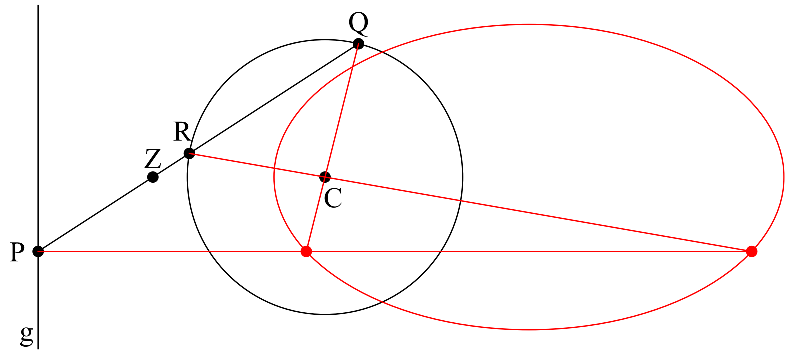
Jörg MEYER, Hameln April 2024

Ein CAS-Weg zu Kegelschnitten

Gegeben: Kreis um C mit Radius r und Gerade g außerhalb des Kreises sowie Punkt Z auch außerhalb des Kreises.



Eine Gerade dreht sich um Z und schneidet g in P und den Kreis in R und in Q. Der Schnittpunkt der Senkrechten zu g durch P mit CQ bzw. CR führt zu zwei (roten) Ellipsenpunkten.

Ist das wirklich eine Ellipse? Eine synthetische Begründung erfordert die (nicht ganz triviale) Bestimmung der Brennpunkte (wie in Blažek(2021)), so dass ein analytischer Weg mit CAS-Hilfe mit weniger Aufwand zum Ziel führt.

Koordinatisierung: $Z=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $g: x=-1$; $C=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$, Kreisradius r.

Die Dreh-Gerade hat die Gleichung $y=m\cdot x$; sie schneidet g in $P=\begin{pmatrix}-1\\-m\end{pmatrix}$. Der Kreis hat die Gleichung $(x-c)^2+y^2=r^2$, und die Schnittpunkte mit der Dreh-Geraden sind $\frac{c\pm\sqrt{(m^2+1)\cdot r^2-c^2\cdot m^2}}{m^2+1}\cdot\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=:v_\pm\cdot\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$. RC bzw. QC haben die Gleichung $y=\frac{m\cdot v_\pm}{v_\pm-c}\cdot(x-c)$.

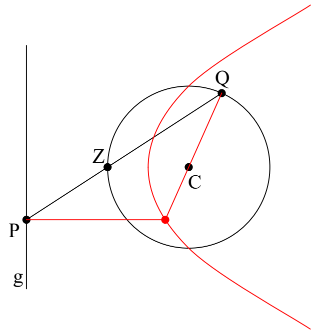
Die Senkrechte durch P hat die Gleichung $y=-m$, so dass die roten Schnittpunkte die Form $\begin{pmatrix}c-1+c/v_\pm\\-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ haben, woraus $m=-y$ und

$\pm\sqrt{(y^2+1)\cdot r^2-c^2\cdot y^2}\cdot(x-c+1)=a\cdot(y^2+1)-c\cdot(x-c+1)$ bzw. mit CAS-Hilfe

$$-(y^2+1)\cdot\left(x^2\cdot(c^2-r^2)+2\cdot x\cdot(c\cdot r^2-r^2-c^3)+c^2\cdot y^2-(c\cdot r-r-c^2)\cdot(c\cdot r-r+c^2)\right)=0$$

folgt. Man hat daher eine zur x-Achse symmetrische quadratische Kurve mit den Nullstellen

$$x_1=c-\frac{r}{c+r};\ x_2=c+\frac{r}{c-r}.$$



Ist $r = c$, liegt also Z auf dem Kreisrand, so hat man nur eine Nullstelle, und die resultierende Gleichung

$$-2 \cdot x + y^2 + 2 \cdot r - 1 = 0$$

beschreibt eine Parabel.

Anderenfalls ist die Mitte der Nullstellen gegeben durch $x_m = c + \frac{r^2}{c^2 - r^2}$.

Eine Verschiebung um x_m in x-Richtung führt zu der deutlich übersichtlicheren Gleichung

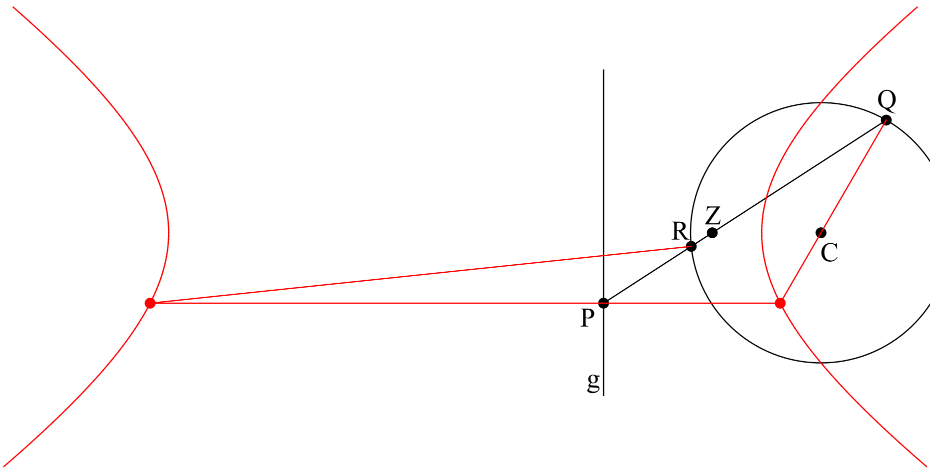
$$x^2 \cdot \left(c^2 - r^2\right)^2 + y^2 \cdot c^2 \cdot \left(c^2 - r^2\right) = c^2 \cdot r^2.$$

Für $c > r$ (d.h. Z liegt außerhalb des Kreises) hat man eine Ellipse, für $c < r$ (d.h. Z liegt innerhalb des Kreises) eine Hyperbel.

Für $c > r$ hat man die Gleichung $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{c^2 \cdot r^2}{\left(c^2 - r^2\right)^2}\right)} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{r^2}{c^2 - r^2}\right)} = 1$ mit den Parametern

$a = \dfrac{c \cdot r}{c^2 - r^2}$; $b = \dfrac{r}{\sqrt{c^2 - r^2}}$.

Für $c < r$ ergibt sich $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{c^2 \cdot r^2}{\left(r^2 - c^2\right)^2}\right)} - \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{r^2}{r^2 - c^2}\right)} = 1$ mit den Parametern $a = \dfrac{c \cdot r}{r^2 - c^2}$; $b = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - c^2}}$.



Lit.:

Jiří Blažek (2021): On a Chasles Construction of Cartesian Ovals. In: Proceedings of the 26th Asian Technology Conference in Mathematics, p. 308-317.