Ausgangsfunktion g.

Diese Begründung lässt sich leicht für monoton fallende Funktionen modifizieren; die Aussage gilt sogar für (fast) beliebige Funktionen, wenn man man das Integrationsintervall in Monotoniebereiche aufteilt. Verläuft der Graph unterhalb der Rechtsachse, so ergibt sich ein negativer Flächeninhalt.

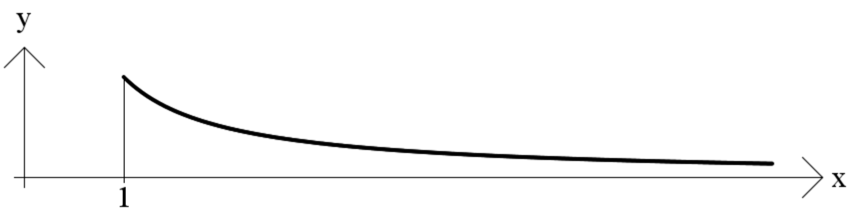
Diese Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kommt ohne Potenzsummen aus.

Tragend bei diesem Weg ist die <u>Grundvorstellung der Ableitung</u> als Grenzwert von mittleren Änderungsraten. Man versteht diesen Weg nicht, wenn man die Ableitung nur als Tangentensteigung kennt.

Dies spricht gegen die <u>Fehlvorstellung</u>, man könne bei der Ableitung auf die Deutung als lokaler Änderungsrate verzichten.

12. Eine Paradoxie

TORRICELLI betrachtete den Graphen zu $y = \frac{1}{x}$ für $x > 1$.



Der von Graph und Rechtsachse eingeschlossene Flächeninhalt beträgt

$$A = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^\infty = \infty \,.$$

Rotiert der Graph um die x-Achse, ergibt sich das Volumen $V = \pi \cdot \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{-\pi}{x}\Big|_1^\infty = \pi$.

Das Volumen ist endlich, obwohl die Querschnittsfläche es nicht ist. Man kann in den Rotationskörper Farbe hineingießen und braucht dazu nur endlich viel Farbe. Gleichwohl lässt sich die Querschnittsfläche nicht mit endlich viel Farbe anmalen.

Dies Paradoxon verschärft sich noch, wenn man die (in der Schule nicht mehr zu behandelnde) Mantelfläche heranzieht: Sie hat den Wert

$$M = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^\infty y \cdot \sqrt{1 + \left(y'\right)^2} \cdot dx = 2 \cdot \pi \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot dx = \infty \,.$$

Man kann den Rotationskörper mit endlich viel Farbe anfüllen, aber seine Mantelfläche nicht mit endlich viel Farbe anmalen!

Hierhin passt die Fehlvorstellung, wonach das Unendliche ein einfacher und intuitiv gut zugänglicher Begriff sei.

Schülerinnen und Schüler schlagen hier auch vor, dass der naive Begriff des Unendlichen beizubehalten sei, aber dass offensichtlich die ganze Integralrechnung Quatsch sei. Aus Sicht der Schülerinnen und Schüler ist ihr Gegenvorschlag nicht sofort von der Hand zu weisen; hier ist die höhere sachliche Kompetenz der Lehrperson gefragt.

13. Integration der Hyperbel

Mitunter ist es sinnvoll, dass die Lehrperson Anleihen bei ihren Kenntnissen macht, auch wenn diese den Lernenden nicht zu vermitteln sind.

Beispiel: Man kann sich auf folgendem Weg dem bestimmten Integral $\int_1^b \frac{dx}{x}$ (für $b > 1$) nähern: Es ist $\int_1^b \frac{dx}{x^{1-h}} = \left.\frac{x^h}{h}\right|_1^b = \frac{b^h - 1}{h} \xrightarrow{h\to 0} \ln b$.

Dieser Gedankengang ist auch mathematisch interessant: Bekanntlich ist für das Bestehen der Gleichung

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\cdot dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\cdot dx$$

die gleichmäßige Konvergenz der Funktionsfolge (f_n) hinreichend; allerdings ist die (in diesem Beispiel gar nicht bestehende) gleichmäßige Konvergenz nicht notwendig; schon die (hier bestehende) monotone Konvergenz reicht hin[6].

Hier ist ein Grundproblem des schulischen Analysis-Unterrichts angesprochen: Ob die intuitiven Gedankengänge der Schülerinnen und Schüler mathematisch korrekt sind oder nicht, kann mitunter nur die Lehrperson entscheiden.

Bei dem Ausdruck $\lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}$ lässt sich gut die Fehlvorstellung behandeln, dass gleichzeitig auszuführende Grenzübergänge auch nacheinander durchgeführt werden können: Der Fehler, erst den Zähler separat zu behandeln, liegt nahe.

Analoges gilt für $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, wo man auch versucht ist, zunächst die Klammer separat zu behandeln.

---

[6] Heuser, H. ([9]1991): Lehrbuch der Analysis; Teil 1; Stuttgart: Teubner; S. 580; Satz 108.3. Dabei wird die Integrierbarkeit der Hyperbel vorausgesetzt.