Jörg MEYER, Hameln

Baryzentrische Dreiecksgeometrie

Eine Einführung

Dieser Text[1] wird in unregelmäßigen Abständen ergänzt und wurde zuletzt am
12. 3. 2025
aktualisiert.

[1] Dies ist eine ausführlichere Version von J. Meyer: Besondere Punkte des Dreiecks. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984. Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker, S. 235 - 238.

Inhalt

1 Einleitung

Es ist in der Tat bewunderungswürdig, dass eine so einfache Figur wie das Dreieck so unerschöpflich an Eigenschaften ist.

(Crelle; Sammlung mathematischer Aufsätze I, 1821, S. 176)

... wie sich denn überhaupt immer wieder zeigt, dass die so häufig zu hörende Meinung, die Probleme der elementaren Geometrie seien erschöpft und die Beschäftigung mit ihnen sei unfruchtbar, von wenig wirklicher Sachkenntnis ihrer Vertreter zeugt.

(Strubecker, MNU 1962/63, S. 390)

Algebra (...), diese Disziplin, welche dem menschlichen Verstande so hilfreich ist und ihn zu führen scheint, ohne ihn zu erleuchten.

(Voltaire; Philosophische Briefe; 1. Anhang zum 17. Brief)

Tudo isso, que é tanto, é pouco para o que eu quero. (…)
Há em cada canto da minha alma um altar a um deus diferente.

(A. de Campos, Passagem das horas)

Im Geometrieunterricht des Sekundarbereichs I haben die Schülerinnen und Schüler die Mittelsenkrechten, die Winkelhalbierenden usw. als besondere Linien des Dreiecks sowie – damit verbunden – die jeweiligen Schnittpunkte als besondere Punkte kennengelernt. Stehen im Sekundarbereich II Trigonometrie und etwas Lineare Algebra (Geraden und deren Schnittpunkte) zur Verfügung, so lassen sich die oben erwähnten Gebiete auch rechnerisch behandeln. Identifiziert man (der Einfachheit halber) Ortsvektoren und Punkte, so ergeben sich beispielsweise die folgenden Ergebnisse (das Dreieck ABC sei in üblicher Weise benannt):

Seitenhalbierendenschnittpunkt $S = \frac{A+B+C}{3}$

(Innen–)Winkelhalbierendenschnittpunkt $W = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{a+b+c}$ usw.

Die Struktur dieser Formeln legt eine (zunächst als Abkürzung interpretierbare) Schreibweise $S = (1\,;1:1)$, $W = (a:b:c)$ usw. nahe; der Doppelpunkt dient der Unterscheidung gegenüber den gewöhnlichen affinen Koordinaten.

Nun ist es nur noch ein kleiner Schritt, diese „neuen“ Koordinaten als *homogene baryzentrische* Koordinaten aufzufassen und mit ihnen konsequent zu rechnen. Die Vorteile werden bald offensichtlich; das Kopunktalitätskriterium (Satz von CEVA) ist besonders einfach zu beweisen und anzuwenden, Schnittpunktsbestimmungen verlaufen alle nach demselben Schema.
Der Satz von CEVA sagt aus, unter welcher Bedingung sich die drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem einzigen Punkt schneiden. Der Satz wird hier bewiesen und angewendet auf Seitenhalbierende, Winkelhalbierende, Höhen, Mittelsenkrechten sowie auf GERGONNE- und NAGELgeraden, den Mittenpunkt und viele weitere Punkte und Geraden. Gleichzeitig wird in die baryzentrische Dreiecksgeometrie eingeführt.
Oftmals sind die Existenz eines Punktes oder seine Eigenschaften auch elementargeometrisch zu bekommen; dies wird in dieser Datei fast immer konsequent ignoriert, um die Möglichkeiten (und auch Grenzen) der baryzentrischen Koordinaten zu zeigen. Geometrische Argumentationen werden durch algebraische ersetzt, die sich allerdings mitunter als aufwändig gestalten.
Natürlich muss bei diesem Thema eine rigide Stoffauswahl vorgenommen werden; immerhin beschreibt Clark KIMBERLING (*1942) auf `https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html` etwa 40.000 verschiedene besondere Punkte des Dreiecks, von denen hier nur ein verschwindend kleiner Teil dargestellt wird; dazu gehören natürlich die „klassischen“ besonderen Punkte und diejenigen, die mein (subjektives) Interesse gefunden haben. (Übrigens ist die erwähnte EnzykBopädie insofern unvollständig, als die dort aufgeführten Punkte eine gewisse symmetriebeziehung erfüllen müssen, die etwa von den BROCARD-Punkten nicht erfüllt wird.)
Die Nomenklatur der Enzyklopädie wird hier zitiert (die beonderen Punkte haben die Bezeichnung Xn).
Der Text setzt keine Vorkenntnisse aus der projektiven Geometrie voraus; was davon benötigt wird, wird hier entwickelt.

2 Zusammenstellung

Die Symbole werden im folgenden Abschnitt erläutert.

2.1 Punkte

Angegeben ist stets nur die erste Koordinate, ggf. auch Begleiter

X1 W Schnitt der Innen-Winkelhalbierenden (a $W_a = (-a : b : c)$

X2 S Schnitt der Seitenhalbierenden (1

X3 M Umkreismitte $(\sin(2\cdot\alpha)$

X4 H Höhenschnitt $(\tan\alpha$

X5 K Zentrum 9-Pkt-Kreis $(\sin(2\cdot\beta)+\sin(2\cdot\gamma)$

X6 Γ Grebe/Lemoine $(a^2$

X7 G Gergonne $(r_a = (\frac{1}{\sigma_a} = (\tan\frac{\alpha}{2}$ $G_a = (-r : r_c : r_b)$

X8 N Nagel $(\sigma_a = (\cot\frac{\alpha}{2}$ $N_a = (-\sigma : \sigma_c : \sigma_b)$

X9 T Mittenpunkt $(a\cdot\sigma_a = (1+\cos\alpha$ $T_a = (a\cdot\sigma : b\cdot\sigma_c : c\cdot\sigma_b)$

X10 Sp Spieker (b+c

X11 F_i Feuerbach $(\sigma_a\cdot(b-c)^2$ $F_a = \left(-\sigma\cdot(b-c)^2 : \sigma_c\cdot(c+a)^2 : \sigma_b\cdot(b+a)^2\right)$

X12 Φ $(\frac{(b+c)^2}{\sigma_a}$ $\Phi_a = \left(-\frac{(b+c)^2}{\sigma} : \frac{(a-c)^2}{\sigma_c} : \frac{(a-b)^2}{\sigma_b}\right)$

X13 Fermat $(\frac{a}{\sin(\alpha+60°)}$

X14 $(\frac{a}{\sin(\alpha-60°)}$

X15 1. isodyn $(a\cdot\sin(\alpha+60°)$

X16 2. isodyn $(a\cdot\sin(\alpha-60°)$

X17 1. Napoleon $(\frac{a}{\sin(\alpha+30°)}$

X18 2. Napoleon $\left(\frac{a}{\sin(\alpha-30°)}\right.$

X19 Cl Clawson $(a\cdot\tan\alpha$ $CL_c = (a\cdot\tan\alpha : b\cdot\tan\beta : -c\cdot\tan\gamma)$

X20 L Longchamps $(-\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma$

X30 Eu Schnitt EULER- und Ferngerade

X39 Brocard-Mitte $\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right.$

X40 V Bevan

X55 Za Ähnlichkeitszentrum (In, Um) $(a^2\cdot\sigma_a$

X56 Z_i Ähnlichkeitszentrum (In, Um) $(a^2\cdot r_a$

X57 Ξ $(a\cdot r_a = (1-\cos\alpha$ $\Xi_a = (a\cdot r : b\cdot r_c : c\cdot r_b)$

X99 St Steiner $\left(\frac{1}{b^2-c^2}\right.$

X115 Zentrum Kiepert-Hyperbel

X175 Z_{aus} Zentrum Soddy-Außenkreis $(a-r_a$ $Z_{aus,\,a} = \frac{-\sigma_a\cdot W_a+(r_b+r_c-r)\cdot G_a}{-\sigma_a+(r_b+r_c-r)}$

X176 Z_{inn} Zentrum Soddy-Innenkreis $(a+r_a$ $Z_{inn,\,a} = \frac{\sigma_a\cdot W_a+(r_b+r_c-r)\cdot G_a}{\sigma_a+(r_b+r_c-r)}$

X481 E_1 1. Eppstein $(a-2\cdot r_a$

X482 E2 2. Eppstein $(a+2\cdot r_a$

2.2 Kreise

Umkreis: $Um(P) = a^2\cdot y\cdot z + b^2\cdot z\cdot x + c^2\cdot x\cdot y = 0$ für $P = (x : y : z)$

Allgemein $Um(P) = (x+y+z)\cdot(r\cdot x+s\cdot y+t\cdot z)$

Inkreis: $Um(P) = (x+y+z)\cdot\frac{x\cdot\sigma_a^2+y\cdot\sigma_b^2+z\cdot\sigma_c^2}{4}$

Ankreis um W_a: $Um(P) = (x+y+z)\cdot\frac{x\cdot\sigma^2+y\cdot\sigma_c^2+z\cdot\sigma_b^2}{4}$

FEUERBACH-Kreis: $Um(P) = (x+y+z)\cdot\left(\frac{x\cdot\Sigma_a+y\cdot\Sigma_b+z\cdot\Sigma_c}{4}\right)$

<u>Beikreise</u>: $\mathrm{Um}(P) = (x+y+z)\cdot x\cdot b^2$ durch B und C; berührt b in C

$\mathrm{Um}(P) = (x+y+z)\cdot y\cdot c^2$ durch C und A; berührt c in A

$\mathrm{Um}(P) = (x+y+z)\cdot z\cdot a^2$ durch A und B; berührt a in B

3 Notation und Elementar-Trigonometrie

Für $P=(p:q:r)$ sei $P^0:=\frac{(p:q:r)}{p+q+r}$ die normierte Darstellung.

Mit $\sigma:=a+b+c$; $\sigma_a:=-a+b+c$; $\sigma_b:=a-b+c$; $\sigma_c:=a+b-c$ und $\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c=\sigma$ gilt:

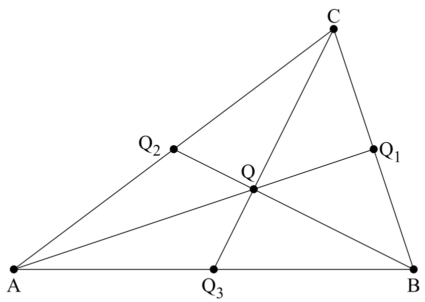
Das Dreieck ABC hat den Flächeninhalt $\boxed{\Delta=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\sigma\cdot\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c}}$, den *Um*kreisradius $R=\frac{c}{2\cdot\sin\gamma}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot\Delta}$, den *In*kreisradius $\boxed{r=\frac{2\cdot\Delta}{\sigma}}$ und die *An*kreisradien $\boxed{r_a=\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_a}}$ usw. Damit ist $\boxed{\Delta=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}}$ sowie wegen $\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c=\sigma$ auch $\boxed{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}}$ und daher $\boxed{r\cdot(r_a\cdot r_b+r_b\cdot r_c+r_c\cdot r_a)=r_a\cdot r_b\cdot r_c}$. Wegen[2]

$$\sigma\cdot(\sigma_b\cdot\sigma_c+\sigma_c\cdot\sigma_a+\sigma_a\cdot\sigma_b)-\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c=8\cdot a\cdot b\cdot c \text{ ist}$$

$$32\cdot R\cdot\Delta=8\cdot a\cdot b\cdot c=8\cdot\Delta\cdot\left(\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_a}+\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_b}+\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_c}-\frac{2\cdot\Delta}{\sigma}\right)=8\cdot\Delta\cdot(r_a+r_b+r_c-r)$$

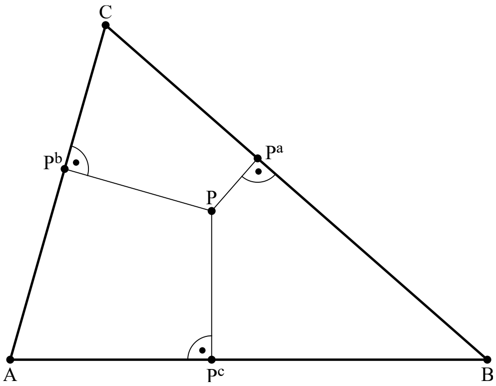
und daher $\boxed{4\cdot R=r_a+r_b+r_c-r}$.

Die *Spurpunkte* eines Punktes Q sind die Schnittpunkte der Ecktransversalen mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten; die Bezeichnungen entnimmt man der Figur.
Das Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ wird als CEVA-Dreieck zu Q bezeichnet.



[2] Coxeter, Introduction to Geometry. 1969: Wiley, ch. 1.5.

Die *Fußpunkte* von Q werden mit einem oberen Index gekennzeichnet.



Abkürzungen:

$$\Sigma := a^2 + b^2 + c^2;\ \Sigma_a := -a^2 + b^2 + c^2;\ \Sigma_b := a^2 - b^2 + c^2;\ \Sigma_c := a^2 + b^2 - c^2$$

mit

$$\Sigma_a + \Sigma_b + \Sigma_c = \Sigma\ .$$

Es gilt

$$a \cdot \sigma_a + b \cdot \sigma_b + c \cdot \sigma_c = -a^2 - b^2 - c^2 + 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$$

und analog

$$a^2 \cdot \Sigma_a + b^2 \cdot \Sigma_b + c^2 \cdot \Sigma_c = -a^4 - b^4 - c^4 + 2 \cdot \left(a^2 \cdot b^2 + b^2 \cdot c^2 + c^2 \cdot a^2\right)$$
$$= \sigma \cdot \sigma_a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c$$

Wegen des Cosinussatzes ist

$$\sigma_b \cdot \sigma_c = 2 \cdot b \cdot c \cdot (1 - \cos\alpha);\ \ \sigma \cdot \sigma_a = 2 \cdot b \cdot c \cdot (1 + \cos\alpha)$$

und

$$\Sigma_a = 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha;\ \ \Sigma_b = 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos\beta;\ \ \Sigma_c = 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

sowie

$$\cot\alpha = \frac{R}{a \cdot b \cdot c} \cdot \Sigma_a$$

und

$$\Sigma_a = 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = \frac{2 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = 4 \cdot \Delta \cdot \cot\alpha$$

mit der Dreiecksfläche Δ.

Immer wieder werden die Beziehungen

$$1 + \cos\alpha = 2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2};\ \ 1 - \cos\alpha = 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

verwendet. Daher ist

$$\sigma\cdot\sigma_a=\Sigma_a+2\cdot b\cdot c=2\cdot b\cdot c\cdot\left(1+\cos\alpha\right)=\boxed{4\cdot b\cdot c\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=\sigma\cdot\sigma_a}$$

und

$$\sigma_b\cdot\sigma_c=-\Sigma_a+2\cdot b\cdot c=2\cdot b\cdot c\cdot\left(1-\cos\alpha\right)=\boxed{4\cdot b\cdot c\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sigma_b\cdot\sigma_c}\,.$$

Es gilt auch

$$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\left(a+b\right)\cdot\sigma_a\cdot\sigma_b}{2\cdot a\cdot b\cdot c}\;;\quad\cos\alpha-\cos\beta=-\frac{\left(a-b\right)\cdot\sigma_c\cdot\sigma}{2\cdot a\cdot b\cdot c}$$

zudem ist

$$\boxed{\sin\alpha=\sin\beta\cdot\cos\gamma+\sin\gamma\cdot\cos\beta};\quad\boxed{\cos\alpha+\cos\beta\cdot\cos\gamma=\sin\beta\cdot\sin\gamma}$$

und daher, falls das Dreieck keinen rechten Winkel hat,

$$\begin{aligned}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma&=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\\&=\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\cdot\left(\cos\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\beta\right)\\&=\frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\\&=\boxed{\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=:\tau}\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}&\cot\alpha\cdot\cot\beta+\cot\beta\cdot\cot\gamma+\cot\gamma\cdot\cot\alpha\\&\quad=\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma\cdot(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)\\&\quad=\cot\alpha\cdot\cot\beta\cdot\cot\gamma\cdot(\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma)\\&\quad=1\end{aligned}$$

sowie

$$\tan\left(\alpha+\beta\right)=\tan\left(180^\circ-\gamma\right)=-\tan\gamma$$

und

$$\tan\beta+\tan\gamma=\frac{\sin\beta\cdot\cos\gamma+\sin\gamma\cdot\cos\beta}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}=\frac{\sin\left(2\cdot\alpha\right)}{2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

und

$$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta+\cos\beta\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

sowie

$$\begin{aligned}-a\cdot\sigma_a+b\cdot\sigma_b+c\cdot\sigma_c &= -a\cdot(-a+b+c)+b\cdot(a-b+c)+c\cdot(a+b-c)\\ &= a^2-b^2+b\cdot c+b\cdot c-c^2=2\cdot b\cdot c-\Sigma_a\\ &= 2\cdot b\cdot c-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\\ &= 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\frac{1-\cos\alpha}{a}\\ &= 4\cdot b\cdot c\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

3.1 Cosinussummen und Kreisradien

Mit dem Umkreisradius R gilt

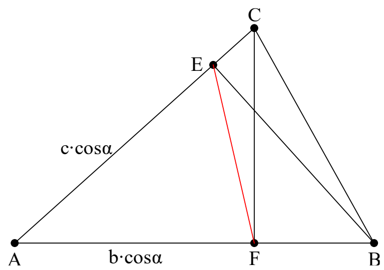
$$\begin{aligned}a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma &= a\cdot\cos\alpha+b\cdot\frac{c-b\cdot\cos\alpha}{a}+c\cdot\frac{b-c\cdot\cos\alpha}{a}\\ &= \frac{-\Sigma_a\cdot\cos\alpha+2\cdot b\cdot c}{a}=\frac{-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha+2\cdot b\cdot c}{a}=2\cdot b\cdot c\cdot\frac{\sin^2\alpha}{a}\\ &= b\cdot c\cdot\frac{\sin\alpha}{R}=\boxed{\frac{2\cdot\Delta}{R}=a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma}\end{aligned}$$

Die Summanden $a\cdot\cos\alpha$ usw. sind die Seitenlängen EF usw. des Höhen-Fuß-punkt-Dreiecks, denn mit

$$AF=b\cdot\cos\alpha;\quad AE=c\cdot\cos\alpha$$

gilt wegen des Cosinussatzes oder wegen der Ähnlichkeit von AEF zu ABC, dass

$$EF=a\cdot\cos\alpha\,.$$



Es gilt auch

$$\frac{2\cdot\Delta}{R}=R\cdot\left(\sin(2\cdot\alpha)+\sin(2\cdot\beta)+\sin(2\cdot\gamma)\right)$$

und daher

$$\boxed{\sin(2\cdot\alpha)+\sin(2\cdot\beta)+\sin(2\cdot\gamma)=\frac{2\cdot\Delta}{R^2}=4\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}\,.$$

Mit den Berührkreisradien $r = \frac{2\cdot\Delta}{\sigma}$; $r_a = \frac{2\cdot\Delta}{\sigma_a}$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &= \cos\alpha+\frac{c-b\cdot\cos\alpha}{a}+\frac{b-c\cdot\cos\alpha}{a}\\
&= \frac{-\sigma_a\cdot\cos\alpha+b+c}{a} = \frac{-\frac{2\cdot b\cdot c}{\sigma}\cdot\left(1+\cos\alpha\right)\cdot\cos\alpha+b+c}{a}\\
&= \frac{-2\cdot b\cdot c\cdot\left(\cos\alpha+1-\sin^2\alpha\right)+\left(b+c\right)\cdot\sigma}{a\cdot\sigma}\\
&= \frac{-\sigma\cdot\sigma_a+2\cdot b\cdot c\cdot\sin^2\alpha+\left(b+c\right)\cdot\sigma}{a\cdot\sigma}\\
&= \frac{a\cdot\sigma+2\cdot b\cdot c\cdot\sin^2\alpha}{a\cdot\sigma} = \frac{a\cdot\sigma+2\cdot b\cdot c\cdot\frac{a}{2\cdot R}\cdot\sin\alpha}{a\cdot\sigma}\\
&= \frac{\sigma+\frac{2\cdot\Delta}{R}}{\sigma} = \boxed{1+\frac{r}{R}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}
\end{aligned}$$

und

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=\cos\alpha+\frac{c-b\cdot\cos\alpha}{a}-\frac{b-c\cdot\cos\alpha}{a}$$

$$=\frac{\sigma_b\cdot\cos\alpha+c-b}{a}=\frac{\frac{2\cdot b\cdot c}{\sigma_c}\cdot(1-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha+c-b}{a}$$

$$=\frac{2\cdot b\cdot c\cdot\left(\cos\alpha-1+\sin^2\alpha\right)+(c-b)\cdot\sigma_c}{a\cdot\sigma_c}$$

$$=\frac{2\cdot b\cdot c\cdot\left(-\frac{\sigma_b\cdot\sigma_c}{2\cdot b\cdot c}\right)+2\cdot b\cdot c\cdot\sin^2\alpha+(c-b)\cdot\sigma_c}{a\cdot\sigma_c}$$

$$=\frac{-\sigma_b\cdot\sigma_c+2\cdot b\cdot c\cdot\sin^2\alpha+(c-b)\cdot\sigma_c}{a\cdot\sigma_c}$$

$$=\frac{-a\cdot\sigma_c+2\cdot b\cdot c\cdot\sin^2\alpha}{a\cdot\sigma_c}=\frac{-a\cdot\sigma_c+2\cdot b\cdot c\cdot\frac{a}{2\cdot R}\cdot\sin\alpha}{a\cdot\sigma_c}$$

$$=-1+\frac{\frac{2\cdot\Delta}{R}}{\sigma_c}=\boxed{-1+\frac{r_c}{R}=\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma}.$$

Die Subtraktion der beiden letzten eingekastelten Formeln liefert

$$\boxed{\cos\gamma=1-\frac{r_c-r}{2\cdot R}}.$$

4 Der Satz von CEVA

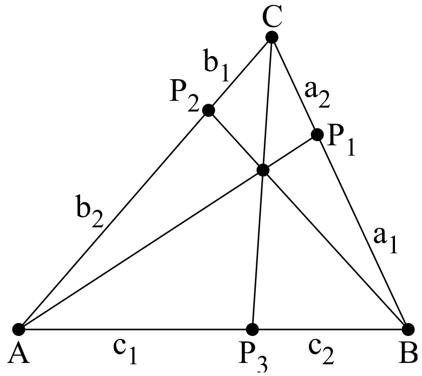
... ist grundlegend für fast alle Kopunktalitätsaussagen, die sich auf Ecktransversalen beziehen.

4.1 Beweis

Die Geraden AA‘, BB‘, CC‘ sind genau dann kopunktal in P, wenn

$$\frac{AP_3}{P_3B}\cdot\frac{BP_1}{P_1C}\cdot\frac{CP_2}{P_2A}=1$$

gilt.



Beweis der Notwendigkeit: Der Schnittpunkt sei P, und UVW sei der Flächeninhalt des Dreiecks UVW.

Wegen $\frac{AP_3}{P_3B}=\frac{AP_3P}{P_3BP}=\frac{AP_3C}{P_3BC}$ gilt $\frac{AP_3}{P_3B}=\frac{APC}{PBC}$ und analog $\frac{BP_1}{P_1C}=\frac{ABP}{APC}$ und $\frac{CP_2}{P_2A}=\frac{PBC}{ABP}$. Das Produkt der linken Seiten ist gleich dem Produkt der rechten Seiten, also 1.

Zum Beweis der Umkehrung nehme man an, dass $\frac{AP_3}{P_3B}\cdot\frac{BP_1}{P_1C}\cdot\frac{CP_2}{P_2A}=1$ gilt und dass AP die Seite BC in A* schneide. Dann gilt $\frac{AP_3}{P_3B}\cdot\frac{BA^*}{A^*C}\cdot\frac{CP_2}{P_2A}=1$ und damit $\frac{BP_1}{P_1C}=\frac{BA^*}{A^*C}$, woraus $A^*=P_1$ folgt.

Dies ist der Satz von Giovanni CEVA (1647-1734). Es ist egal, ob man c_1, c_2 usw. als echte Längen ansieht oder ob man mit den Verhältnissen $c_1:c_2$ usw. rechnet.

4.2 Berechnung des Schnittpunkts

Man kann den Punkt $P=Q$ auch ausrechnen. Zunächst ist $P_3=\dfrac{c_1\cdot B+c_2\cdot A}{c}$.

Wegen $\dfrac{CP}{PP_3}=\dfrac{b_1\cdot c}{b_2\cdot c_2}$ ist

$$P=\frac{b_1\cdot c\cdot C'+b_2\cdot c_2\cdot C}{b_1\cdot c+b_2\cdot c_2}=\frac{b_1\cdot\left(c_1\cdot B+c_2\cdot A\right)+b_2\cdot c_2\cdot C}{b_1\cdot c+b_2\cdot c_2}$$

$$=\frac{b_1\cdot c_2\cdot A+b_1\cdot c_1\cdot B+b_2\cdot c_2\cdot C}{b_1\cdot c_2+b_1\cdot c_1+b_2\cdot c_2}=:\boxed{\left(b_1\cdot c_2 : b_1\cdot c_1 : b_2\cdot c_2\right)=P}$$

Insbesondere gilt auch die Beziehung $\boxed{\dfrac{CP}{PP_3}=\dfrac{a_2}{a_1}+\dfrac{b_1}{b_2}}$, die Henricus Hubertus van Aubel (1830-1906) zugeschrieben wird.

Die Koordinaten von P sind <u>homogen</u>, d.h. es ist $\left(u:v:w\right)=\left(\lambda\cdot u:\lambda\cdot v:\lambda\cdot w\right)$ für $\lambda\neq 0$.

5 Punkte

5.1 Punkte im Inneren des Dreiecks

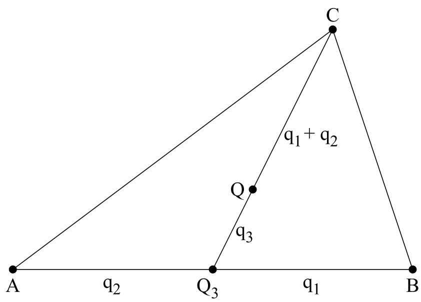
Es sei $Q=\left(q_1 : q_2 : q_3\right)$ ein Punkt im *Inneren* des Dreiecks. Wegen

$$Q=\frac{q_1\cdot A+q_2\cdot B+q_3\cdot C}{q_1+q_2+q_3}=\frac{\left(q_1+q_2\right)\cdot\dfrac{q_1\cdot A+q_2\cdot B}{q_1+q_2}+q_3\cdot C}{q_1+q_2+q_3}$$

hat man mit

$$Q_3=\frac{q_1\cdot A+q_2\cdot B}{q_1+q_2}=\left(q_1 : q_2 : 0\right)$$

die Situation wie im Bild, bei dem an den Strecken *Verhältnisse* und *keine* Längen aufgetragen sind.

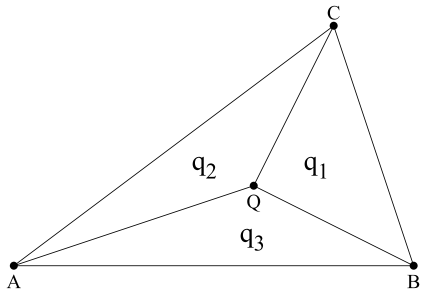


5.2 Interpretation der Punktkoordinaten

Ist Δ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC, so ist $\frac{q_1}{q_1+q_2}\cdot\Delta$ der Flächeninhalt des Dreiecks Q_3BC und $\frac{q_1+q_2}{q_1+q_2+q_3}\cdot\frac{q_1}{q_1+q_2}\cdot\Delta$ der Flächeninhalt des Dreiecks QBC.

Damit gilt $q_1 : q_2 : q_3 = QBC : QCA : QAB$ bzw. $\boxed{Q=\left(QBC : QCA : QAB\right)}$.

Die Koordinaten von P sind daher *Flächen*koordinaten. Es handelt sich um die (von August Ferdinand MÖBIUS (1790 – 1868) eingeführten) *baryzentrischen* Koordinaten. Die Summe der Koordinaten darf nicht verschwinden.



5.3 Cartesische Koordinaten als baryzentrische Koordinaten

Mit $O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $E_x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $E_y=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ lässt sich jeder Punkt $P=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ schreiben als

$P=O+x\cdot\left(E_x-O\right)+y\cdot\left(E_y-O\right)=\left(1-x-y\right)\cdot O+x\cdot E_x+y\cdot E_y$.

5.4 Mittelpunkte und Teilverhältnisse, Harmonie

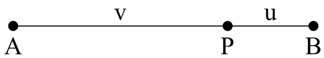
Der Mittelpunkt Z von $P=(p_1 : p_2 : p_3)$ mit $p:=p_1+p_2+p_3$ und

$Q=(q_1 : q_2 : q_3)$ mit $q:=q_1+q_2+q_3$ ist

$$Z=\frac{P^0+Q^0}{2}=\boxed{(p_1\cdot q+q_1\cdot p : p_2\cdot q+q_2\cdot p : p_3\cdot q+q_3\cdot p)=Z}\,.$$

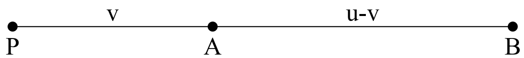
Für den Rest dieses Abschnitts seien u und v beide positiv.

Der Punkt $P=\frac{u\cdot A+v\cdot B}{u+v}=:(u:v)$ liegt im Inneren der Strecke AB:

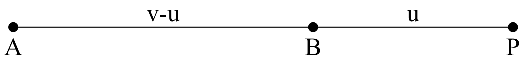


Die Lage von $P=(-u:v)=(u:-v)$ hängt vom Größenverhältnis ab:

Ist $u>v$, so ist $P=(u:-v)=\frac{u\cdot A-v\cdot B}{u-v}$ gleichbedeutend mit $A=\frac{(u-v)\cdot P+v\cdot B}{u}$; A liegt also im Inneren von PB:

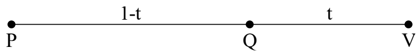


Ist $u<v$, so ist $P=(u:-v)=\frac{u\cdot A-v\cdot B}{u-v}=\frac{-u\cdot A+v\cdot B}{v-u}$ gleichbedeutend mit $B=\frac{(v-u)\cdot P+u\cdot A}{v}$; B liegt also im Inneren von AP:



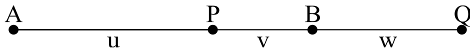
Teilt U die Strecke PQ innen im Verhältnis 1:t, so ist $U=\frac{t\cdot P^0+Q^0}{1+t}$.

Teilt V die Strecke PQ außen im Verhältnis 1:t, so ist $V=\frac{t\cdot P^0-Q^0}{t-1}$.



U und V liegen *harmonisch* zu P und Q.

Die Punkte P und Q liegen *harmonisch* zu A und B, falls $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$ ist. Dann ist auch $\frac{AP}{AQ}=\frac{PB}{QB}$, es liegen also auch A und B zu P und Q harmonisch.



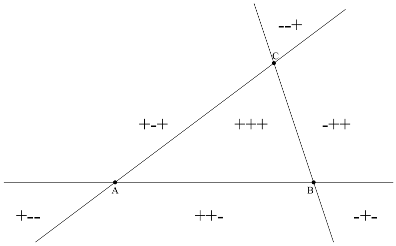
Im Fall der Harmonie ist $\boxed{w = v \cdot \frac{u+v}{u-v}}$ für $u > v$ (sonst liegt Q links von A).

Für $u = 2$ und $v = 1$ ist $w = 3$, daher beschreibt $u:v:w = 2:1:3$ ein harmonisches Verhältnis.

Mit $P = \frac{v \cdot A + u \cdot B}{u+v}$ ist $Q = \frac{-v \cdot A + u \cdot B}{u-v}$.

5.5 Punkte im Äußeren des Dreiecks

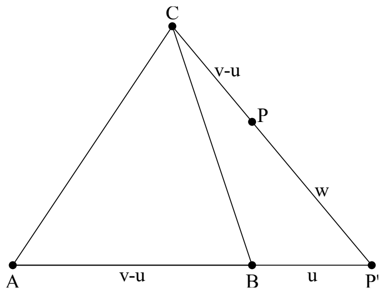
Liegt P *außerhalb* des Dreiecks, so ist eine der Koordinaten negativ. Insgesamt hat man daher nebenstehende Vorzeichenkonstellationen.



Mit $u > 0;\ v > 0;\ w > 0$ liegt $P = (-u : v : w)$ außerhalb des Dreiecks; die Gerade CP schneidet AB in $P' = (-u : v : 0) = \frac{-u \cdot A + v \cdot B}{v-u}$, also ist

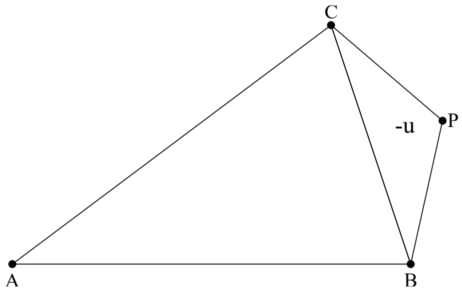
$B = \frac{(v-u) \cdot P' + u \cdot A}{v} = B$. Für $v > u$ liegt B zwischen A und P'. Für $v > u$ ist ferner

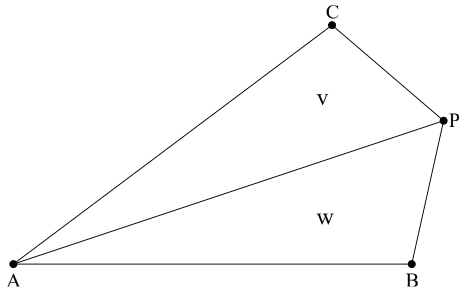
$$\frac{(v-u) \cdot P' + w \cdot C}{-u+v+w} = \frac{(v-u) \cdot \frac{-u \cdot A + v \cdot B}{-u+v} + w \cdot C}{-u+v+w}$$
$$= P$$



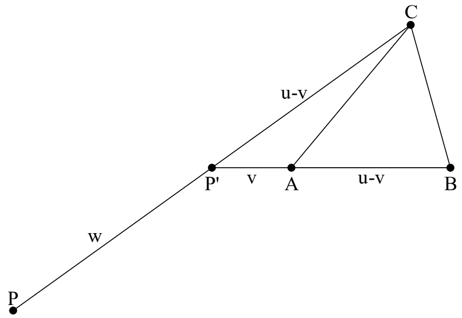
Man hat also die nebenstehenden Verhältnisse.

Fasst man in $P = (-u : v : w) = (PBC : PCA : PAB)$ die Koordinaten als Dreiecksflächen auf, so ist zu beachten, dass der Flächeninhalt PBC wegen des anderen Drehsinns als negativ zu nehmen ist.





Ist bei $P=(-u:v:w)$ nicht $v>u$, sondern $u<v$, so hat man die nebenstehende Graphik.



Ist $u=v$, so liegt $P'=(-1:1:0)$ nicht im Endlichen, also liegt P auf der Parallelen zu AB durch C.

6 Geraden

Bisher wurden nur *Punkte* berechnet. Man erleichtert sich das Leben, wenn man auch mit *Geraden* im baryzentrischen Kalkül umzugehen weiß.

6.1 Erster Weg

Orientiert man sich am Vorgehen der Vektorgeometrie, so wird man zunächst eine *Parameterform* einer Geraden durch zwei Punkte anstreben.
Es seien also $P=(p_1:p_2:p_3)$ und $Q=(q_1:q_2:q_3)$ mit $p:=p_1+p_2+p_3$ und $q:=q_1+q_2+q_3$ zwei Punkte. Jeder Punkt auf der durch P und Q bestimmten Geraden hat die Form

$$\begin{aligned}t\cdot P+(1-t)\cdot Q&=t\cdot\frac{p_1\cdot A+p_2\cdot B+p_3\cdot C}{p}+(1-t)\cdot\frac{q_1\cdot A+q_2\cdot B+q_3\cdot C}{q}\\&=\left(t\cdot\frac{p_1}{p}+(1-t)\cdot\frac{q_1}{q}:t\cdot\frac{p_2}{p}+(1-t)\cdot\frac{q_2}{q}:t\cdot\frac{p_3}{p}+(1-t)\cdot\frac{q_3}{q}\right)\\&=\left(p_1+\frac{1-t}{t}\cdot\frac{p}{q}\cdot q_1:p_2+\frac{1-t}{t}\cdot\frac{p}{q}\cdot q_2:p_3+\frac{1-t}{t}\cdot\frac{p}{q}\cdot q_3\right)\\&\left(p_1+s\cdot q_1:p_2+s\cdot q_2:p_3+s\cdot q_3\right)\end{aligned}$$

für $s=\frac{1-t}{t}\cdot\frac{p}{q}$, womit man die gesuchte *Parameterform* gefunden hat.

Nun ist in der Vektorgeometrie die *Normalenform* für viele Zwecke geschmeidiger; sie soll daher auch hier angestrebt werden. Für einen Punkt $R=(r_1:r_2:r_3)$ mit $r:=r_1+r_2+r_3$ auf PQ gelten die Gleichungen

$$\frac{r_i}{r}=\frac{p_i+s\cdot q_i}{p}\ (i=1,\ \ldots,\ 3)\text{ bzw. }\rho\cdot r_i=p_i+s\cdot q_i\ \text{ mit }\rho=\frac{p}{r}.$$

Dies ist damit gleichbedeutend, dass die folgende Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix}r_1&r_2&r_3\\p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\end{vmatrix}=r_1\cdot\underbrace{(p_2\cdot q_3-p_3\cdot q_2)}_{=:G_1}+r_2\cdot\underbrace{(p_3\cdot q_1-p_1\cdot q_3)}_{=:G_2}+r_3\cdot\underbrace{(p_1\cdot q_2-p_2\cdot q_1)}_{=:G_3}=0.$$

R erfüllt also die Gleichung

$$\boxed{r_1\cdot G_1+r_2\cdot G_2+r_3\cdot G_3=0}.$$

Dies ist das Analogon zur *Normalform* der Vektorgeometrie.

Wir fassen G_1, G_2, G_3 als die *baryzentrischen Geradenkoordinaten* der durch P und Q verlaufenden Gerade g auf und schreiben aufgrund der Homogenität dieser Koordinaten (im Unterschied zu Punktkoordinaten mit eckigen Klammern):

$$\boxed{g=[G_1:G_2:G_3]}.$$

Es gilt der *grundlegende Sachverhalt*

$$\boxed{P=(p_1:p_2:p_3) \text{ auf } g=[G_1:G_2:G_3] \Leftrightarrow P*g:=p_1\cdot G_1+p_2\cdot G_2+p_3\cdot G_3=0}.$$

6.2 Zweiter Weg

Ein *anderer Weg* zu Geraden gestaltet sich wie folgt: Eine Gerade mit dem allgemeinen Punkt P hat die Normalenform $P\cdot N=e$; mit

$P=(p_1:p_2:p_3)=\dfrac{p_1\cdot A+p_2\cdot B+p_3\cdot C}{p_1+p_2+p_3}$ ergibt sich dann

$$p_1\cdot\underbrace{(A\cdot N-e)}_{=:G_1}+p_2\cdot\underbrace{(B\cdot N-e)}_{=:G_2}+p_3\cdot\underbrace{(C\cdot N-e)}_{=:G_3}=0\,.$$

6.3 Dritter Weg

Der Flächeninhalt des von $P=(p_1:p_2:p_3)$, $Q=(q_1:q_2:q_3)$, $R=(r_1:r_2:r_3)$ aufgespannten Dreiecks ist[3] proportional zu

$$\frac{\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{(p_1+p_2+p_3)\cdot(q_1+q_2+q_3)\cdot(r_1+r_2+r_3)}$$

; der Punkt $P=(p_1:p_2:p_3)$ liegt also genau dann auf der Geraden durch $Q=(q_1:q_2:q_3)$ und $R=(r_1:r_2:r_3)$, wenn die Determinante verschwindet.

6.4 Nullte Interpretation der Geradenkoordinaten

Die Seiten des Ausgangsdreiecks sind

$a=[1:0:0]$; $b=[0:1:0]$; $c=[0:0:1]$. Damit schreibt sich eine Gerade (formal wie ein Punkt) als $\boxed{g=[G_1:G_2:G_3]=\dfrac{G_1\cdot a+G_2\cdot b+G_3\cdot c}{G_1+G_2+G_3}}$.

[3] O. Bottema: Topics in Elementary Geometry. 2008 Springer, S. 29.

6.5 Verbindungsgerade und Kollinearität

Ein allgemeiner Punkt $(u : v : w)$ auf der Verbindungsgerade von $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ und $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$ erfüllt die Gleichung $\boxed{\begin{vmatrix} u & v & w \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0}$.

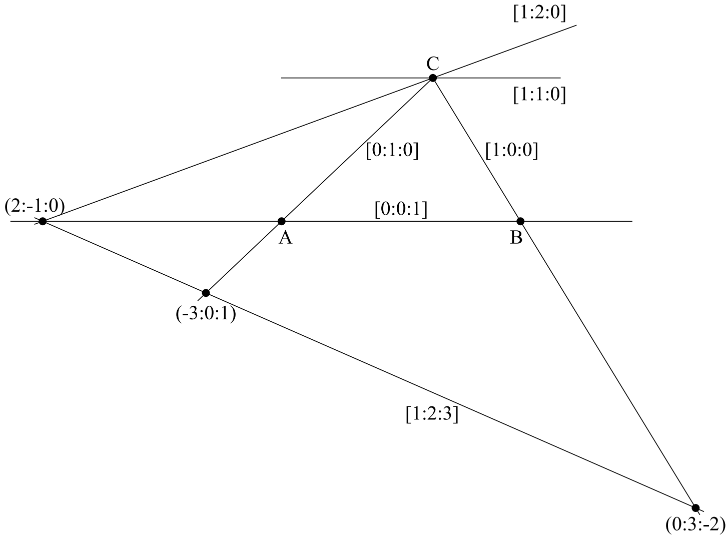
Die Verbindungsgerade von $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ und $Q = (q_1 : q_2 : q_3)$ ist (bis auf Normierung) $\boxed{P \times Q := \begin{vmatrix} a & b & c \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}}$. Ein Punkt $R = (r_1 : r_2 : r_3)$ liegt auf der Verbindungsgeraden $P \times Q$ .falls das auf Punktkoordinaten bezogene Spatprodukt $R * (P \times Q) = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$ verschwindet. Genau dann sind P, Q und R kollinear.

6.6 Schnittpunkt und Kopunktalität

Der Schnittpunkt der Geraden $g = [G_1 : G_2 : G_3]$ und $h = [H_1 : H_2 : H_3]$ ist (bis auf Normierung) $\boxed{g \times h := \begin{vmatrix} A & B & C \\ G_1 & G_2 & G_2 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix}}$. Eine Gerade $f = [F_1 : F_2 : F_3]$ verläuft durch den Schnittpunkt $g \times h$, falls das auf Geradenkoordinaten bezogene Spatprodukt $(g \times h) * f = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_2 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix}$ verschwindet. Genau dann sind g, h und f kopunktal.

6.7 Einige spezielle Geraden

Einige Geraden sieht man in der folgenden Graphik.



Die Gerade $g=[G_1 : G_2 : G_3]$ schneidet die Dreiecksseiten in

$$g\times a=(0 : G_3 : -G_2);\ \ g\times b=(-G_3 : 0 : G_1);\ \ g\times c=(G_2 : -G_1 : 0).$$

Die Verbindungsgeraden zu den gegenüber liegenden Eckpunkten sind

$$A\times(g\times a)=[0 : G_2 : G_3];\ \ B\times(g\times b)=[G_1 : 0 : G_3];\ \ C\times(g\times c)=[G_1 : G_2 : 0].$$

<u>Analog gilt:</u> Die Verbindungsgerade des Punkts $P=(p_1 : p_2 : p_3)$ mit den Dreiecks-Eckpunkten ist

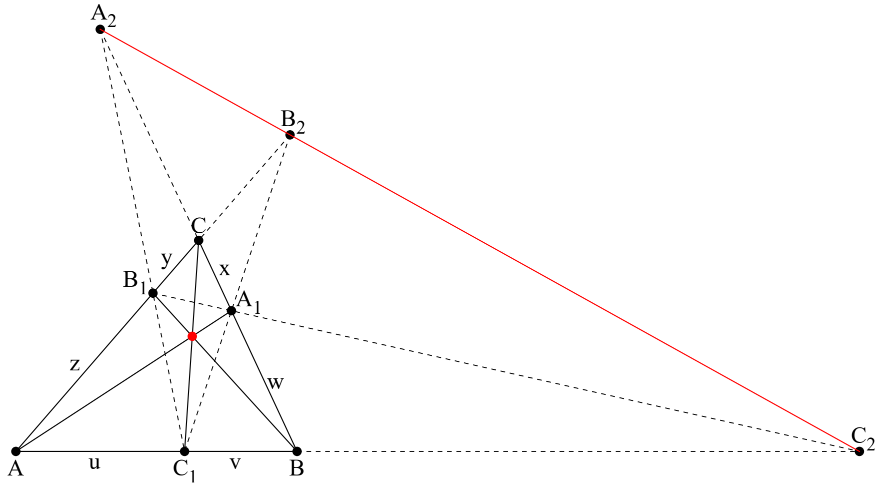
$$P\times A=[0 : p_3 : -p_2];\ \ P\times B=[-p_3 : 0 : p_1];\ \ P\times C=[p_2 : -p_1 : 0].$$

$$C^*=(u : -v : 0)$$

Die Verbindungsgeraden schneiden die gegenüber liegenden Seiten in

$$a\times(P\times A)=(0 : p_2 : p_3);\ \ b\times(P\times B)=(p_1 : 0 : p_3);\ \ c\times(P\times C)=(p_1 : p_2 : 0).$$

6.8 Zum Satz von DESARGUES



Nach dem Satz von CEVA sind AA_1, BB_1 und CC_1 genau dann kopunktal, wenn

$$u \cdot w \cdot y = v \cdot x \cdot z$$

gilt. Wegen

$$A_1 = (0 : x : w);\ B_1 = (y : 0 : z);\ C_1 = (v : u : 0)$$

ist

$$A_1B_1 = [x \cdot z : w \cdot y : -x \cdot y];\ B_1C_1 = [-u \cdot z : v \cdot z : u \cdot y];\ C_1A_1 = [u \cdot w : -v \cdot w : v \cdot x]$$

und daher

$$C_2 = A_1B_1 \cap AB = (w \cdot y : -x \cdot z : 0)$$
$$B_2 = A_1C_1 \cap AC = (-v \cdot x : 0 : u \cdot w)$$
$$A_2 = B_1C_1 \cap BC = (0 : u \cdot y : -v \cdot z)$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} w \cdot y & -x \cdot z & 0 \\ -v \cdot x & 0 & u \cdot w \\ 0 & u \cdot y & -v \cdot z \end{vmatrix} = (v \cdot x \cdot z)^2 - (u \cdot w \cdot y)^2$$

verschwindet genau dann, wenn die CEVA-Bedingung erfüllt ist.
Das heißt:

AA_1, BB_1 und CC_1 sind genau dann kopunktal,
wenn A_2, B_2 und C_2 kollinear sind. $\square$

Anders ausgedrückt: Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_2$ sind perspektiv bzgl. eines Punktes genau dann, wenn die beiden Dreiecke perspektiv bzgl. einer Geraden sind.
Das ist ein Spezialfall des Satzes von Girard DESARGUES (1591–1661).
Zur Berechnung der Geraden geht man besser von $P=(p:q:r)$ aus. Dann ist

$$A_1=(0:q:r)\quad B_1=(p:0:r)\quad C_1=(p:q:0)$$
$$A_2=(0:q:-r)\quad B_2=(-p:0:r)\quad C_2=(p:-q:0)$$

mit der Geraden $\left[\frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r}\right]$.

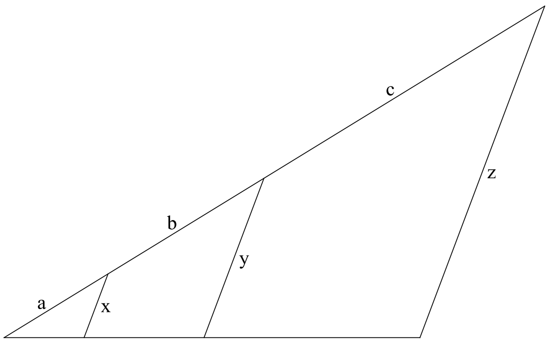
6.9 Interpretation der Geradenkoordinaten

Die Geradenkoordinaten lassen sich leicht *interpretieren*. Dazu holen wir etwas aus:

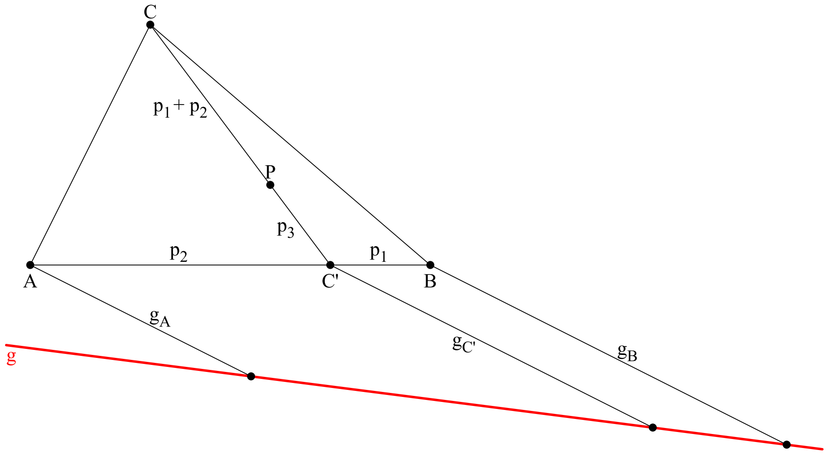
<u>Erinnerung</u>: Aufgrund des Strahlensatzes ist allgemein $\boxed{y=\frac{b\cdot z+c\cdot x}{b+c}}$, denn

wegen $\frac{z}{y}=\frac{a+b+c}{a+b}$ und $\frac{y}{x}=\frac{a+b}{a}$ ist

$$b\cdot z+c\cdot x=b\cdot y\cdot\frac{a+b+c}{a+b}+c\cdot y\cdot\frac{a}{a+b}=y\cdot\frac{a\cdot b+b^2+b\cdot c+a\cdot c}{}$$
$$=y\cdot\frac{(a+b)\cdot(b+c)}{a+b}=y\cdot(b+c)$$



Der (nicht unbedingt senkrechte) Abstand g_P eines Punktes P zu einer Geraden g sei mit einem beliebigen, aber festen Winkel gemessen. Da es nur auf Abstands-Verhältnisse ankommt, ist der Winkel irrelevant.



Dann ist $gC' = \frac{p_1 \cdot g_A + p_2 \cdot g_B}{p_1 + p_2}$ und weiter

$$g_P = \frac{p_3 \cdot g_C + (p_1 + p_2) \cdot g_{C'}}{p_1 + p_2 + p_3} = \boxed{\frac{p_1 \cdot g_A + p_2 \cdot g_B + p_3 \cdot g_C}{p_1 + p_2 + p_3} = g_P}.$$

Liegen etwa A und B auf verschiedenen Seiten von g, so haben g_A und g_B unterschiedliches Vorzeichen.

Insbesondere liegt P auf g, wenn der Zähler verschwindet; dies ist ein anderer Weg zur Geradengleichung $P * g = 0$ und liefert gleichzeitig eine geometrische Interpretation der Koeffizienten von g: Es ist $\boxed{g = [g_A : g_B : g_C]}$.

6.10 Parallelen

Diese Abstandsbetrachtungen erlauben einen *neuen Blick auf Parallelen*: Aus der Interpretation der Geradenkoeffizienten als (irgendwie gerichtete) Abstände zu den Dreiecksecken folgt, dass jede Parallele zu $g = [G_1 : G_2 : G_3]$ die Form $g' = [G_1 - D : G_2 - D : G_3 - D]$ hat. Soll die Parallele durch den Punkt $P = (p_1 : p_2 : p_3)$ verlaufen, muss $D = \frac{P * g}{p_1 + p_2 + p_3}$ sein.

Damit hat die Parallele zu g durch P die Form

$$g' = \begin{bmatrix} G_1\cdot(p_2+p_3)-(p_2\cdot G_2+p_3\cdot G_3):G_2\cdot(p_1+p_3)-(p_1\cdot G_1+p_3\cdot G_3): \\ G_3\cdot(p_1+p_2)-(p_1\cdot G_1+p_2\cdot G_2) \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ G_2-G_3 & G_3-G_1 & G_1-G_2 \end{matrix} \right| = g'}$$

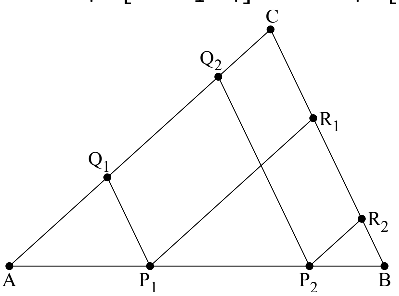
Die letzte Gleichung lässt sich auch so interpretieren: Die Parallele ist die Verbindungsgerade zwischen P und dem Fernpunkt von g.

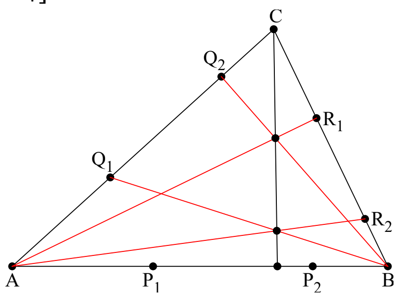
6.11 Multiplikation von Punkten

Die Parallele zu $a=[1:0:0]$ durch $P=(u:v:w)$ ist $[v+w:-u:-u]$; sie schneidet b in $(u:0:v+w)$ und c in $(u:v+w:0)$. Die Parallele durch P zu b ist $[-v:w+u:-v]$ und die zu c ist $[-w:-w:u+v]$.

Zwei Punkte $P_1=(u_1:v_1:0)$ und $P_2=(u_2:v_2:0)$ auf c liefern Anlass zu vier Parallelen $[-v_i:u_i:u_i]$ zu a und $[v_i:-u_i:v_i]$ zu b mit den Schnittpunkten $Q_i=(u_i:0:v_i)$ auf b und $R_i=(0:v_i:u_i)$ auf a.

Nun ist $AR_i=[0:-u_1:v_i]$ und $BQ_i=[-v_i:0:u_i]$.





AR_1 und BQ_2 schneiden einander in $S_1=(u_1\cdot u_2:v_1\cdot v_2:u_1\cdot v_2)$, und AR_2 und BQ_1 schneiden einander in $S_2=(u_1\cdot u_2:v_1\cdot v_2:u_2\cdot v_1)$. Beide Schnittpunkte sind mit C kollinear auf $S_1S_2=[-v_1\cdot v_2:u_1\cdot u_2:0]$, und diese Gerade schneidet c in $\boxed{(u_1\cdot u_2:v_1\cdot v_2:0)=:P_1\cdot P_2}$. Damit ist eine *Multiplikation* von Punkten auf einer Dreiecksseite erklärt[4].

[4] nach P. Yiu (2000): The uses of ... In: Int. J. Math.Educ. Sci. Technol. **31** (4), 569 - 578.

Die *Division* ist einfach: Hat man $P_1 \cdot P_2$ und P_1, so hat man Q_1 und R_1 und damit auch die Schnittpunkte auf der Geraden durch C und $P_1 \cdot P_2$, so dass man nun auch Q_2 und R_2 hat.
Zu zwei *beliebigen* Punkten $P_1 = (u_1 : v_1 : w_1)$ und $P_2 = (u_2 : v_2 : w_2)$ gibt es auf jeder Dreiecksseite zwei Spurpunkte, die man miteinander multiplizieren kann. Die Produkte führen zu $\boxed{P_1 \cdot P_2 := (u_1 \cdot u_2 : v_1 \cdot v_2 : w_1 \cdot w_2)}$.

6.12 Dualismus von Punkten und Geraden

Die Gleichung $P * g = 0$ gibt zu einer symmetrischen (*dualen*) Behandlung von Punkten und Geraden Anlass:

(1) Ist g gegeben, so wird die Gleichung von allen Punkten P erfüllt, die auf g liegen. Die Gerade wird als <u>Punktreihe</u> aufgefasst, und $P * g = 0$ ist eine <u>Geradengleichung</u>.

(2) Ist P gegeben, so wird die Gleichung von allen Geraden g erfüllt, die durch g gehen. Der Punkt wird als <u>Geradenbüschel</u> aufgefasst, und ist eine <u>Punktgleichung</u>.

Kurz: $\boxed{P = \bigcap_{P*g=0} g;\ g = \bigcup_{P*g=0} P}$.

Das Symbol $(p_1 : p_2 : p_3)$ stellt einen (affinen) Punkt dar, falls $p_1 + p_2 + p_3 \neq 0$ ist.

Aus der Gleichung $P * g = 0$ erkennt man nun: Auf $[1:1:1]$ liegen keine Punkte. Das Gebilde $[G_1 : G_2 : G_3]$ stellt also nur dann eine (affine) Gerade dar, falls die Zahlen G_1, G_2, G_3 nicht alle gleich sind.

Zwei Geraden $g = [G_1 : G_2 : G_3]$ und $h = [H_1 : H_2 : H_3]$ sind zueinander parallel, wenn ihr Schnittpunkt $g \cap h = (G_2 \cdot H_3 - G_3 \cdot H_2 : G_3 \cdot H_1 - G_1 \cdot H_3 : G_1 \cdot H_2 - G_2 \cdot H_1)$ nicht existiert, wenn also

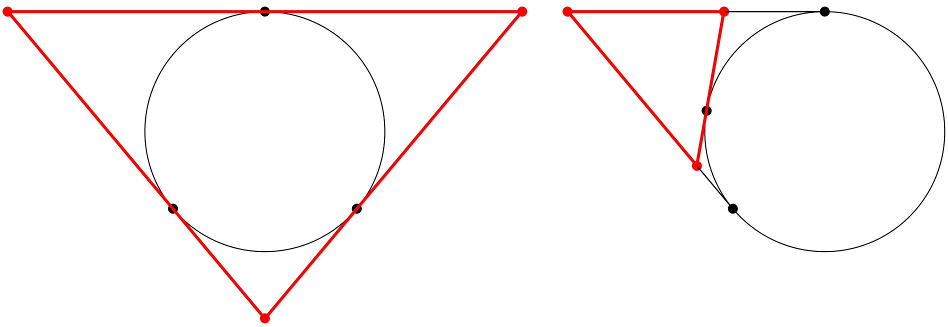
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ G_1 & G_2 & G_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Das ist das Parallelitätskriterium.

Dass ein Punkt nicht „wirklich" sein soll, heißt, dass er nicht im Endlichen liegt. Der „unwirkliche" Schnittpunkt zweier paralleler Geraden liegt also „im Unendlichen“. Nun erleichtert und vereinheitlicht es den Formalismus, wenn man auch die „im Unendlichen“ gelegenen Punkte als Punkte auffasst, mit denen man genauso rechnen kann wie mit im Endlichen liegenden Punkten.

6.13 Umkreis und Berührkreise

Geht man vom Kreis aus, so sind ein- und umbeschriebene Dreiecke zueinander dual:
Ersetzt man die Punkte auf dem Umkreis durch Tangentenstücke, so bekommt man die Berührkreise; je nach Lage der Ausgangspunkte bekommt man den Inkreis oder einen der Ankreise.



Ist der Ausgangskreis ein Umkreis, so entsteht das Tangentendreieck (s.u.).

6.14 Der Fernpunkt ∞(g) einer Geraden g

Der Schnitt einer Geraden $g=[G_1:G_2:G_3]$ mit einer dazu parallelen Geraden liefert den „Fernpunkt“ $\boxed{\infty(g)=(G_2-G_3:G_3-G_1:G_1-G_2)}$.

Hat man den Fernpunkt $(g_1:g_2:g_3)$ mit $g_1+g_2+g_3=0$, so gehört dazu die Schar zueinander paralleler Geraden $[D:D-g_3:D+g_2]$.
Weiterhin gilt: Der Fernpunkt der Verbindungsgeraden von $P=(p_1:p_2:p_3)$ und $Q=(q_1:q_2:q_3)$ ist

$$\boxed{\infty(PQ)=\begin{pmatrix} q_1\cdot(p_2+p_3)-p_1\cdot(q_2+q_3) \\ :q_2\cdot(p_3+p_1)-p_2\cdot(q_3+q_1) \\ :q_3\cdot(p_1+p_2)-p_3\cdot(q_1+q_2) \end{pmatrix}}.$$

Zwei Geraden schneiden sich also jetzt immer. Nunmehr hat man zueinander duale Grundsachverhalte:

> Zu zwei Punkten gibt es stets genau eine Verbindungsgerade,
> zu zwei Geraden gibt es stets genau einen Schnittpunkt.

6.15 Die Ferngerade

Die Verbindungsgerade zweier Fernpunkte ist die „Ferngerade"; sie berechnet sich zu $[1:1:1]$; auf ihr liegen keine endlichen Punkte.

Das Parallelitätskriterium ordnet sich jetzt dem Kopunktalitätskriterium unter: Zwei Geraden sind genau dann zueinander parallel, wenn sie sich auf der Ferngeraden schneiden.

7 Erste Anwendungen: THOMSEN und MAXWELL

7.1 Der Streckenzug nach THOMSEN

Es sei $P_1 = (u:0:w)$ auf b.

Die Parallele zu $a = [1:0:0]$ durch P_1 ist $[-w:u:u]$; sie schneidet c in $P_2 = (u:w:0)$.

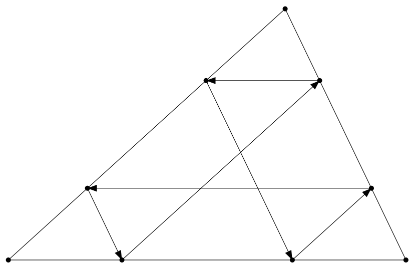
Die Parallele zu $b = [0:1:0]$ durch P_2 ist $[w:-u:w]$; sie schneidet a in $P_3 = (0:w:u)$.

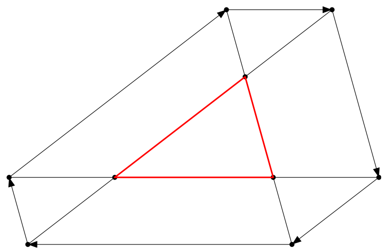
Die Parallele zu c durch P_3 schneidet b in $P_4 = (w:0:u)$.

Die Parallele zu a durch P_4 schneidet c in $P_5 = (w:u:0)$.

Die Parallele zu b durch P_5 schneidet a in $P_6 = (0:u:w)$.

Die Parallele zu c durch P_6 schneidet b in $P_1 = (u:0:w)$.





Dieser geschlossene Streckenzug ist nach Gerhard THOMSEN (1899 - 1934) benannt. Man kann ihn auch außerhalb des Dreiecks starten.

7.2 Der Satz von MAXWELL

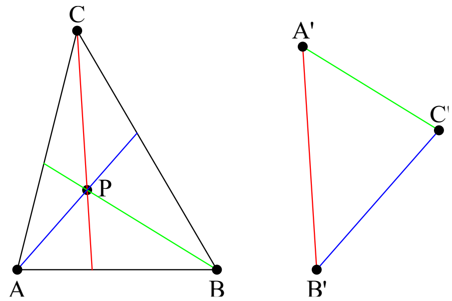
Auch der bekannte Physiker James Clerk MAXWELL (1831–1879) hat sich (im Rahmen seiner Untersuchungen über Statik) mit Dreiecksgeometrie befasst und eine etwas überraschende Kopunktalität festgestellt:

Schritt 1: Zum Dreieck ABC mit $P=(u:v:w)$ wird das Dreieck A'B'C' so gebildet,

dass A'B' zu CP parallel ist (rot)

und B'C' zu AP parallel ist (blau)

sowie C'A' zu BP parallel ist (grün).



Die Gerade $[D:-w+D:v+D]$ ist zu $AP=[0:-w:v]$ parallel.

Die Gerade $[-w+E:E:u+E]$ ist zu $BP=[-w:0:u]$ parallel.

Die Gerade $[-v+F:u+F:F]$ ist zu $CP=[-v:u:0]$ parallel.

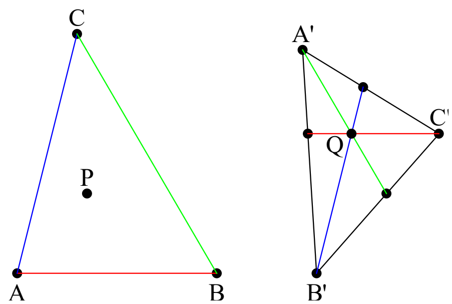
Die Schnittpunkte dieser Parallelen sind

$$A'=\left(u\cdot(u+E+F):-F\cdot(u+w)+v\cdot(E+u):-E\cdot(u+v)+w\cdot(F+u)\right)$$
$$B'=\left(F\cdot(v+w)+u\cdot(D+v):v\cdot(v-F+D):-D\cdot(u+v)+w\cdot(v-F)\right)$$
$$C'=\left(E\cdot(w+v)+u\cdot(w-D):D\cdot(w+u)+v\cdot(w-E):w\cdot(-E-D+w)\right)$$

(Die baryzentrischen Koordinaten sind weiterhin auf ABC bezogen.)

Schritt2:

Es werden weitere Parallelen gezogen, nämlich
zu AB durch C' (rot);
zu BC durch A' (grün),
zu CA durch B' (blau).



Die Parallele zu $BC=[1:0:0]$ durch A' ist $[G+1:G:G]$ mit $G=-\frac{u+E+F}{u+v+w}$.

Die Parallele zu $CA=[0:1:0]$ durch B' ist $[H:H+1:H]$ mit $H=-\frac{v-F+D}{u+v+w}$.

Die Parallele zu $AB=[0:0:1]$ durch C' ist $[J:J:J+1]$ mit $J=\frac{E+D-w}{u+v+w}$.

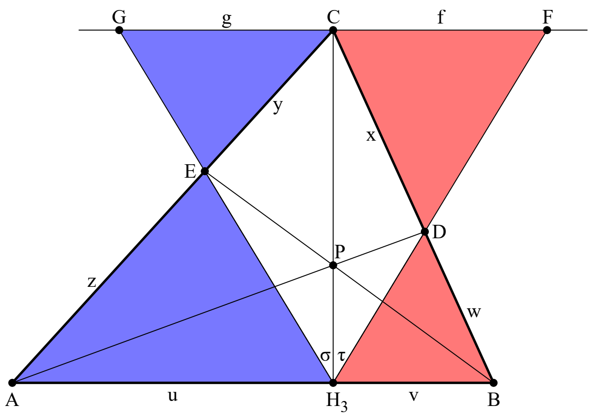
Diese drei Parallelen zu den Seiten von ABC schneiden sich in $\boxed{Q=(u+F+E:v-F+D:w-E-D)}$ (die baryzentrischen Koordinaten sind weiter auf ABC bezogen). Damit hat man eine Abbildung

$$\boxed{P=(u:v:w)\mapsto Q=(u+F+E:v-F+D:w-E-D)}.$$

8 Der Satz von BLANCHET und dessen Verallgemeinerung

Es sei ABC spitzwinklig und sei P beliebig auf der Höhe CH_3.
AP schneidet a in D, BP schneidet b in E. Dann ist P Schnitt dreier Ecktransversalen, und es gilt nach CEVA $u\cdot w\cdot y=v\cdot x\cdot z$.

Die Parallele zu c durch C wird von H_3E in G und von H_3D in F geschnitten.



Gleichgefärbte Dreiecke sind zueinander ähnlich, also ist $g=u\cdot\frac{y}{z}$ und $f=v\cdot\frac{x}{w}$

und daher $\frac{g}{f}=\frac{u\cdot y\cdot w}{z\cdot v\cdot x}=1$. Somit ist $\sigma=\tau$. (im letzten Schritt braucht man, dass CH_c Höhe ist.)

Diese Argumentation ist nach Marie Alphonse BLANCHET oder nach DE LACOMBE benannt[5]. Ist P der Höhenschnittpunkt, so bildet das Höhenfußpunkt-Dreieck eine geschlossene Billardbahn.

---

[5] Halbeisen / Hungerbühler/ Läuchli (^{2}2021): Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten. Springer, S. 60 und S. 64.

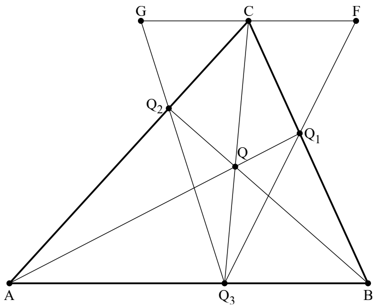
Ist CH_3 nicht die Höhe, wird man keine gleichen Winkel haben, aber weiterhin wird C die Strecke GF halbieren:

Ist $Q=(q_1 : q_2 : q_3)$ beliebig (aber nicht auf dem Rand des Dreiecks), so schneidet CQ die Seite c in $Q_3=(q_1 : q_2 : 0)$. AQ schneidet die Seite a in $Q_1=(0 : q_2 : q_3)$, und BQ schneidet die Seite b in $Q_2=(q_1 : 0 : q_3)$.

Die Parallele $[1:1:0]$ zu $c=[0:0:1]$ durch C wird von

$$Q_3Q_2=\left[-\frac{1}{q_1}:\frac{1}{q_2}:\frac{1}{q_3}\right] \text{ in } G=\left(1:-1:\frac{q_3}{q_1}+\frac{q_3}{q_2}\right) \text{ und von}$$

$$Q_3Q_1=\left[\frac{1}{q_1}:-\frac{1}{q_2}:\frac{1}{q_3}\right] \text{ in } F=\left(-1:1:\frac{q_3}{q_1}+\frac{q_3}{q_2}\right) \text{ geschnitten.}$$

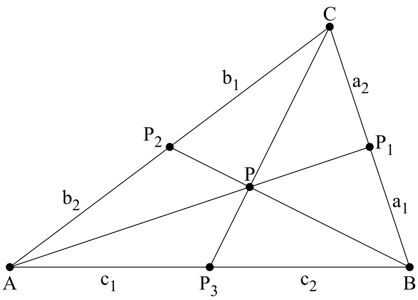


Mit $q:=\frac{q_3}{q_1}+\frac{q_3}{q_2}$ ist der Mittelpunkt von GF gegeben durch

$$\frac{G+F}{2}=\frac{\frac{A-B+q\cdot C}{q}+\frac{-A+B+q\cdot C}{q}}{2}$$
$$=C$$

9 Der Seitenhalbierenden-Schnitt S = X2

Natürlich kann man die Kopunktalität der Seitenhalbierenden auch elementar beweisen; dieser Abschnitt und die folgenden dienen nur dazu, Vertrauen in den Satz von CEVA zu erzeugen.

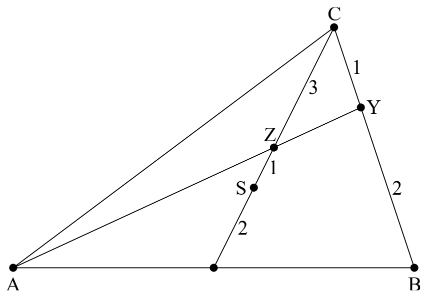


Bei Seitenhalbierenden ist $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, $c_1=c_2$, und somit gilt für den Schnittpunkt S die Beziehung $S=(a_1\cdot b_1 : a_1\cdot b_1 : a_1\cdot b_1)=\boxed{(1:1:1)=S}$.

Die Seitenhalbierende durch C hat den Mittelpunkt $Z=(1:1:2)$;

die Gerade $[0:2:-1]$ durch A und Z schneidet BC in $Y=(0:1:2)$; der Schnittpunkt teilt also BC auch im Verhältnis 1:2.

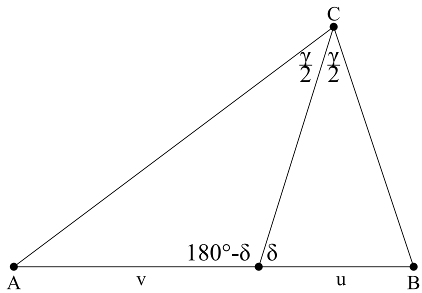
Die Graphik zeigt die Strecken*verhältnisse*.



10 Die Winkelhalbierenden-Schnitte W = X1, W_a, W_b, W_c

Jede *Innen*-Winkelhalbierende schneidet die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, wie man etwa anhand der Abbildung mit Hilfe des Sinussatzes einsieht; Im linken Teildreieck ist

$$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\delta}=\frac{v}{b};$$

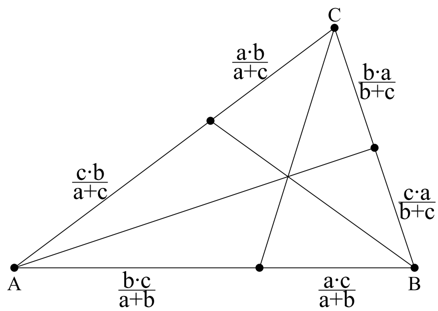


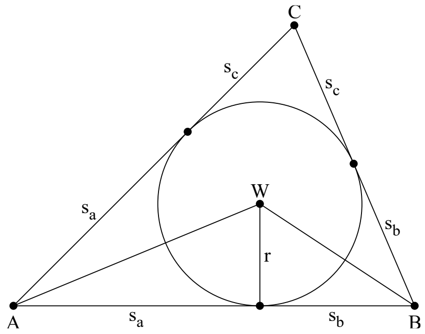
im rechten Teildreieck ist $\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\delta}=\frac{u}{a}$; zusammen gilt $\boxed{\frac{v}{u}=\frac{b}{a}}$.

Damit hat man die Seitenabschnitte wie nebenstehend (eigentlich kommt es nur auf die Strecken*verhältnisse* an).

Der Schnittpunkt W der Innen-Winkelhalbierenden ist dann

$\boxed{W=(a:b:c)}$.

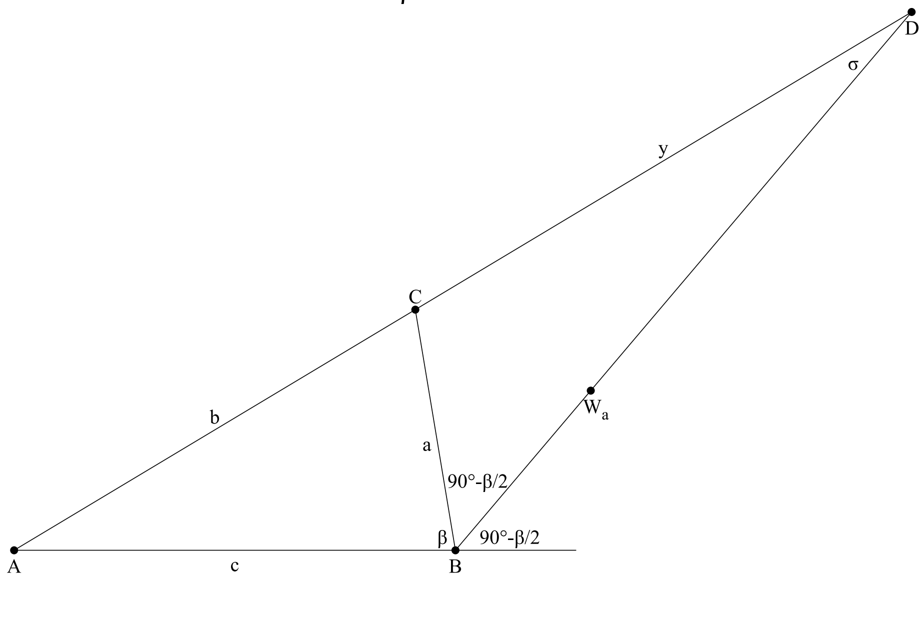




W ist Mittelpunkt des Inkreises, und man hat mit $s_a := \frac{-a+b+c}{2}$ usw. die angegebenen Streckenabschnitte, und wegen $\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{s_a}{r}$ und $\cot\frac{\beta}{2} = \frac{s_b}{r}$ usw. gilt die zum Sinussatz ähnliche Formel

$$\boxed{\frac{s_a}{\cot\frac{\alpha}{2}} = \frac{s_b}{\cot\frac{\beta}{2}} = \frac{s_c}{\cot\frac{\gamma}{2}} = r}\;.$$

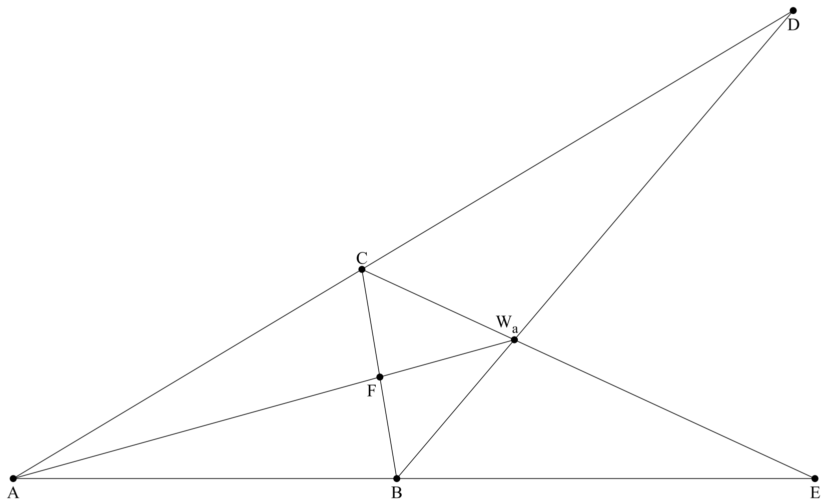
Die *Außen*-Winkelhalbierenden schneiden sich in den Ankreismittelpunkten, die mit W_a, W_b und W_c bezeichnet werden.
Die Außenwinkelhalbierende von β schneidet die Seite AC in D:



Im Dreieck BCD ist $\dfrac{\sin\sigma}{\sin\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)}=\dfrac{a}{y}$, und im Dreieck ABD ist

$\dfrac{\sin\sigma}{\sin\left(90°+\dfrac{\beta}{2}\right)}\dfrac{\sin\sigma}{\sin\left(180°-\left(90°+\dfrac{\beta}{2}\right)\right)}==\dfrac{\sin\sigma}{\sin\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)}=\dfrac{c}{b+y}$, so dass insgesamt $\dfrac{b+y}{y}=\dfrac{c}{a}$ bzw. $\dfrac{b}{y}=\dfrac{c-a}{a}$ folgt. Damit ist $C=\dfrac{b\cdot D+y\cdot A}{b+y}$ und damit $D=\dfrac{c\cdot C-a\cdot A}{c-a}=(-a:0:c)$.

Analog schneidet die Außenwinkelhalbierende von γ die Seite AB in $E=(-a:b:0)$, und die Innenwinkelhalbierende zu α schneidet die Seite BC in $F=(0:b:c)$, so dass sich insgesamt $\boxed{W_a=(-a:b:c)}$ ergibt:

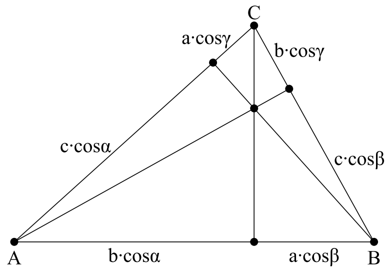


11 Der Höhen-Schnitt H = X4

Es sei ABC nicht rechtwinklig.
Die Kopunktalität ist nach CEVA offensichtlich, und es ist

$$H=(a\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma : b\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha : \ldots)$$

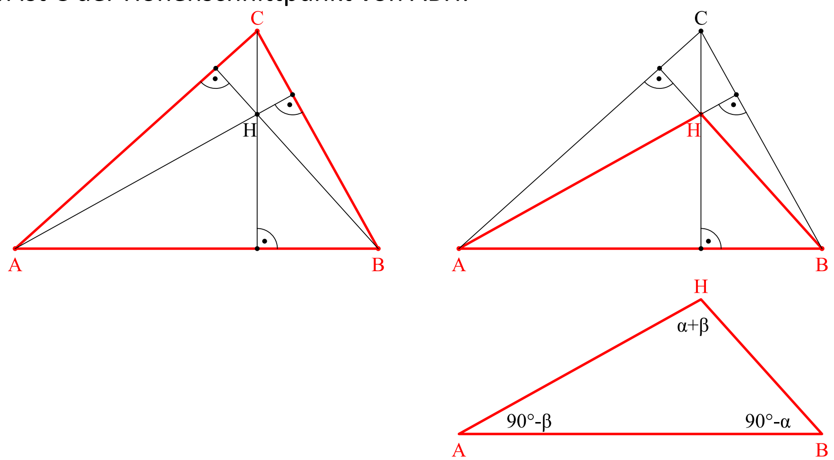
$$=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}:\frac{\sin\beta}{\cos\beta}:\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)$$



$$=\boxed{(\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)=\left(\frac{1}{\Sigma_a}:\frac{1}{\Sigma_b}:\frac{1}{\Sigma_c}\right)=H}.$$

Für rechtwinklige Dreiecke ABC gilt: Es sei etwa $\alpha=90^\circ$. Dann ist $\cot\alpha=0$, also $H=P=(\cot\beta\cdot\cot\gamma : \cot\gamma\cdot\cot\alpha : \cot\alpha\cdot\cot\beta)=A$. Dieser uninteressante Fall sei für den Rest dieser Datei ausgeschlossen.

Man könnte einwenden, dass die bisherige Diskussion sich auf den Fall beschränkt hat, dass der Schnittpunkt der kopunktalen Geraden im Inneren des Dreiecks liegt und dass H keineswegs immer im Inneren des Dreiecks liegen muss. Man überzeugt sich leicht davon, dass die Argumentation zu denselben Ergebnissen führt für den Fall, dass der Schnittpunkt außerhalb liegt.
Man sieht übrigens noch mehr: Wenn H der Höhenschnittpunkt von ABC ist, dann ist C der Höhenschnittpunkt von ABH:



Der Höhenschnittpunkt von ABH berechnet sich in der Tat zu

$$\frac{\cot\beta\cdot A+\cot\alpha\cdot B-\tan\gamma\cdot\dfrac{\tan\alpha\cdot A+\tan\beta\cdot B+\tan\gamma\cdot C}{\tau}}{\cot\beta+\cot\alpha-\tan\gamma}=\left(0:0:1\right).$$

12 Zueinander senkrechte Geraden

12.1 Bestimmung der Senkrechten

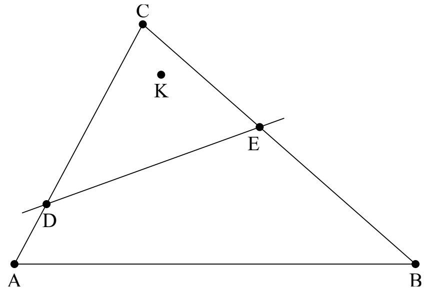
Die zu $g=\left[G_1 : G_2 : G_3\right]$ senkrechten Geraden haben alle denselben Fernpunkt. Hat man den gefunden, kann man alle zu g senkrechten Geraden bestimmen.

Die Gerade g schneidet die Dreiecksseiten AC und BC in

$D=\left(-G_3 : 0 : G_1\right)$ und in

$E=\left(0 : -G_3 : G_2\right)$.

Es sei K der Höhenschnittpunkt von DEC. Dann steht CK auf g senkrecht[6].



EK muss parallel sein zur Höhe $h_B=\left[-\Sigma_a : 0 : \Sigma_c\right]$ durch B im Dreieck ABC, also ist

$$EK=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & -G_3 & G_2 \\ -\Sigma_c & \Sigma_c+\Sigma_a & -\Sigma_a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & -G_3 & G_2 \\ -\Sigma_c & 2\cdot b^2 & -\Sigma_a \end{vmatrix}$$

$$=\left[2\cdot b^2\cdot G_2-G_3\cdot\Sigma_a : G_2\cdot\Sigma_c : G_3\cdot\Sigma_c\right].$$

DK muss parallel sein zu $h_A=\left[0 : -\Sigma_b : \Sigma_c\right]$, also ist

$$DK=\begin{vmatrix} a & b & c \\ -G_3 & 0 & G_1 \\ -\Sigma_b-\Sigma_c & \Sigma_c & \Sigma_b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ -G_3 & 0 & G_1 \\ -2\cdot a^2 & \Sigma_c & \Sigma_b \end{vmatrix}$$

$$=\left[G_1\cdot\Sigma_c : 2\cdot a^2\cdot G_1-G_3\cdot\Sigma_b : G_3\cdot\Sigma_c\right].$$

Der Schnittpunkt ist daher

[6] Diese Methode geht auf Floor van LAMOEN (*1966) zurück.

$$K=\left(-2\cdot a^2\cdot G_1+G_2\cdot\Sigma_c+G_3\cdot\Sigma_b:-2\cdot b^2\cdot G_2+G_3\cdot\Sigma_a+G_1\cdot\Sigma_c:*\right)$$
$$=:(h_1:h_2:h_3).$$

Deshalb ist

$$CK=[-h_2:h_1:0]$$

und

$$\begin{aligned}\infty(CK)&=(h_1:h_2:-h_1-h_2)\\&=\left(-2\cdot a^2\cdot G_1+G_2\cdot\Sigma_c+G_3\cdot\Sigma_b:-2\cdot b^2\cdot G_2+G_3\cdot\Sigma_a+G_1\cdot\Sigma_c:*\right).\end{aligned}$$

Mit[7] den Matrizen $\boxed{M:=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}}$ und $\boxed{S:=\begin{pmatrix}\Sigma_a&0&0\\0&\Sigma_b&0\\0&0&\Sigma_c\end{pmatrix}}$ ist

$$\begin{aligned}\infty(g)&=(G_2-G_3:G_3-G_1:G_1-G_2)=[G_1:G_2:G_3]\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\\&=\boxed{g\cdot M=\infty(g)}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\infty(CK)&=\left(-2\cdot a^2\cdot G_1+G_2\cdot\Sigma_c+G_3\cdot\Sigma_b:-2\cdot b^2\cdot G_2+G_3\cdot\Sigma_a+G_1\cdot\Sigma_c:*\right)\\&=\left(-(\Sigma_b+\Sigma_c)\cdot G_1+G_2\cdot\Sigma_c+G_3\cdot\Sigma_b:-(\Sigma_c+\Sigma_a)\cdot G_2+G_3\cdot\Sigma_a+G_1\cdot\Sigma_c:*\right)\\&=\left(\Sigma_b\cdot(G_3-G_1)+\Sigma_c\cdot(G_2-G_1):\Sigma_c\cdot(G_1-G_2)+\Sigma_a\cdot(G_3-G_2):*\right)\\&=\boxed{g\cdot M\cdot S\cdot M=\infty\left(g^{\perp}\right)=\infty(g)\cdot S\cdot M}.\end{aligned}$$

12.2 Kriterium der Orthogonalität

Aus dem Obigen folgt:

Die Geraden g mit $\infty(g)=(g_1:g_2:g_3)$ und h mit $\infty(h)=(h_1:h_2:h_3)$ stehen genau dann aufeinander senkrecht, wenn $\boxed{\Sigma_a\cdot g_1\cdot h_1+\Sigma_b\cdot g_2\cdot h_2+\Sigma_c\cdot g_3\cdot h_3=0}$ gilt.

[7] Eine Verwechslung der Matrizen M und S mit den Punkten M und S ist nicht zu befürchten.

Wegen $\Sigma_a = 4 \cdot \Delta \cdot \cot\alpha$ schreibt sich das Orthogonalitätskriterium auch als
$\boxed{g_1 \cdot h_1 \cdot \cot\alpha + g_2 \cdot h_2 \cdot \cot\beta + g_3 \cdot h_3 \cdot \cot\gamma = 0}$.

12.3 Beispiele

Es ist $c = [0:0:1]$ mit $\infty(c) = (-1:1:0)$ und

$$\infty\left(c^{\perp}\right) = \begin{vmatrix} A & B & C \\ -b \cdot c \cdot \cos\alpha & c \cdot a \cdot \cos\beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a \cdot \cos\beta : b \cdot \cos\alpha : -c).$$

Die Höhe durch C ist dann gegeben durch

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \\ a \cdot \cos\beta & b \cdot \cos\alpha & -c \end{vmatrix} = [-b \cdot \cos\alpha : a \cdot \cos\beta : 0] = [-\tan\beta : \tan\alpha : 0].$$

$H = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$ liegt auf dieser Senkrechten.

12.4 Anwendung auf Mittelsenkrechten

Die Mittelsenkrechte zu c verläuft durch $(1:1:0)$ und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ a \cdot \cos\beta & b \cdot \cos\alpha & -c \end{vmatrix} &= [-c : c : b \cdot \cos\alpha - a \cdot \cos\beta] \\ &= [-\sin\gamma : \sin\gamma : \sin(\beta - \alpha)] \\ &= \left[-c^2 : c^2 : b^2 - a^2\right]. \end{aligned}$$

Der weiter unten behandelte Umkreismittelpunkt
$M = (a \cdot \cos\alpha : b \cdot \cos\beta : c \cdot \cos\gamma)$ liegt auf dieser Senkrechten.

13 Harmonische Konjugation, Polare und Pol

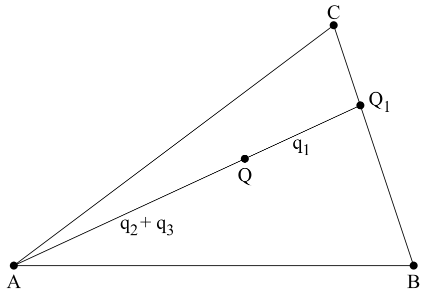
13.1 Harmonische Konjugation

In der Graphik teilt der Punkt

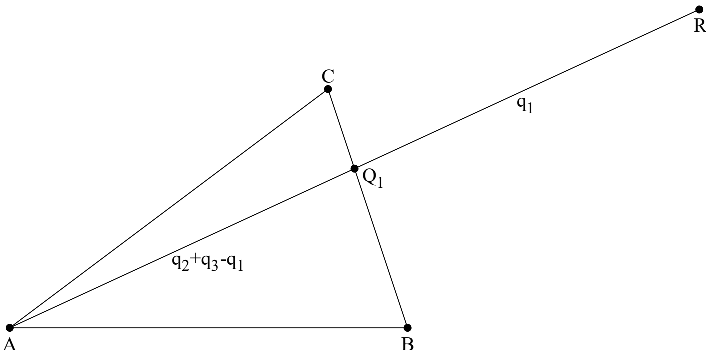
$Q = (q_1 : q_2 : q_3)$ die Strecke AQ_1 mit

$Q1 = (0 : q_2 : q_3)$ im Verhältnis

$\frac{AQ}{QQ_1} = \frac{q_2 + q_3}{q_1}$.



Mit dem äußeren Teilungspunkt R gilt $\frac{AR}{RR_1} = \frac{q_2 + q_3}{q_1}$:



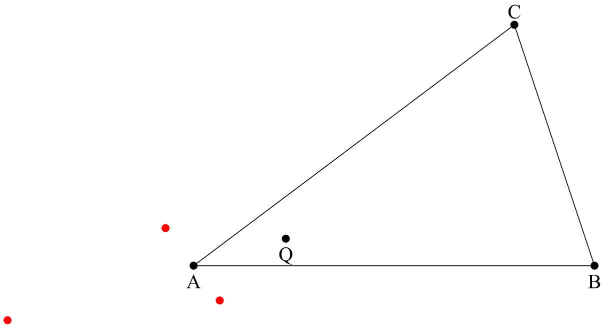
Dann ist $R_1 = \frac{q_1 \cdot A + (q_2 + q_3 - q_1) \cdot R}{q_2 + q_3}$ und deswegen

$$R = \frac{-q_1 \cdot A + (q_2 + q_3) \cdot R_1}{q_2 + q_3 - q_1} = \frac{-q_1 \cdot A + q_2 \cdot B + q_3 \cdot C}{q_2 + q_3 - q_1} = \boxed{(-q_1 : q_2 : q_3) = R}.$$

Die Punkte $(-q_1 : q_2 : q_3)$ und analog $(q_1 : -q_2 : q_3)$ sowie $(q_1 : q_2 : -q_3)$ sind zu $(q_1 : q_2 : q_3)$ *harmonisch konjugiert*, d.h. sie liegen zu den Dreiecks-Eckpunkten harmonisch.

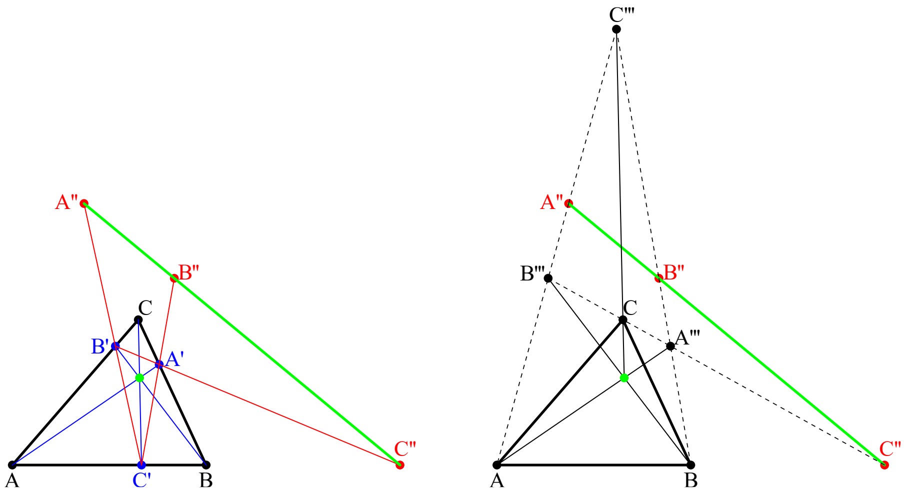
Harmonisch konjugierte Punkte treten immer als *Quadrupel* auf.

Die folgende Graphik zeigt die drei zu Q konjugierten Punkte in roter Farbe.



Die In- und Ankreismittelpunkte bilden ein harmonisches Punktequadrupel.

13.2 Harmonische Polare und Pol



Gegeben sei links der grüne Punkt $P=(p:q:r)$ mit den Spurpunkten

$$A'=(0:q:r),\ B'=(p:0:r),\ C'=(p:q:0).$$

Dann sind $A'B'=\left[\frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{-1}{r}\right]$, $B'C'=\left[\frac{-1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r}\right]$, $C'A'=\left[\frac{1}{p}:\frac{-1}{q}:\frac{1}{r}\right]$ und

$$A''=BC\cap B'C'=(0:-q:r),\ B''=(-p:0:r),\ C''=(-p:q:0).$$

A“, B“, C“ liegen auf der grünen Geraden $\left[\frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r}\right]$.

Sind rechts umgekehrt die Punkte

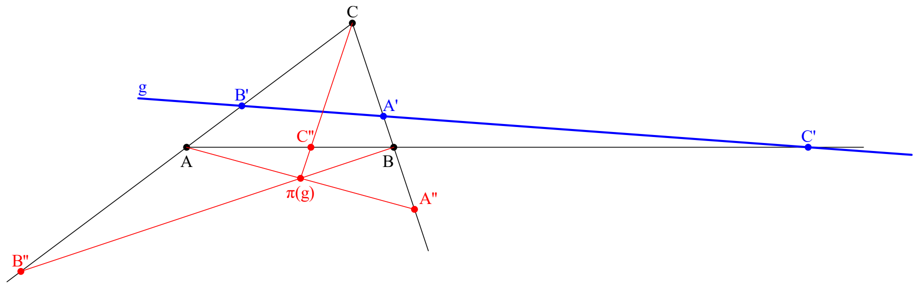
$A''=(0:-q:r),\ B''=(-p:0:r),\ C''=(-p:q:0)$ gegeben, so sind

$AA''=\left[0:\frac{1}{q}:\frac{1}{r}\right]$, $BB''=\left[\frac{1}{p}:0:\frac{1}{r}\right]$, $CC''=\left[\frac{1}{p}:\frac{1}{q}:0\right]$ und

$$A'''=BB''\cap CC''=(-p:q:r),\ B'''=(p:-q:r),\ C'''=(p:q:-r).$$

$AA'''=\left[0:\frac{1}{q}:\frac{-1}{r}\right]$, BB‘‘‘ und CC‘‘‘ haben den Punkt P gemeinsam.

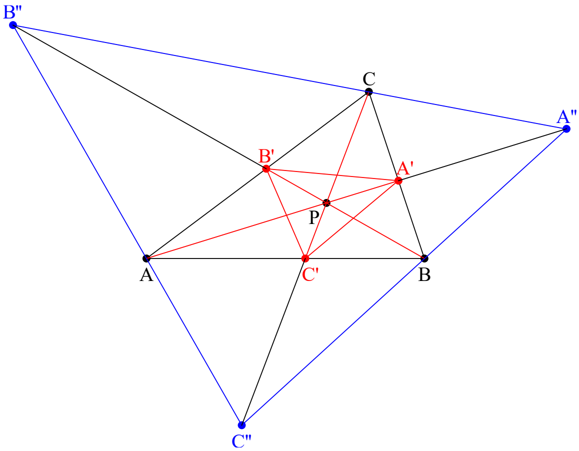
Die grüne Gerade heißt *harmonische Polare* (auch: *Tripolare*) zu P.
(Diese trat schon beim Satz von DESARGUES auf.)
Die Punkte A, B, C haben keine Polare.
Zu einer (blauen) Geraden $g=[U:V:W]$ gehört der *harmonische Pol* (auch: Tripol) $\pi(g)=\left(\frac{1}{U}:\frac{1}{V}:\frac{1}{W}\right)$, dessen Konstruktion in der Graphik angedeutet wird:



Zu B‘ wird der harmonisch konjugierte Punkt B‘‘ konstruiert, analog A‘‘ und C‘‘.

13.3 Deutung der harmonisch konjugierten Punkte

Es sei $P=(u:v:w)$ ein Punkt mit $u\cdot v\cdot w\neq 0$ mit den auf ABC bezogenen Spurpunkten $A'=(0:v:w)$, $B'=(u:0:w)$, $C'=(u:v:0)$.
Für die harmonisch konjugierten Punkte
$A''=(-u:v:w)$, $B''=(u:-v:w)$, $C''=(u:v:-w)$ gilt, dass A, B, C die Spurpunkte von P bzgl. A‘‘B‘‘C‘‘ sind, da sich A‘‘P und B‘‘C‘‘ sich in A schneiden.



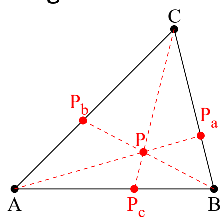
A'B'C' heißt mitunter (auf ABC bezogenes) *CEVA-Dreieck* zu P, und A''B''C'' (auf ABC bezogenes) *Anti-CEVA-Dreieck* zu P.

13.4 CEVA-Konjugierte

Der Sachverhalt des letzten Abschnitts lädt zu einer Verallgemeinerung ein. Dabei wird eine vorübergehende Bezeichnungs-Änderung vorgenommen.

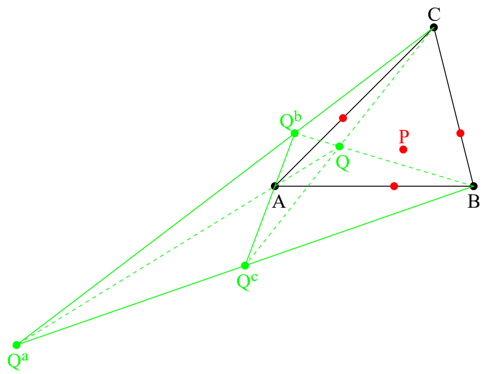
Es sei $P=(u:v:w)$ mit dem CEVA-Dreieck

$P_a=(0:v:w),\ P_b=(u:0:w),\ P_c=(u:v:0)$



und $Q=(p:q:r)$ mit dem Anti-CEVA-Dreieck

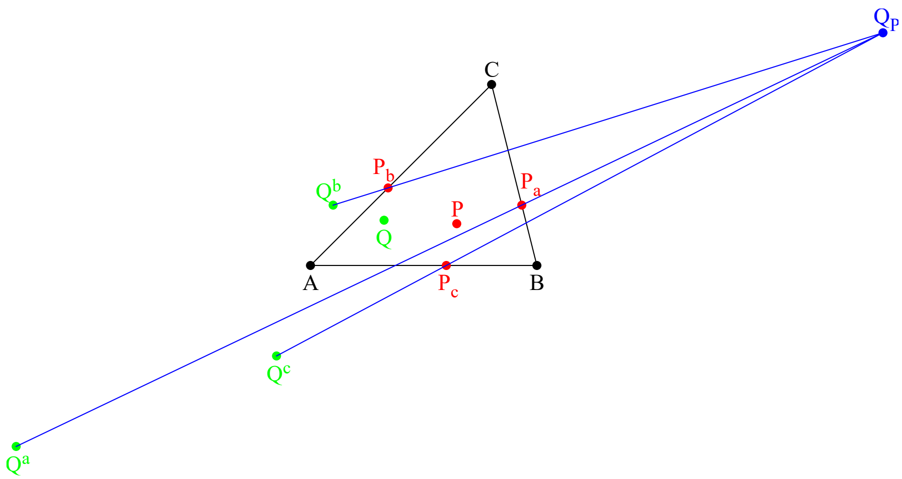
$$Q^a=(-p:q:r)$$
$$Q^b=(p:-q:r)$$
$$Q^c=(p:q:-r)$$



P und Q sollen auf keiner Dreiecks-Seite liegen.

Dann sind $P_aQ^a = [v \cdot r - w \cdot q : -w \cdot p : v \cdot p]$, P_bQ^b, P_cQ^c kopunktal in

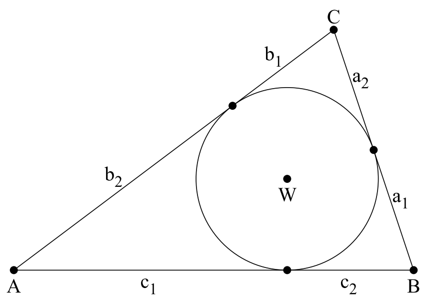
$$Q_P = \left(p \cdot \left(-\frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} \right) : q \cdot \left(\frac{p}{u} - \frac{q}{v} + \frac{r}{w} \right) : r \cdot \left(\frac{p}{u} + \frac{q}{v} - \frac{r}{w} \right) \right).$$



Man nennt Q_P den *P-Ceva-konjugierten Punkt zu Q*. Man kann $P = (u : v : w)$ und $Q = (p : q : r)$ nicht miteinander vertauschen, da $Q_P \neq P_Q$ ist.
Es ist $Q_Q = Q$. Die Ceva-Konjugation wird weiter unten noch eine Rolle spielen.

14 Die Inkreis-Berührpunkte und der Gergonne-Punkt G

Die Ecktransversalen durch die gegenüberliegenden *In*kreisberührpunkte sind kopunktal im nach Joseph Diez Gergonne (1771-1859) benannten Punkt.
Man entnimmt der Graphik, dass $c_1 = b_2;\ a_1 = c_2;\ b_1 = a_2$ gilt.



Die Kopunktalität ist offensichtlich. Wegen $a_1 + b_1 = a;\ b_1 + c_1 = b;\ c_1 + a_1 = c$ ist

$\boxed{a_1 = \frac{\sigma_b}{2};\ b_1 = \frac{\sigma_c}{2};\ c_1 = \frac{\sigma_a}{2}}$ mit $\sigma_a = -a + b + c$ usw.

Die Inkreis-Berührpunkte sind

$$\boxed{W^a = (0 : \sigma_c : \sigma_b),\ W^b = (\sigma_c : 0 : \sigma_a),\ W^c = (\sigma_b : \sigma_a : 0)}.$$

Für den GERGONNE-Punkt G gilt daher

$$\boxed{G = \left(\frac{1}{\sigma_a} : \frac{1}{\sigma_b} : \frac{1}{\sigma_c}\right) = (r_a : r_b : r_c)}$$

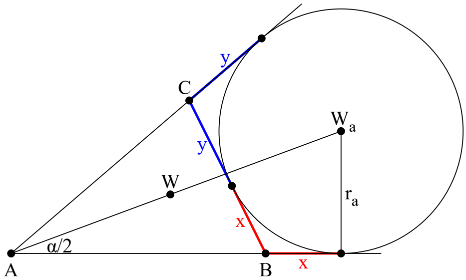
mit den Ankreis-Radien r_a usw.

Wegen

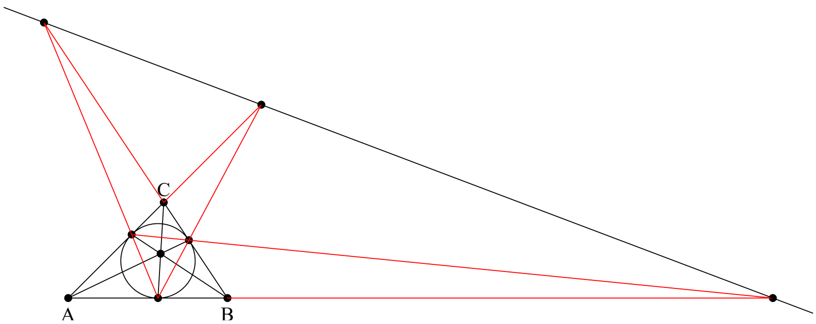
$$c + x = b + y$$
$$x + y = a$$

ist $c + x = \dfrac{a+b+c}{2}$ und daher

$$\boxed{G = \left(\tan\frac{\alpha}{2} : \tan\frac{\beta}{2} : \tan\frac{\gamma}{2}\right)}$$

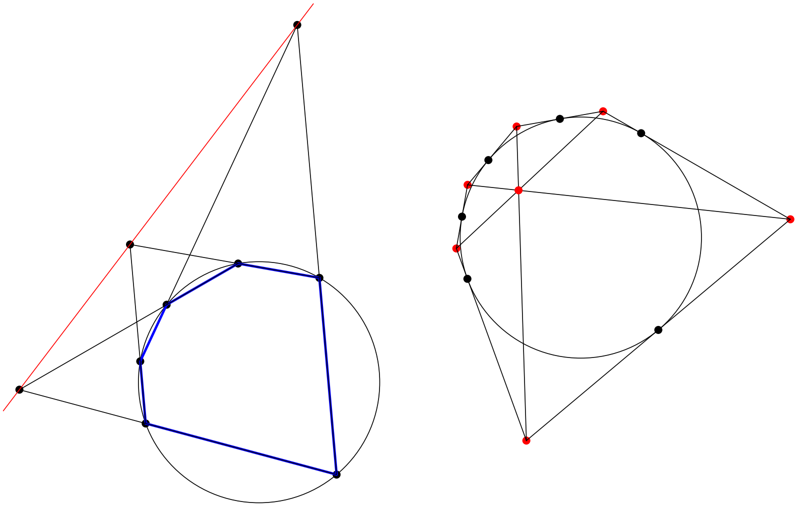


Die Gerade durch W^a und W^b ist $[\sigma_a : \sigma_b : -\sigma_c]$; sie schneidet AB in $C^{\#} = (\sigma_b : -\sigma_a : 0)$. Die analogen Punkte $A^{\#} = (0 : \sigma_c : -\sigma_b)$ und $B^{\#} = (-\sigma_c : 0 : \sigma_a)$ die (zu den Berührpunkten harmonisch Konjugierten) sind kollinear auf der GERGONNE-Geraden $(\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c)$, der harmonischen Polaren des GERGONNE-Punktes $G = \left(\dfrac{1}{\sigma_a} : \dfrac{1}{\sigma_b} : \dfrac{1}{\sigma_c}\right)$.

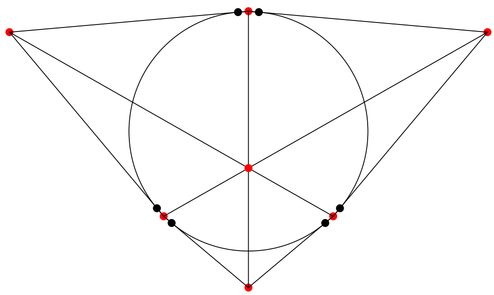


14.1 Zusammenhang zum Satz von BRIANCHON

Die Existenz des GERGONNE-Punktes ist ein Spezialfall des Satzes von Charles Julien BRIANCHON (1783 - 1864), der seinerseits zu einem Satz von Blaise PASCAL (1623 - 1662) über ein Sehnensechseck dual ist:
Ersetzt man „Punkt auf Kegelschnitt" durch „Tangente an Kegelschnitt", „Verbindungsgerade" durch „Schnittpunkt" und „kollinear" durch „kopunktal", so wird aus dem Satz von PASCAL über ein Sehnensechseck (die Schnittpunkte gegenüberliegender Sehnen sind kollinear) der Satz von BRIANCHON (rechts), der später bei den Berührquadriken wieder aufgenommen werden wird:

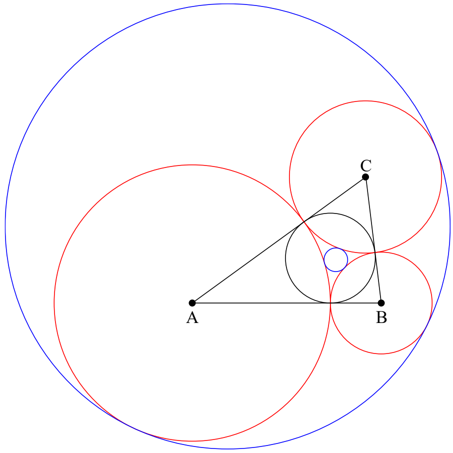


Sechs Tangenten an den Kreis seien gegeben. Jeweils zwei benachbarte Tangenten schneiden einander in den roten Punkten. Die Verbindungsgeraden gegenüberliegender roter Punkte sind dann kopunktal.
Rücken jeweils zwei benachbarte Punkte aufeinander zu, so hat man im Limes ein Dreieck mit Inkreis:



14.2 Exkurs: Die SODDY-Kreise und die SODDY-Gerade

Die Inkreis-Berührpunkte geben Anlass zu drei sich berührenden Kreisen (rot), und diese wiederum zu einem Innenkreis und einem Außenkreis (blau).
Beide werden nach dem Chemie-Nobelpreisträger Frederick SODDY (1877–1956) benannt.



Der Innenkreis[8] hat den Mittelpunkt

$$Z_{inn} = X176 = \left(a+r_a : b+r_b : c+r_c\right) = \frac{\sigma \cdot W + \left(r_a+r_b+r_c\right)\cdot G}{\sigma + \left(r_a+r_b+r_c\right)}$$

und den Radius $r_{inn} = \dfrac{\Delta}{\sigma + \left(r_a+r_b+r_c\right)}$; der Außenkreis hat den Mittelpunkt

$$Z_{aus} = X175 = \left(a-r_a : b-r_b : c-r_c\right) = \frac{\sigma \cdot W - \left(r_a+r_b+r_c\right)\cdot G}{\sigma - \left(r_a+r_b+r_c\right)}$$

und den Radius $r_{aus} = \dfrac{\Delta}{\sigma - \left(r_a+r_b+r_c\right)}$.

[8] N. Dergiades (2007) in Forum Geometricorum **7,** 191–197
auch M. Hajja / P. Yff (2007) in Jornal of Geometry **87**, 76-82
auch A. Oldknow (1996) in American Mathematical Monthly **103** (4), 319-329.

14.3 Die Hyperbeln der SODDY-Kreiszentren

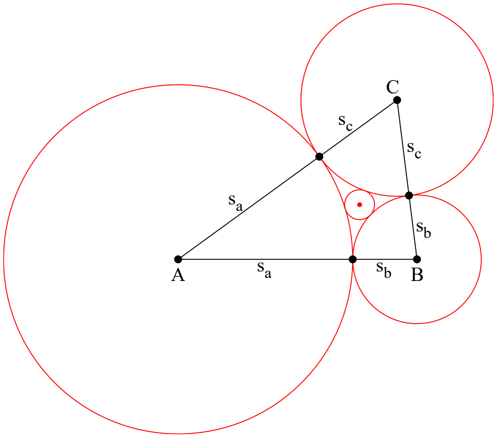
Mit $s_a := \frac{\sigma_a}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$ usw. ist

$$AZ_{inn} = s_a + r_{inn}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} AZ_{inn} - BZ_{inn} &= s_a - s_b \\ &= b - a \\ &= AC - BC \end{aligned}$$

liegen Z_{inn} und C auf einer Hyperbel mit den Brennpunkten A und B.



Mit $s_a := \frac{\sigma_a}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$ usw.

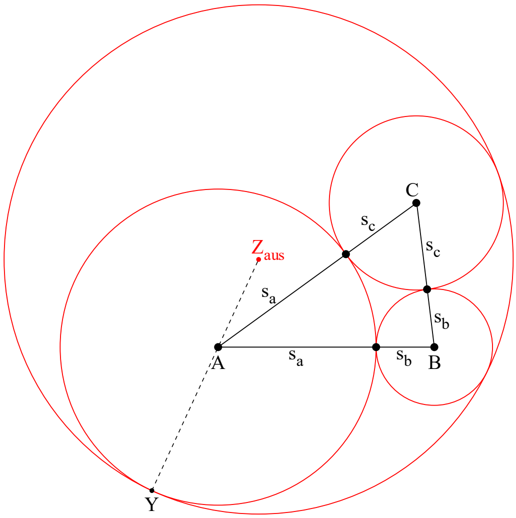
ist

$$AZ_{aus} = Z_{aus}Y - AY = r_{aus} - s_a.$$

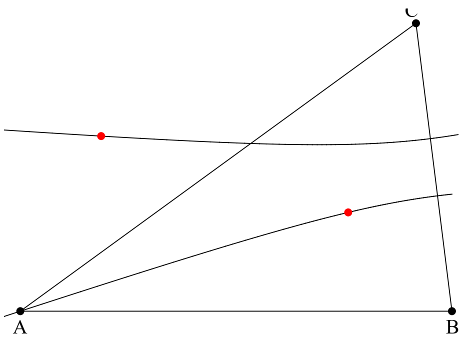
Daher ist

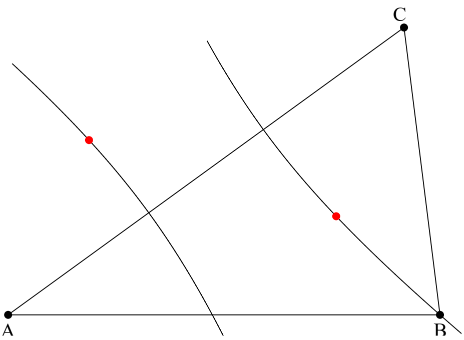
$$\begin{aligned} BZ_{aus} - AZ_{aus} &= \frac{\sigma_a - \sigma_b}{2} \\ &= b - a \\ &= AC - BC \end{aligned}$$

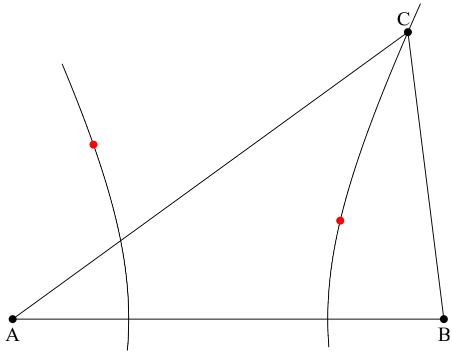
Folglich liegen auch Z_{aus} und C auf der Hyperbel mit den Brennpunkten A und B.



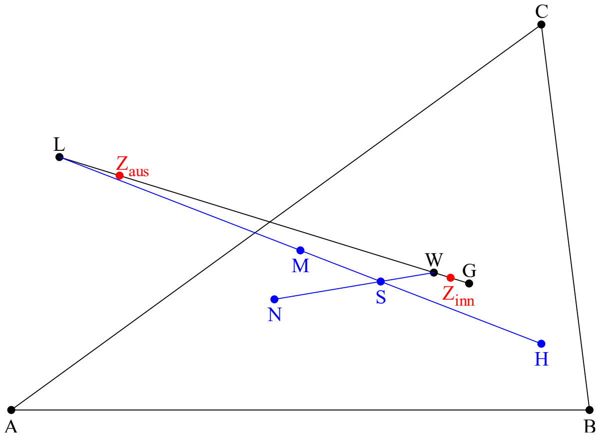
Damit sind Z_{inn} und Z_{aus} Schnittpunkte dreier Hyperbeln:







Die beiden Mittelpunkte Z_{inn}, Z_{aus} liegen auf der durch W, G und den (weiter unten behandelten) LONGCHAMPS-Punkt L verlaufenden Gerade, die daher nach SODDY benannt wird.
Der Punkt N ist Thema des nächsten Abschnitts.

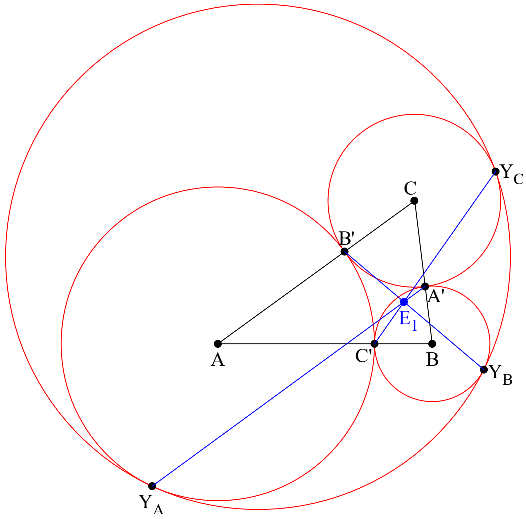


14.4 Die EPPSTEIN-Punkte E_1=X481 und E_2=X482

Sind A‘, B‘, C‘ die Berührpunkte des Inkreises mit den Dreiecksseiten und Y_A, Y_B, Y_C die Berührpunkte des Außenkreises mit den Kreisen um A durch B‘ und C‘, um B durch C‘ und A‘ und um C durch A‘ und B‘, so treffen sich die Geraden A’Y_A, B’Y_B, C’Y_C im Punkt[9]

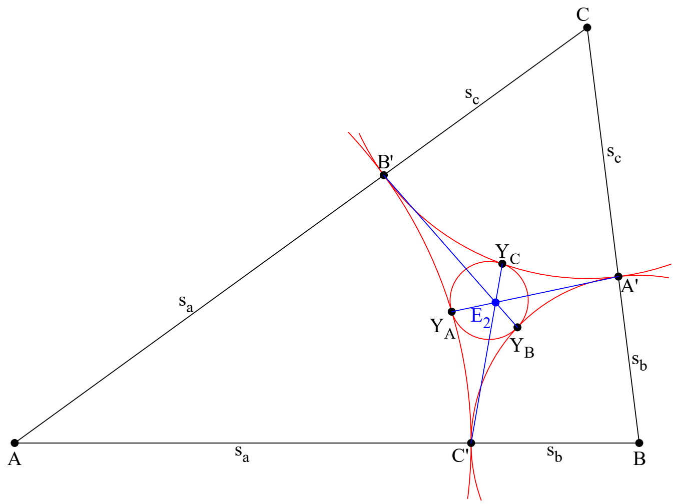
$$E_1 = X481$$
$$= \left(a - 2 \cdot r_a : b - 2 \cdot r_b : c - 2 \cdot r_c\right)$$

Er wurde von A. OLDKNOW gefunden[10] und wird nach D. EPPSTEIN benannt[11] wird.



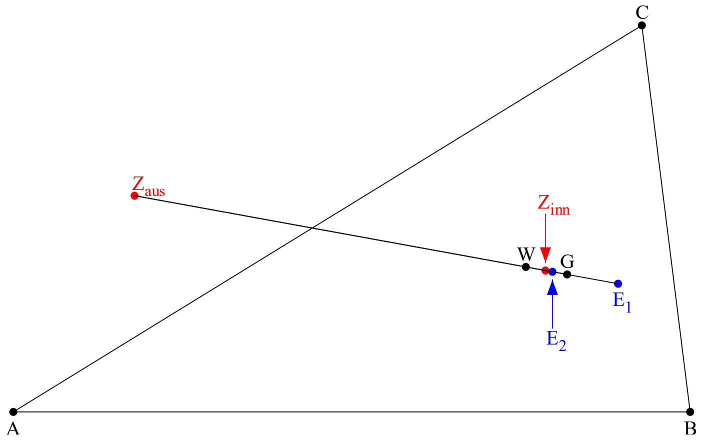
Analoges gilt für den Innenkreis und führt auf

$$E_2 = X482$$
$$= \left(a + 2 \cdot r_a : \ldots : \ldots\right)$$



[9] E. Danneels (2005) in Forum Geometricorum **5**, 173–180.
[10] A. Oldknow (1996) in American Mathematical Monthly **103** (4), 319-329.
[11] D. Eppstein (2001) in American Mathematical Monthly **108** (1), 63-66.

Beide EPPSTEIN-Punkte liegen auf der SODDY-Geraden.



Die SODDY-Gerade steht auf der harmonischen Polaren zum GERGONNE-Punkt (der sog. GERGONNE-Gerade) senkrecht, wovon man sich mit Hilfe eines CAS überzeugt.

14.5 Die Begleiter des GERGONNE-Punktes G

Erinnerung: Der Inkreis von ABC mit seinem Mittelpunkt W und den Berührpunkten W^a, W^b und W^c gibt Anlass zum GERGONNE-Punkt $G = \left(\frac{1}{\sigma_a} : \frac{1}{\sigma_b} : \frac{1}{\sigma_c}\right)$ als Schnittpunkt von AW^a, BW^b und CW^c.

Betrachten wir die Berührpunkte $(W_a)^a$, $(W_a)^b$, $(W_a)^c$ des Ankreises um W_a.

Wegen $(W_a)^a = (0 : \sigma_b : \sigma_c)$ ist $A(W_a)^a = [0 : -\sigma_c : \sigma_b]$.

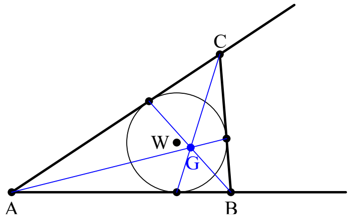
Wegen $(W_a)^b = (-\sigma_b : 0 : \sigma)$ ist $B(W_a)^b = [\sigma : 0 : \sigma_b]$.

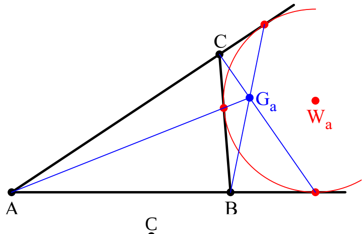
Wegen $(W_a)^c = (-\sigma_c : \sigma : 0)$ ist $C(W_a)^c = [\sigma : \sigma_c : 0]$.

Die Kopunktalität ereignet sich im Begleiter G_a des GERGONNE-Punktes

$$\boxed{G_a = \left(-\frac{1}{\sigma} : \frac{1}{\sigma_c} : \frac{1}{\sigma_b}\right) = (-r : r_c : r_b)}.$$

Die folgende Graphik zeigt den Übergang von G (links) zu G_a (rechts): Die Berührpunkte des Inkreises wurden durch die Berührpunkte des Ankreises ersetzt.

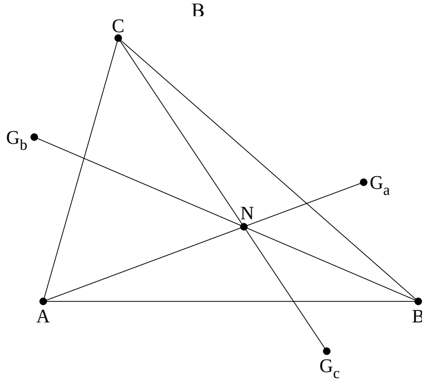




Analog sind

$$G_b=\left(\frac{1}{\sigma_c}:-\frac{1}{\sigma}:\frac{1}{\sigma_a}\right),\ G_c=\left(\frac{1}{\sigma_b}:\frac{1}{\sigma_a}:-\frac{1}{\sigma}\right)$$

die beiden anderen Begleiter.



Die Geraden $\left\{\begin{array}{l} AG_a=[0:-\sigma_c:\sigma_b] \\ BG_b=[-\sigma_c:0:\sigma_a] \\ CG_c=[-\sigma_b:\sigma_a:0] \end{array}\right\}$ sind

kopunktal im NAGEL-Punkt

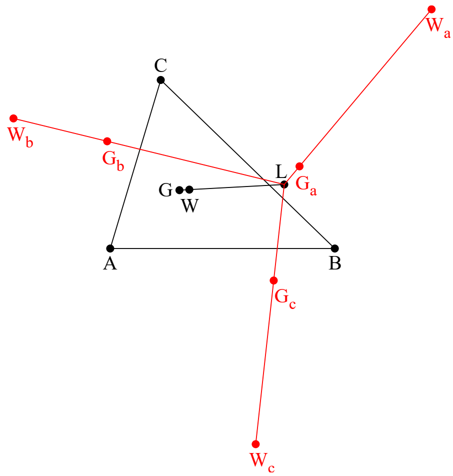
$N=(\sigma_a:\sigma_b:\sigma_c)$.

Eine Rechnung zeigt, dass die Geraden

$$WG=\left[\frac{b}{\sigma_c}-\frac{c}{\sigma_b}:\frac{c}{\sigma_a}-\frac{a}{\sigma_c}:\frac{a}{\sigma_b}-\frac{b}{\sigma_a}\right]$$

und

$$W_aG_a=\left[\frac{b}{\sigma_b}-\frac{c}{\sigma_c}:\frac{a}{\sigma_b}-\frac{c}{\sigma}:\frac{b}{\sigma}-\frac{a}{\sigma_c}\right]$$



sowie W_bG_b und W_cG_c kopunktal im (weiter unten behandelten) LONGCHAMPS-Punkt

$$\left(2\cdot a^2\cdot\Sigma_a-\Sigma_b\cdot\Sigma_c:*:*\right)=\left(a\cdot\cos\alpha-a\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma:*:*\right)=L$$

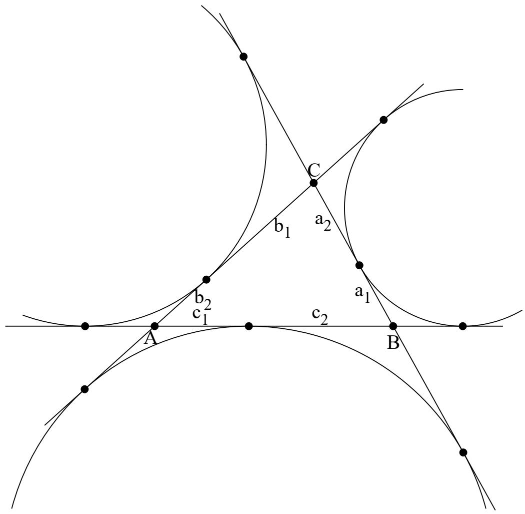
sind.

15 Die Ankreis-Berührpunkte und der NAGEL-Punkt N = X8

Die Ecktransversalen durch die gegenüberliegenden ***An***kreisberührpunkte sind kopunktal im nach Christian Heinrich von NAGEL (1803-1882) benannten Punkt.

Man entnimmt der Graphik,

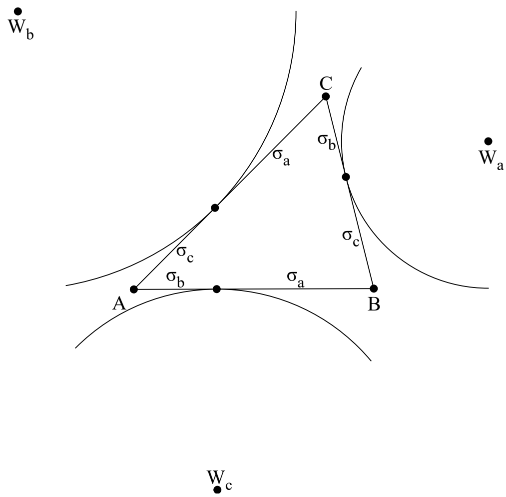
dass $\left\{\begin{matrix} b+a_2=c+a_1 \\ a+c_2=b+c_1 \\ c+b_2=a+b_1 \end{matrix}\right\}$ gilt.



Man kann a auf zwei Arten ausdrücken, woraus $c+b_2-b_1=b+c_1-c_2$ und damit $c_2=b_1$ folgt.

Man kann b auf zwei Arten ausdrücken, woraus $c+a_1-a_2=a+c_2-c_1$ und damit $a_2=c_1$ folgt.

Man kann c auf zwei Arten ausdrücken, woraus $b+a_2-a_1=a+b_1-b_2$ und damit $b_2=a_1$ folgt.



Die Kopunktalität ist wegen CEVA offensichtlich, und wegen $a_1+c_1=a;\ b_1+a_1=b;\ c_1+b_1=c$ ist $\boxed{a_1=\frac{\sigma_c}{2};\ b_1=\frac{\sigma_a}{2};\ c_1=\frac{\sigma_b}{2}}$.

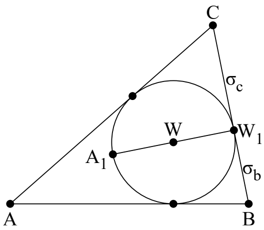
Für den NAGEL-Punkt N gilt daher

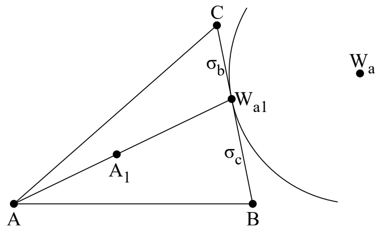
$$\boxed{N=(\sigma_a:\sigma_b:\sigma_c)}.$$

15.1 In- und Ankreise

Es ist $W_1 = (0 : \sigma_c : \sigma_b)$ der Berührpunkt des Inkreises mit BC und

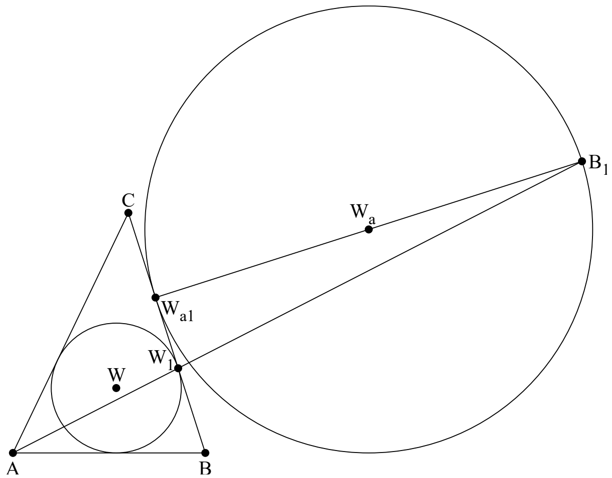
$W_{a1} = (0 : \sigma_b : \sigma_c)$ der Berührpunkt des A-Ankreises mit BC.



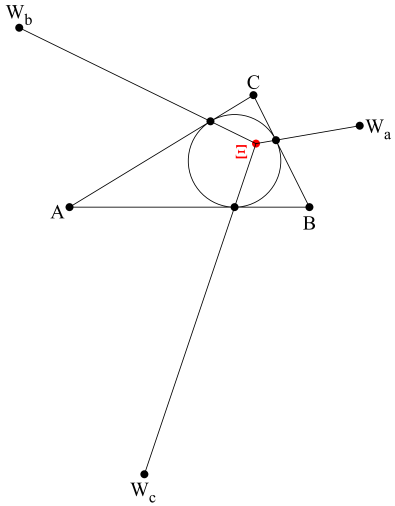


Dann verläuft $AW_{a1} = [0:-\sigma_c:\sigma_b]$ durch $A_1 = \left(4 \cdot \frac{a^2}{\sigma_a} : \sigma_b : \sigma_c\right)$, den zu W_1 antipodalen Punkt auf dem Inkreis.

Analog verläuft $AW_1 = [0:-\sigma_b:\sigma_c]$ durch $B_1 = \left(-4 \cdot \frac{a^2}{\sigma} : \sigma_c : \sigma_b\right)$, den zu W_{a1} antipodalen Punkt auf dem A-Ankreis.



15.2 Erstes Auftreten des Punktes Ξ = X57



Die Gerade durch die Mittelpunkte der Ankreise zu den nächstgelegenen Berührpunkten des Inkreises sind kopunktal.
Dazu benötigt man die Berührpunkte; sie sind gegeben durch

$A' = (0 : \sigma_c : \sigma_b)$ usw., so dass die Geraden folgende Gestalt haben:

$$W_aA' = [b\cdot\sigma_b - c\cdot\sigma_c : a\cdot\sigma_b : -a\cdot\sigma_c]$$
$$W_bB' = [-b\cdot\sigma_a : c\cdot\sigma_c - a\cdot\sigma_a : b\cdot\sigma_c]$$
$$W_cC' = [c\cdot\sigma_a : -c\cdot\sigma_b : a\cdot\sigma_a - b\cdot\sigma_b]$$

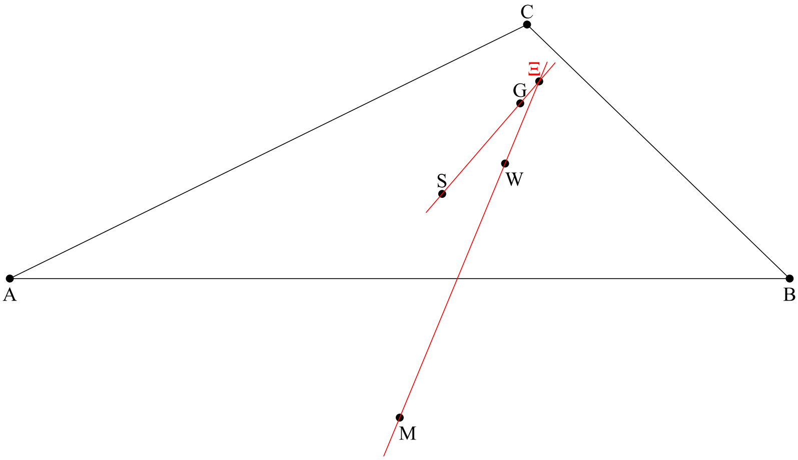
W_aA' und W_bB' schneiden einander in

$$\Xi = \big(a\cdot(-a\cdot\sigma_a + b\cdot\sigma_b + c\cdot\sigma_c) : b\cdot(a\cdot\sigma_a - b\cdot\sigma_b + c\cdot\sigma_c) : c\cdot(a\cdot\sigma_a + b\cdot\sigma_b - c\cdot\sigma_c)\big)$$
$$= (1-\cos\alpha : 1-\cos\beta : 1-\cos\gamma) = \left(\frac{\sigma_b\cdot\sigma_c}{b\cdot c} : \ldots : \ldots\right) = \boxed{\left(\frac{a}{\sigma_a} : \frac{b}{\sigma_b} : \frac{c}{\sigma_c}\right) = \Xi} = X57$$

wegen

$$\frac{a}{\sigma_a}\cdot\frac{\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c}{a\cdot b\cdot c} = \frac{\sigma_b\cdot\sigma_c}{b\cdot c} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c)}{b\cdot c}$$
$$= \frac{b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha - (b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c)}{b\cdot c}$$
$$= \frac{2\cdot b\cdot c - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}{b\cdot c} = 1 - \cos\alpha$$

Aufgrund der Symmetrie geht auch die dritte Gerade durch diesen Punkt.
Man rechnet leicht nach, dass sowohl M, W und Ξ als auch S, G und Ξ kollinear sind:



15.3 Begleiter von Ξ

Der A-Ankreis um W_a hat die Berührpunkte

$$W_{aa} = (0 : \sigma_b : \sigma_c)$$

$$W_{ab} = (-\sigma_b : 0 : \sigma)$$

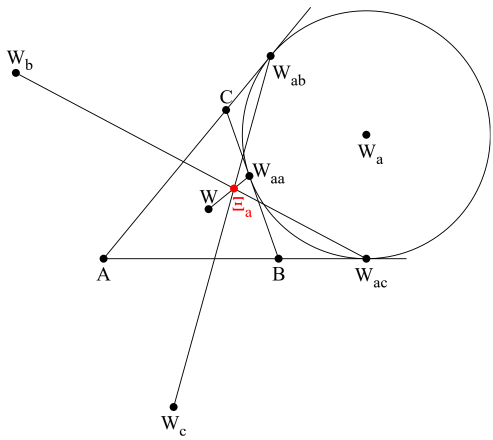
$$W_{ac} = (-\sigma_c : \sigma : 0)$$

Die Geraden

$$WW_{aa} = [\sigma \cdot (b-c) : -a \cdot \sigma_c : a \cdot \sigma_b]$$

$$W_b W_{ac} = [c \cdot \sigma : c \cdot \sigma_c : -(a+b) \cdot \sigma_b]$$

$$W_c W_{ab} = [b \cdot \sigma : -(a+c) \cdot \sigma_c : b \cdot \sigma_b]$$



sind kopunktal in

$$\Xi_a = (a \cdot \sigma_b \cdot \sigma_c : b \cdot \sigma_b \cdot \sigma : c \cdot \sigma_c \cdot \sigma) = \left(\frac{a}{\sigma} : \frac{b}{\sigma_c} : \frac{c}{\sigma_b} \right) = \boxed{(a \cdot r : b \cdot r_c : c \cdot r_b) = \Xi_a},$$

dem Begleiter von $\Xi = (a \cdot r_a : b \cdot r_b : c \cdot r_c)$.

15.4 Die Gerade SWN

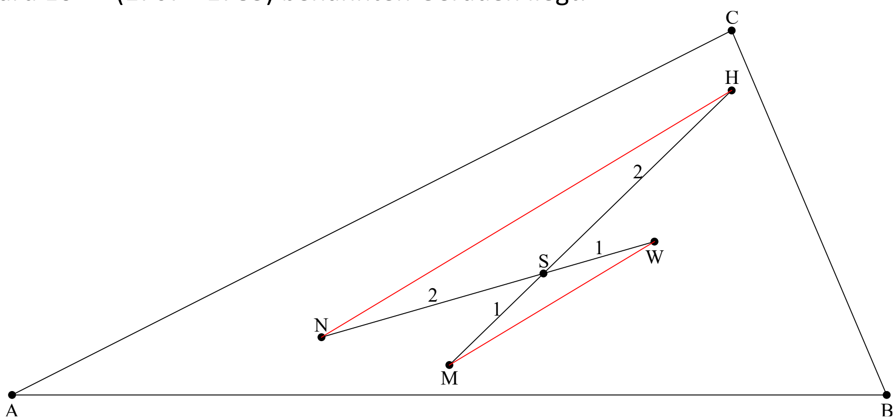
Wegen

$$\frac{2\cdot W+N}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C}{a+b+c}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(-a+b+c)\cdot A+(a-b+c)\cdot B+(a+b-c)\cdot C}{a+b+c}$$
$$=\frac{(a+b+c)\cdot A+(a+b+c)\cdot B+(a+b+c)\cdot C}{3\cdot(a+b+c)}=S$$

teilt der Seitenhalbierendenschnittpunkt S die Strecke WN im Verhältnis 1:2; insbesondere liegen W, S und N auf der Geraden $\left[b-c:c-a:a-b\right]$.

Für gleichseitige Dreiecke existiert diese Gerade nicht.

Später wird auch der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten (die keine Ecktransversalen sind) betrachtet, der zusammen mit S und H auf der nach Leonhard EULER (1707 - 1783) benannten Geraden liegt:



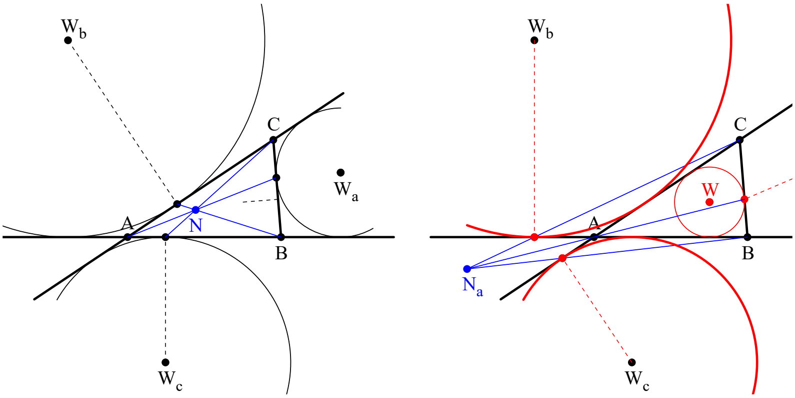
Wegen $\frac{SN}{SW}=\frac{SH}{SM}=2$ bildet MWHN ein *Trapez*.

15.5 Die Begleiter des NAGEL-Punktes N

GERGONNE- und NAGEL-Punkt sind zueinander isotom konjugiert. Haben auch die zu den Begleitern des GERGONNE-Punktes isotom konjugierten Punkte eine inhaltliche Bedeutung?

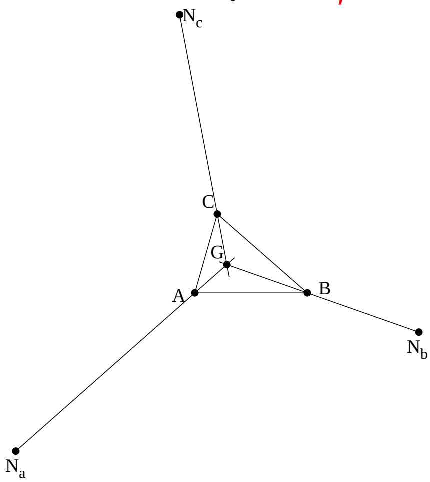
Wegen $W^a=(0:\sigma_c:\sigma_b)$; $(W_b)^c=(\sigma:-\sigma_c:0)$; $(W_c)^b=(\sigma:0:-\sigma_b)$ sind $C(W_b)^c$, $B(W_c)^b$ und AW^a kopunktal in $\boxed{N_a:=(-\sigma:\sigma_c:\sigma_b)}$, dem Begleiter des NAGEL-Punkts N.

In der folgenden Graphik sieht man den Übergang von N (links) zu N_a (rechts): Der Ankreis um W_a wird durch den Inkreis ersetzt, und die Rollen der beiden anderen Ankreise vertauschen sich:

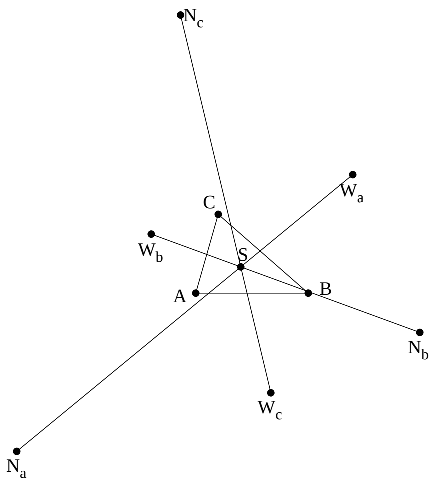


Die Ecktransversalen AN_a, BN_b, CN_c sind kopunktal im GERGONNE-Punkt

$$G = \left(\frac{1}{\sigma_a} : \frac{1}{\sigma_b} : \frac{1}{\sigma_c} \right).$$



N, S und W sind kollinear mit $\left|SN\right| = 2 \cdot \left|SW\right|$. Analog gilt wegen $\eta(N_a) = W_a$, dass auch N_a, S und W_a kollinear sind mit $\left|SN_a\right| = 2 \cdot \left|SW_a\right|$.

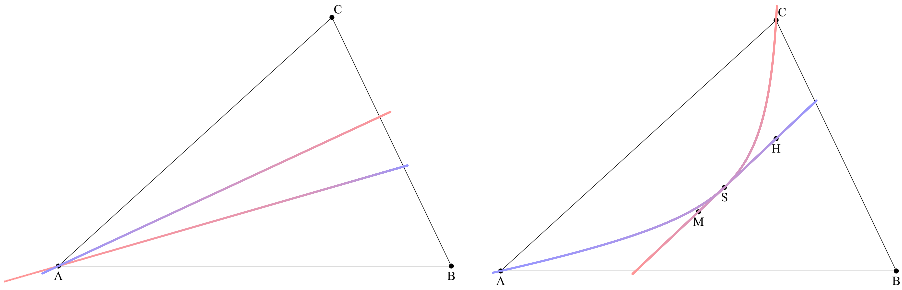


15.6 G und N sind zueinander isotom konjugiert

Noch etwas fällt auf: Die baryzentrischen Koordinaten von $G = \left(\frac{1}{\sigma_a} : \frac{1}{\sigma_b} : \frac{1}{\sigma_c}\right)$ und von $N = (\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c)$ sind zueinander reziprok, ebenso die von G_a und N_a usw. Man nennt zwei Punkte $(u : v : w)$ und $\left(\frac{1}{u} : \frac{1}{v} : \frac{1}{w}\right)$ zueinander *isotom konjugiert*. Es ist S zu sich selber iotom konjugiert; dies gilt auch für die zu S harmonisch konjugierten Punkte.

16 Zur isotomen Konjugation

$P = (u : v : w)$ ist isotom konjugiert zu $\left(\frac{1}{u} : \frac{1}{v} : \frac{1}{w}\right) = (v \cdot w : w \cdot u : u \cdot v)$. Die Eckpunkte A, B, C haben keine isotomen Konjugate.
Die isotome Konjugation bildet i. a. nicht Geraden auf Geraden ab, wohl aber Ecktransversalen auf (i.a. andere) Ecktransversalen (natürlich ausschließlich der Eckpunkte), wie in einem späteren Abschnitt bewiesen wird.
In den folgenden Bildern wird eine Ecktransversale durch A sowie die EULER-Gerade durch H und M punktweise abgebildet (rote Punkte werden auf rote Punkte, blaue auf blaue abgebildet).

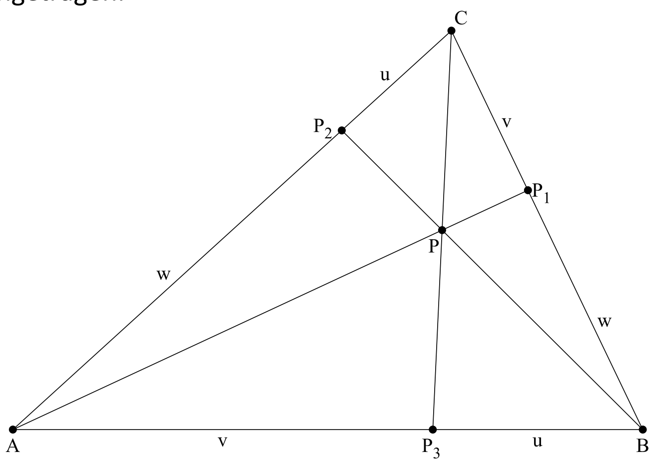


Später wird man sehen, dass die (auch durch B verlaufende) Kurve eine *Hyperbel* ist.

16.1 Deutung der isotomen Konjugation

Es sei $P=(u{:}v{:}w)$ ein Punkt mit seinen Spurpunkten

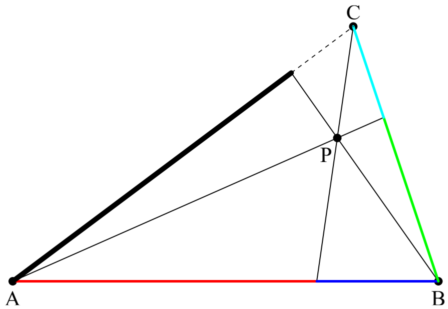
$P_1=(0{:}v{:}w)$, $P_2=(u{:}0{:}w)$, $P_3=(u{:}v{:}0)$; im folgenden Bild sind Strecken*verhältnisse* eingetragen.

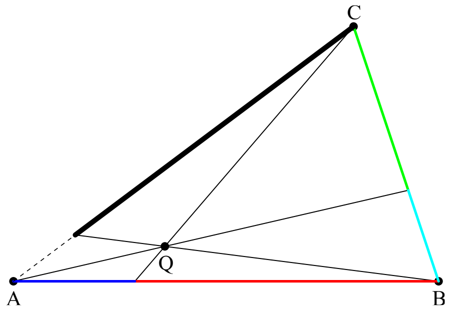


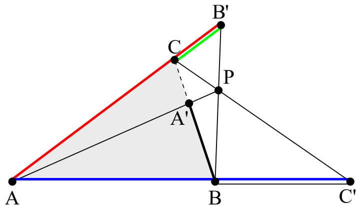
Spiegelt man P_1, P_2 und P_3 an den jeweiligen Seitenmittelpunkten, erhält man $Q_1=(0:w:v)=\left(0:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}\right)$ usw., die Ecktransversalen AQ_1, BQ_2, CQ_3 sind

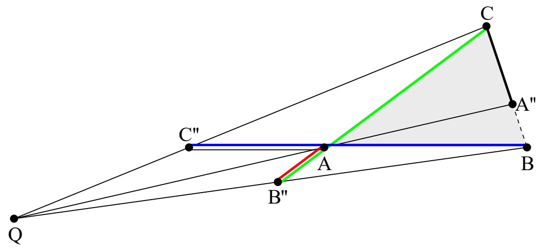
also kopunktal im zu P isotom konjugierten Punkt $Q=\left(\frac{1}{u}:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}\right)$.

Die Streckenabschnitte auf jeder Dreiecksseite vertauschen sich:









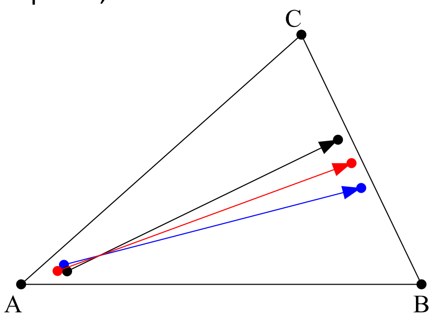
16.2 Die Bilder der isotomen Konjugation

Der Punkt $P=(p_1:p_2:p_3)$ durchlaufe die Gerade $g=[G_1:G_2:G_3]$; es gilt also $p_1\cdot G_1+p_2\cdot G_2+p_3\cdot G_3=0$. Der zu P isotom konjugierte Punkt $Q=(u:v:w)=\left(\frac{1}{p_1}:\frac{1}{p_2}:\frac{1}{p_3}\right)$ erfüllt dann die Gleichung

$$\frac{G_1}{p_2\cdot p_3}+\frac{G_2}{p_3\cdot p_1}+\frac{G_3}{p_1\cdot p_2}=\boxed{v\cdot w\cdot G_1+w\cdot u\cdot G_2+u\cdot v\cdot G_3=0}\,.$$

<u>Fall 1</u>: Die Gerade verlaufe durch einen Eckpunkt, etwa durch A.

Der Punkt $A=(1:0:0)$ kann für kleine Werte von ε angenähert werden durch $A=(1:\varepsilon\cdot v:\varepsilon\cdot w)$, dessen Bild bei isotomer Konjugation durch $\left(1:\frac{1}{\varepsilon\cdot v}:\frac{1}{\varepsilon\cdot w}\right)=\left(\varepsilon:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}\right)$ gegeben ist. In diesem Sinne ist jeder Punkt auf der Geraden durch B und C isotomes Konjugat von A.



Insbesondere sieht man, dass die isotome Konjugation <u>keine</u> Bijektion darstellt.

Verläuft die Gerade durch A, so hat sie die Gestalt $\left[0{:}G_2{:}G_3\right]$, und die isotomen Bilder $(u : v : w)$ der Punkte auf ihr erfüllen die Gleichung $w\cdot u\cdot G_2 + u\cdot v\cdot G_3 = 0$. Die letzte Gleichung stellt ein Geradenpaar dar, und zwar einerseits die durch B und C verlaufende Gerade mit $u = 0$, die eben schon erwähnt wurde, und die Gerade $\left[0 : \frac{1}{G_2} : \frac{1}{G_3}\right]$, denn wenn $p_2 \cdot G_2 = -p_3 \cdot G_3$ gilt, gilt auch $\frac{v}{G_2} = -\frac{w}{G_3}$. Die zweite Gerade verläuft wieder durch A.

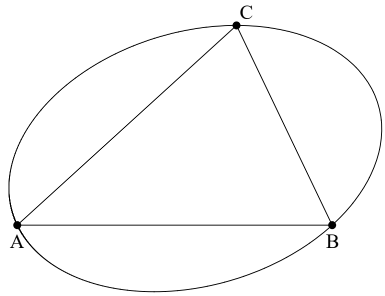
Auf der Geraden $\left[0{:}G_2{:}G_3\right]$ liegt auch der Fernpunkt $\left(G_2 - G_3{:}G_3{:}-G_2\right)$, dessen Bild bei isotomer Konjugation durch $\left(\frac{1}{G_2 - G_3} : \frac{1}{G_3} : -\frac{1}{G_2}\right) = \left(G_2 \cdot G_3 : G_2 \cdot \left(G_2 - G_3\right) : G_3 \cdot \left(G_3 - G_2\right)\right)$ im Endlichen liegt, und zwar auch auf $\left[0 : \frac{1}{G_2} : \frac{1}{G_3}\right]$. Damit gilt:

Durch die isotome Konjugation wird die A-Ecktransversale $\left[0{:}j{:}k\right]$ auf die A-Ecktransversale $\left[0{:}\frac{1}{j}{:}\frac{1}{k}\right]$ abgebildet.

<u>Fall 2</u>: Die Gerade verlaufe durch keinen Eckpunkt. Dann sind die $G_1, \ldots, G_3$ alle von Null verschieden. Die Gleichung $\boxed{v\cdot w\cdot G_1 + w\cdot u\cdot G_2 + u\cdot v\cdot G_3 = 0}$ bzw. $\boxed{\frac{G_1}{u} + \frac{G_2}{v} + \frac{G_3}{w} = 0}$ ist quadratisch und stellt somit einen *Kegelschnitt* dar. Der Kegelschnitt verläuft durch alle drei Eckpunkte.

16.3 Das isotome Bild der Ferngeraden

Ein beliebiger Punkt der Ferngeraden hat die Form $\left(1:\lambda:-(1+\lambda)\right)$ und hat $\left(1:\frac{1}{\lambda}:\frac{-1}{1+\lambda}\right)=\left(\lambda^2+\lambda:\lambda+1:-\lambda\right)$ als isotomes Konjugat. Dieses liegt für kein reelles λ auf der Ferngeraden. Es handelt sich also um eine Ellipse.



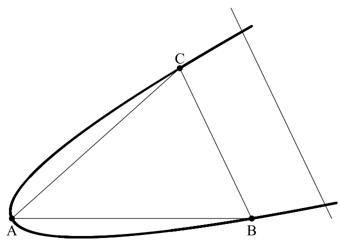
16.4 Bilder von zu Dreiecksseiten parallelen Geraden

Betrachten wir das Bild einer Geraden, die zu einer Dreiecksseite parallel ist. So ist die Gerade $[s:1:1]$ zu $BC=[1:0:0]$ parallel.

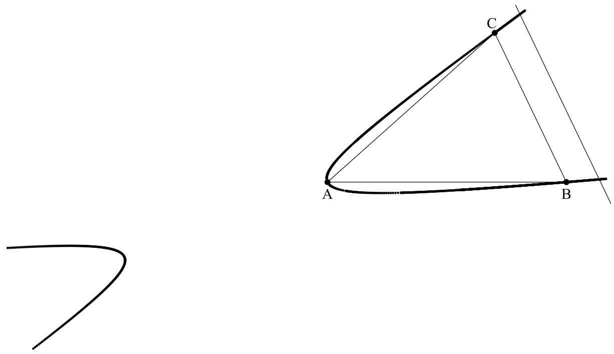
Für $s=0$ bekommt man die Parallele zu BC durch A; ihr isotomes Bild wird durch $w\cdot u+u\cdot v=0$ beschrieben, also durch $u=0$ (siehe oben) und durch $v+w=0$ (also durch $[0:1:1]$). Daher ist jede Parallele einer Dreiecksseite durch den gegenüber liegenden Eckpunkt eine Fixgerade, wenn man vom Eckpunkt selber absieht.

Nun sei $s\neq 0$. Der entstehende Kegelschnitt hat die Gleichung $v\cdot w+w\cdot u\cdot s+u\cdot v=0$ und hat mit der Ferngeraden die beiden Schnittpunkte $\left(2:-s\pm\sqrt{s\cdot(s-4)}:-2+s\mp\sqrt{s\cdot(s-4)}\right)$.

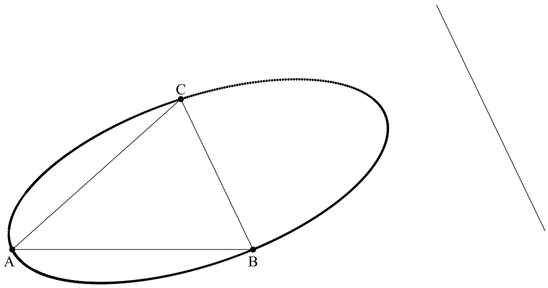
Für $s=4$ fallen beide Schnittpunkte zusammen, und der Kegelschnitt ist eine *Parabel.*



Für $s > 4$ hat man zwei reelle Schnittpunkte; der Kegelschnitt ist eine *Hyperbel.*

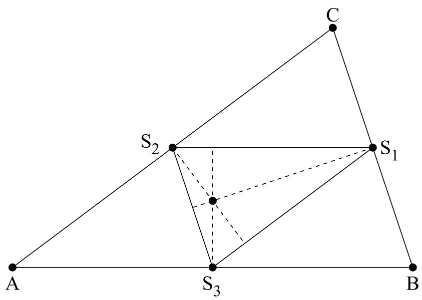


Für $0 < s < 4$ hat man keine reellen Schnittpunkte und daher eine *Ellipse.*



17 Mittelsenkrechten und die Umkreismitte M = X3

Mittelsenkrechten lassen sich als Höhen des Mittendreiecks $S_1S_2S_3$ auffassen.
Dann ist …



$$M = \frac{\tan\alpha \cdot S_1 + \tan\beta \cdot S_2 + \tan\gamma \cdot S_3}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma} = \frac{\tan\alpha \cdot (B + C) + \tan\beta \cdot (A + C) + \tan\gamma \cdot (A + B)}{2 \cdot (\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma)}$$

$$= \boxed{(\tan\beta + \tan\gamma : \tan\gamma + \tan\alpha : \tan\alpha + \tan\beta) = M}$$

$$= \boxed{(a \cdot \cos\alpha : b \cdot \cos\beta : c \cdot \cos\gamma) = M}$$

$$= \boxed{(\sin(2 \cdot \alpha) : \sin(2 \cdot \beta) : \sin(2 \cdot \gamma)) = M}\ .$$

17.1 Die EULER-Gerade

Wegen $\frac{2\cdot M+H}{3}=S$ teilt der Seitenhalbierendenschnittpunkt S die Strecke HM im Verhältnis 1:2; insbesondere liegen H, S und M auf der schon erwähnten EULER-Geraden $\left[\tan\beta-\tan\gamma : \tan\gamma-\tan\alpha : \tan\alpha-\tan\beta\right]$.

Für gleichseitige Dreiecke existiert diese Gerade nicht.

17.2 H und M sind zueinander isogonal konjugiert

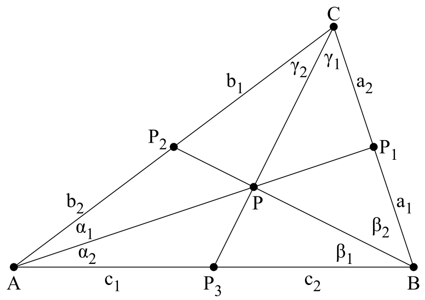
Noch etwas fällt auf: Es ist

$$M=\left(a\cdot\cos\alpha : b\cdot\cos\beta : c\cdot\cos\gamma\right)=\left(\frac{a^2}{\tan\alpha}:\frac{b^2}{\tan\beta}:\frac{c^2}{\tan\gamma}\right).$$

Man nennt zwei Punkte $(u : v : w)$ und $\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)$ zueinander *isogonal konjugiert*. H und M sind zueinander isogonal konjugiert.

17.3 Die Winkelfassung des Satzes von CEVA

Um die isogonale Konjugation geometrisch deuten zu können, ist ein erneuter Blick auf den Satz von CEVA hilfreich:



Aufgrund des Sinussatzes in ABP_1 und in $A P_1C$ ist $\frac{a_1}{a_2}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$; zusammen mit analogen Beziehungen

$\frac{b_1}{b_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1}$ und

$\frac{c_1}{c_2}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1}$ sieht man,

dass das Kopunktalitätskriterium $a_1\cdot b_1\cdot c_1=a_2\cdot b_2\cdot c_2$ äquivalent ist zu

$$\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1\cdot\sin\gamma_1=\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2\cdot\sin\gamma_2\,.$$

Für den Schnittpunkt gilt

$$\left(a_1\cdot b_1 : a_2\cdot b_2 : a_1\cdot b_2\right)=\left(a\cdot\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2 : b\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1 : c\cdot\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_1\right).$$

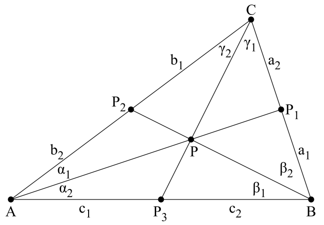
18 Zur isogonalen Konjugation

18.1 Deutung der isogonalen Konjugation

Erinnerung: $P=(u:v:w)$ ist isogonal konjugiert zu

$Q=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)=\left(a^2\cdot v\cdot w:b^2\cdot w\cdot u:c^2\cdot u\cdot v\right)$. Zur Deutung ist die Winkelfassung des Satzes von CEVA hilfreich:

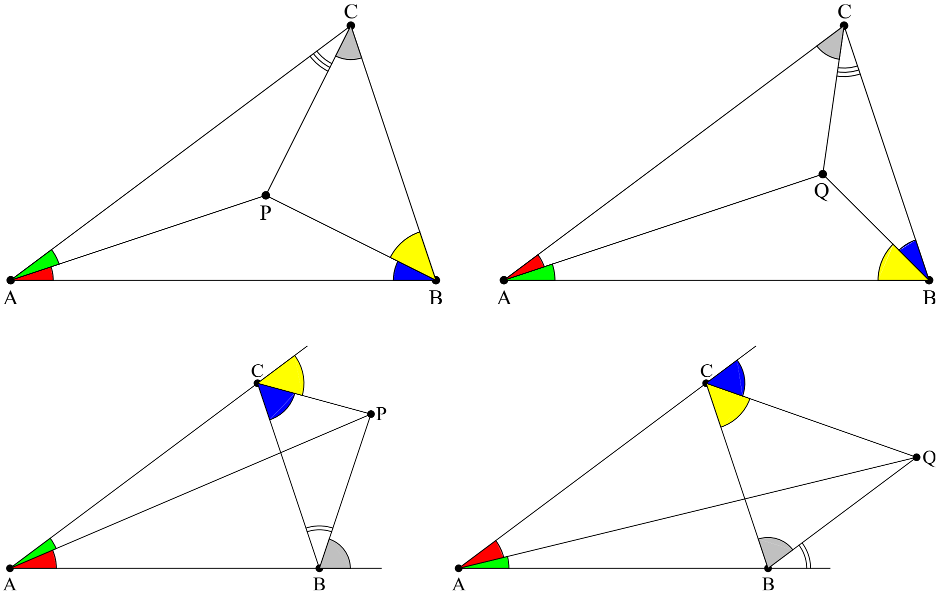
Spiegelt man die in $P=(a\cdot\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2:\ldots:\ldots)$ kopunktalen Ecktransversalen AP, BP und CP an den Innen-Winkelhalbierenden durch A, B und C, so sind die gespiegelten Ecktransversalen kopunktal im zu P isogonal konjugierten Punkt



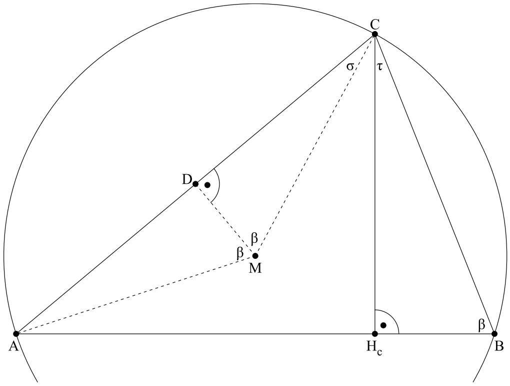
$$Q=(a\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\beta_1:\ldots:\ldots)=\left(\frac{a}{\sin\alpha_2\cdot\sin\beta_2}:\ldots:\ldots\right).$$

Liegt P außerhalb des Dreiecks, so muss man an den Außen-Winkelhalbierenden spiegeln, und die Argumentation etwas wird umfangreicher.

Ist P zu Q isogonal konjugiert, vertauschen sich die Winkel bei A, B und C:

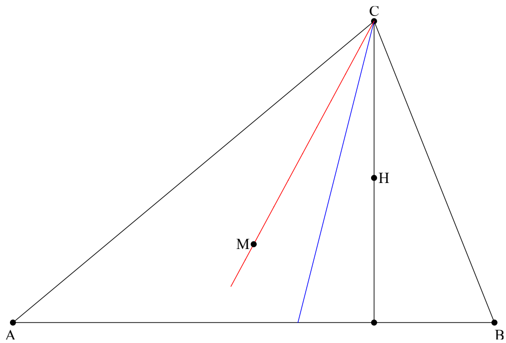


18.2 Elementargeom.: H und M sind zueinander isogonal konj.

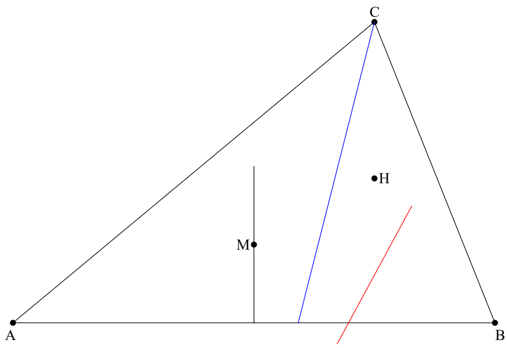


Dass Höhe CH und CM spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden durch C liegen, sieht man für spitzwinklige Dreiecke auch *elementargeometrisch* leicht ein: Aufgrund des Peripheriewinkelsatzes tritt der Winkel β auch bei M auf. Die Dreiecke DMC und CH_cB sind daher zueinander ähnlich, woraus $\sigma = \tau$ folgt.
CM und CH liegen daher spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden durch C.

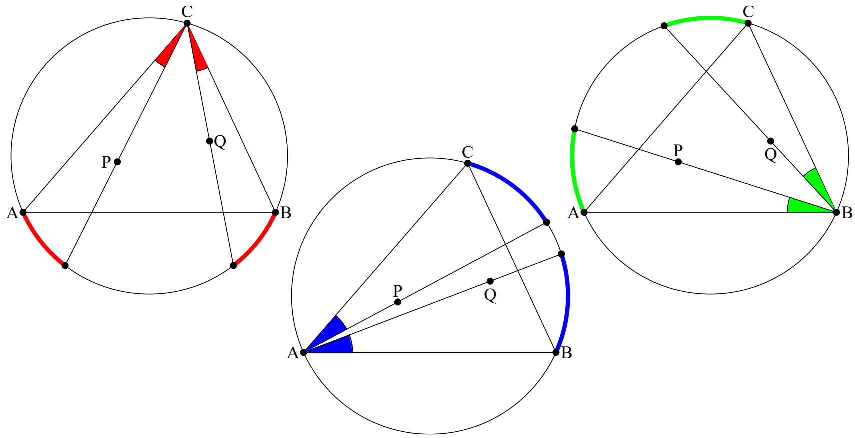
Spiegelt man die schwarze Höhe punktweise an der blauen Winkelhalbierenden, erhält man die rote Strecke, also natürlich nicht die Mittelsenkrechte.



Spiegelt man die schwarze Mittelsenkrechte punktweise an der blauen Winkelhalbierenden, erhält man die rote Strecke, also natürlich nicht die Höhe. H liegt i.a. nicht auf der roten Strecke.

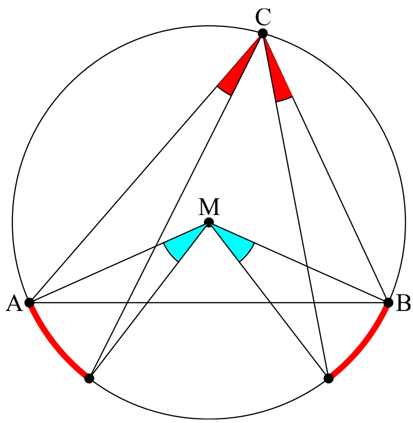


18.3 Zusammenhang zum Umfangswinkelsatz



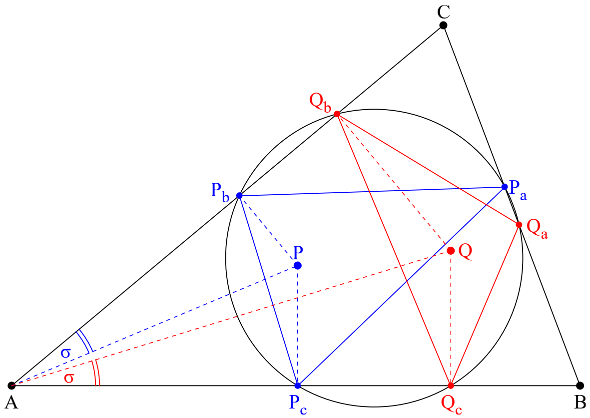
Ist im Bild oben P im Dreiecksinneren und Q zu P isogonal konjugiert, sind gleichfarbige Winkel und gleichfarbige Kreisbögen von gleicher Größe, denn:

Wenn die beiden roten Umfangswinkel gleiche Größe haben, dann auch die beiden cyanfarbenen Mittelpunktswinkel (cyan = 2-mal rot).



18.4 Verallgemeinerung von Neun-Punkte-Kreis und Inkreis

Der Mittelpunkt des 9-Punkte-Kreises ist der Mittelpunkt der beiden zueinander isogonal konjugierten Punkte H und M. Der Mittelpunkt des Inkreises ist der Mittelpunkt der beiden zueinander konjugierten Punkte W und W. Lässt ich das verallgemeinern? Die Antwort ist positiv:



P und Q seien isogonal konjugiert zueinander im Dreiecksinneren.
Es werden die Lotfußpunkte gebildet.
Dann ist

$AP_c = AP \cdot \cos(\alpha - \sigma)$

usw., also

$AP_c \cdot AQ_c = AP_b \cdot AQ_b$

usw.;
nach der Umkehrung des Sehnensatzes liegen die Lotfußpunkte alle auf einem gemeinsamen Kreis. Dessen Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu P_cQ_c und zu P_bQ_b, ist also der Mittelpunkt von PQ.
Ist $P = W = Q$, so hat man den Inkreis. Ist $P = M$ und $Q = H$, so hat man den 9-Punkte-Kreis.

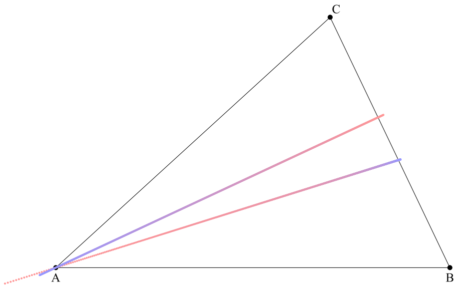
18.5 Das isogonale Bild der Ferngeraden

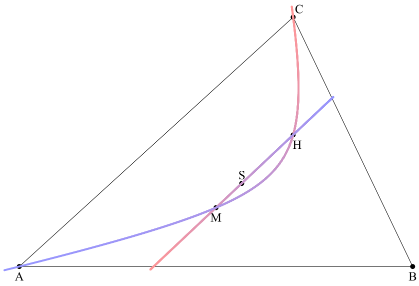
Ein beliebiger Punkt der Ferngeraden hat die Form $(1 : \lambda : -(1+\lambda))$ und hat das Konjugat $\left(a^2 : \frac{b^2}{\lambda} : \frac{-c^2}{1+\lambda}\right)$. Das isogonale Konjugat erfüllt die Gleichung $a^2 \cdot v \cdot w + b^2 \cdot w \cdot u + c^2 \cdot u \cdot v = 0$. Wir werden später sehen, dass dies die Gleichung des *Umkreises* von ABC ist.
Die Ferngerade wird also auf den Umkreis abgebildet.

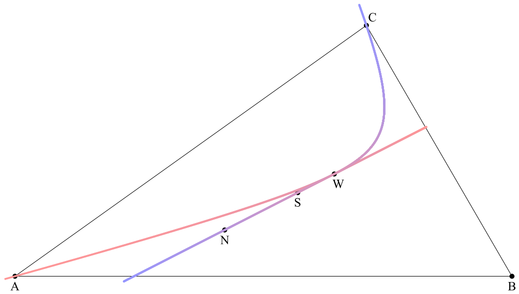
18.6 Bilder der isogonalen Konjugation

Punkte auf einer Dreiecksseite, die von den Dreiecks-Eckpunkten verschieden aind, werden bei der isogonalen Konjugation auf den gegenüber liegenden Eckpunkt abgebildet.
Die Eckpunkte haben bei der isogonalen Konjugation kein Bild. Die isogonale Konjugation ist also weder injektiv noch surjektiv.

In den folgenden Bildern wird die Ecktransversale durch A und die EULER-Gerade furch H und M sowie die Gerade durch W und N punktweise abgebildet.







Die Kurven sind Hyperbeln und verlaufen auch durch B.

Wie werden Ecktransversalen abgebildet?

Es liege $P=(u:v:w)$ auf der Ecktransversalen $g=[0:j:k]$. Der zu P isogonal konjugierte Punkt $P'=(u':v':w')=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)$ erfüllt die Gleichung

$j\cdot\frac{b^2}{v'}+k\cdot\frac{c^2}{w'}=0$ bzw. $\frac{v'}{j\cdot b^2}+\frac{w'}{k\cdot c^2}=0$, liegt auf der Geraden

$g=\left[0:\frac{1}{j\cdot b^2}:\frac{1}{k\cdot c^2}\right]$, und zwar unabhängig von u und v. Die Gerade g verläuft auch durch A, so dass gilt:

Durch die isogonale Konjugation wird die (von b und c verschiedene) A-Ecktransversale $g=[0:j:k]$ auf die A-Ecktransversale $\left[0:\frac{1}{j\cdot b^2}:\frac{1}{k\cdot c^2}\right]$ abgebildet.

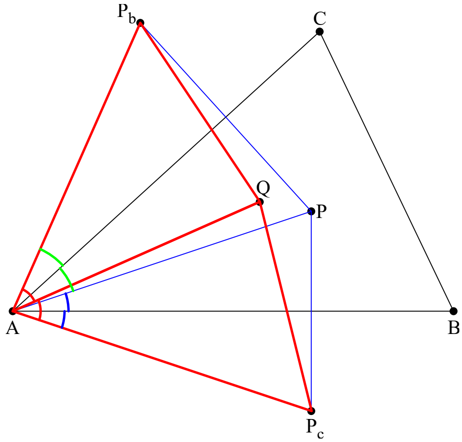
Wie werden andere Geraden abgebildet? Es liege $P=(u:v:w)$ auf $g=[i:j:k]$. Der zu P isogonal konjugierte Punkt $P'=(u':v':w')=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)$ erfüllt die Gleichung $i\cdot a^2\cdot v'\cdot w'+j\cdot b^2\cdot w'\cdot u'+k\cdot c^2\cdot u'\cdot v'=0$. Es handelt sich demnach um einen Kegelschnitt. Die Art des Kegelschnitts hängt davon ab, ob g den Umkreis schneidet.
Geraden, die durch keinen Eckpunkt gehen, werden auf Kegelschnitte abgebildet, die durch alle Eckpunkte gehen.

Dass das isogonale Konjugat g‘ einer Geraden g, die keine Ecktransversale ist, eine quadratische Kurve sein muss, sieht man auch so ein:
Die Gerade g schneidet die Dreiecksseiten in Punkten, deren isogonale Konjugate A, B, C sind. Daher ist g‘ mindestens quadratisch.
Ist g‘ vom Grad $d>2$, so schneidet *jede* Gerade h die Kurve g‘ in d Punkten (die nicht alle verschieden und nicht alle reell sein müssen und nicht alle im Endlichen liegen müssen). Also schneidet auch jede nichttriviale Transversale h durch A die Kurve g‘ in d Punkten. Da h durch P auf c geht, ist $P'=A$. Wenn h und g‘ weitere Punkte Q gemeinsam haben, also diese Punkte Q auf h und auf g‘ liegen, müssen deren Konjugate Q‘ auf der Ecktransversalen h‘ und auf der Geraden g liegen. Nun schneiden sich zwei Geraden nur in einem einzigen Punkt, also kann es nur einen solchen Punkt Q geben. Daher ist g‘ eine quadratische Kurve und somit ein Kegelschnitt.

18.7 Die Inkreis-Mitte und die EULER-Gerade

Wegen $W'=W,\ H'=M,\ M'=H$ gilt: Liegt W auf der Geraden g durch M und H, so sind M‘, H‘ und W‘ kollinear; die Trägergerade schneidet das isogonale Konjugat g‘ der EULER-Geraden in drei Punkten. Das kann nur sein, wenn g‘ kein Kegelschnitt ist, sondern eine Ecktransversale, die mit g identisch ist.
Verläuft die EULER-Gerade $g=[\tan\beta-\tan\gamma:\tan\gamma-\tan\alpha:\tan\alpha-\tan\beta]$ durch A, so ist $\beta=\gamma$; das Dreieck ist dann gleichschenklig.
Diese Argumentation lässt sich auf die Ankreis-Mitten übertragen.

18.8 Ein anderer Weg zum isogonal konjugierten Punkt



P wird an den Dreiecksseiten gespiegelt (Teilergebnisse: P_b und P_c). Dann sind die blauen und die grünen Winkel jeweils gleich groß.
Q sei der Umkreismittelpunkt zu P_a, P_b und P_c.
Wegen $AP_c = AP = AP_b$ und $QP_b = QP_c$ sind die Dreiecke AP_cQ und AQP_b zueinander kongruent. Daher sind auch die roten Winkel gleich groß.
Wegen 2-mal grün + 2-mal blau = 2-mal rot ist blau = rot - grün, also $\measuredangle QAC = \sphericalangle BAP$. Deshalb und aus analogen Relationen folgt, dass Q zu P isogonal konjugiert ist.

19 Eine allgemeine Konjugation und deren Bilder

Es sei $F=(f_1:f_2:f_3)$ ein Punkt. Dem Punkt $P=(p_1:p_2:p_3)$ werde der Punkt $Q=\left(\frac{f_1^2}{p_1}:\frac{f_2^2}{p_2}:\frac{f_3^2}{p_3}\right)$ zugeordnet. Fixpunkte sind $F=(f_1:f_2:f_3)$ sowie dessen harmonisch Konjugierte.

Wir betrachten Geraden durch F und setzen zur Abkürzung
$r_1:=\frac{p_1}{f_1};\ r_2:=\frac{p_2}{f_2};\ r_3:=\frac{p_3}{f_3}$.
Es sei $P=(p_1:p_2:p_3)$ *kein* Eckpunkt. Die Gerade durch P und F ist $[p_2\cdot f_3-p_3\cdot f_2 : p_3\cdot f_1-p_1\cdot f_3 : p_1\cdot f_2-p_2\cdot f_1]$. Ein beliebiger Punkt auf der Geraden hat die Form $(f_1+t\cdot p_1 : f_2+t\cdot p_2 : f_3+t\cdot p_3)$. Sein Konjugat ist

$$Q=(u:v:w)=\left(\frac{f_1^2}{f_1+t\cdot p_1}:\frac{f_2^2}{f_2+t\cdot p_2}:\frac{f_3^2}{f_3+t\cdot p_3}\right)=\left(\frac{f_1}{1+t\cdot r_1}:\frac{f_2}{1+t\cdot r_2}:\frac{f_3}{1+t\cdot r_3}\right)$$

und erfüllt wegen

$$\frac{p_2\cdot f_3-p_3\cdot f_2}{(f_2+t\cdot p_2)\cdot(f_3+t\cdot p_3)}+\frac{p_3\cdot f_1-p_1\cdot f_3}{(f_3+t\cdot p_3)\cdot(f_1+t\cdot p_1)}+\frac{p_1\cdot f_2-p_2\cdot f_1}{(f_1+t\cdot p_1)\cdot(f_2+t\cdot p_2)}=0$$

die Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned}&(p_2\cdot f_3-p_3\cdot f_2)\cdot f_1^2\cdot v\cdot w+(p_3\cdot f_1-p_1\cdot f_3)\cdot f_2^2\cdot w\cdot u+(p_1\cdot f_2-p_2\cdot f_1)\cdot f_3^2\cdot u\cdot v\\&=\begin{vmatrix} f_1^2\cdot v\cdot w & f_2^2\cdot w\cdot u & f_3^2\cdot u\cdot v\\ p_1 & p_2 & p_3\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}=f_1\cdot f_2\cdot f_3\cdot\begin{vmatrix} f_1\cdot v\cdot w & f_2\cdot w\cdot u & f_3\cdot u\cdot v\\ r_1 & r_2 & r_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.\end{aligned}}$$

Dieser Kegelschnitt verläuft durch die Eckpunkte A, B und C sowie durch F. Um die Schnittstellen von Kurve und Ausgangsgerade zu ermitteln, setzt man den allgemeinen Punkt der Geraden durch P und F in die Kurvengleichung ein und erhält nach etwas Rechnung die Gleichung

$$0=\begin{vmatrix} f_1\cdot(f_2+t\cdot p_2)\cdot(f_3+t\cdot p_3) & f_2\cdot(f_3+t\cdot p_3)\cdot(f_1+t\cdot p_1) & f_3\cdot(f_1+t\cdot p_1)\cdot(f_2+t\cdot p_2)\\ r_1 & r_2 & r_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=f_1.f_2\cdot f_3\cdot t^2\cdot\begin{vmatrix} r_2\cdot r_3 & r_3\cdot r_1 & r_1\cdot r_2\\ r_1 & r_2 & r_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Da $t=0$ *doppelte* Nullstelle ist, *berührt* die Kurve die Ausgangsgerade in F und schneidet sie nirgendwo sonst. Wäre der Kegelschnitt eine Ellipse oder eine Parabel, verliefe sie auf nur einer Seite der Geraden und könnte nicht durch alle drei Eckpunkte gehen. Aus diesem Grund ist der Kegelschnitt eine *Hyperbel*.

Insbesondere gilt:

Ist $F=S$, hat man die *isotome* Konjugation, und eine durch keine Dreiecksecke verlaufende Gerade durch S wird auf eine Hyperbel abgebildet.

Ist $F=W$, hat man die *isogonale* Konjugation, und eine durch keine Dreiecksecke verlaufende Gerade durch W wird auf eine Hyperbel abgebildet.

Ist $F=A$, so wird der Punkt $(p_1:p_2:p_3)$ abgebildet auf $\left(\frac{1}{p_1}:0:0\right)=A$.

Ist $F=(u:v:0)$, so wird der Punkt $(p_1:p_2:p_3)$ abgebildet auf $\left(p_2\cdot u^2:p_1\cdot v^2:0\right)$; die Konjugation bildet also eine Dreiecksseite auf sich ab.

19.1 Bilder der Ferngeraden

Ein beliebiger Punkt der Ferngeraden hat die Form $\left(1:\lambda:-(1+\lambda)\right)$ und hat $\left(f_1^2:\frac{f_2^2}{\lambda}:\frac{-f_3^2}{1+\lambda}\right)$ als Konjugat. Dieses erfüllt die Gleichung $f_1^2\cdot v\cdot w+f_2^2\cdot w\cdot u+f_3^2\cdot u\cdot v=0$, liegt also auf einem Kegelschnitt, der durch alle drei Eckpunkte geht.

20 Die Abbildung η

Es sei $P=(u:v:w)$ ein Punkt. Spiegelt man ihn an den Seitenmitten $S_1=(0:1:1)$, $S_2=(1:0:1)$, $S_3=(1:1:0)$, so bekommt man die Spiegelpunkte

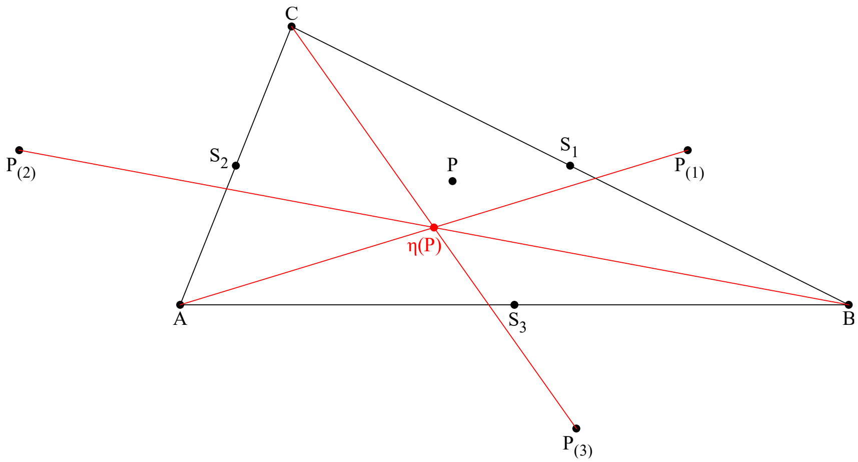
$P_{(1)}=(-u:w+u:v+u)$, $P_{(2)}=(w+v:-v:u+v)$, $P_{(3)}=(v+w:u+w:-w)$,

denn es ist etwa

$$P+P_{(2)}=\frac{u\cdot A+v\cdot B+w\cdot C}{u+v+w}+\frac{(w+v)\cdot A-v\cdot B+(u+v)\cdot C}{u+v+w}=\frac{(u+v+w)\cdot(A+C)}{u+v+w}=S_2 .$$

Die Geraden $AP_{(1)}$, $BP_{(2)}$ und $CP_{(3)}$ sind kopunktal in

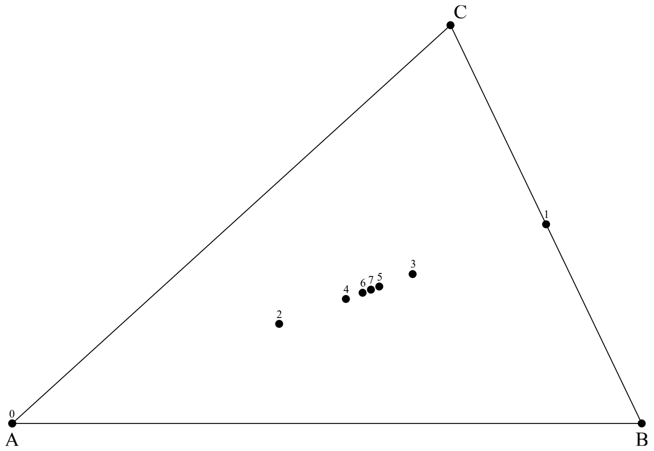
$$\boxed{\eta(P)=(v+w:w+u:u+v)} .$$



Die Abbildung η ist *nicht* involutorisch, und es ist

$$\eta(S) = S$$
$$\eta(A) = S_1$$
$$\eta(S_1) = (2:1:1)$$

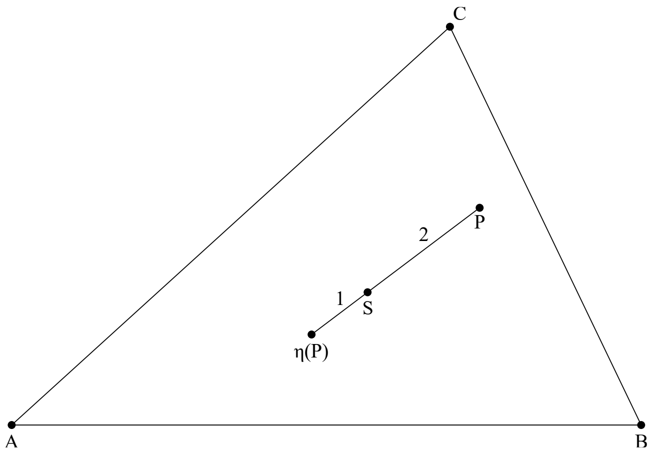
Die Graphik zeigt die ersten 7 Iterierten, von A ausgehend.



Man rechnet schnell nach, dass für jeden Punkt P die Punkte P, $\eta(P)$, $\eta^2(P)$ kollinear sind und dass

$$P + 2\cdot\eta(P) = \frac{u\cdot A + v\cdot B + w\cdot C}{u+v+w} + 2\cdot\frac{(v+w)\cdot A + (w+u)\cdot B + (u+v)\cdot C}{2\cdot(u+v+w)} = 3\cdot S$$

ist:



Der allgemeine Punkt auf der Geraden $g = [G:H:J]$ ist durch

$$P(t) = t\cdot\frac{(0:-J:H)}{H-J} + (1-t)\cdot\frac{[-J:0:G]}{G-J}$$
$$= \big(J\cdot(J-H)\cdot(1-t) : J\cdot(J-G)\cdot t : G\cdot(H-J) + t\cdot J\cdot(G-H)\big)$$

gegeben, sein Bild unter η ist

$$\eta\big(P(t)\big) = \big((H-J)\cdot(G-t\cdot J) : (G-J)\cdot(H-(1-t)\cdot J) : J\cdot(J-H+t\cdot(H-G)\big).$$

Für alle Werte von t liegt dieses Bild auf der Geraden

$\left[-G+H+J:G-H+J:G+H-J\right]$, und diese Gerade ist zur Ausgangsgeraden parallel.

Unter der Abbildung η wird also eine Gerade auf eine dazu parallele Gerade abgebildet, was man auch schon daran sehen kann, dass η eine Streckung mit Streckzentrum S und Streckfaktor -1/2 ist.

Für $P=(u:v:w)$ ist $\boxed{\eta^{-1}(P)=(-u+v+w:u-v+w:u+v-w)}$.

20.1 Innen- und Außenmitten: Eine andere Deutung von η

Zu jedem Dreieck ABC gibt es das aus den Seitenmittelpunkten gebildete Dreieck $S_1S_2S_3$.

Mit $P=(p_1:p_2:p_3)$ gilt:

Die Parallelen zu $AP=[0:p_3:-p_2]$; $BP=[p_3:0:--p_1]$; $CP=[p_2:-p_1:0]$

durch die jeweiligen Seitenmittelpunkte

$S_1=(0:1:1)$; $S_2=(1:0:1)$; $S_3=(1:1:0)$ sind

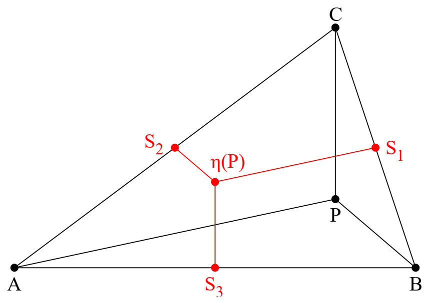
$$g_a=[p_2-p_3:p_2+p_3:-p_2-p_3]$$

$$g_b=[-p_3-p_1\ :p_3-p_1:p_3+p_1]$$

$$g_c=[p_1+p_2:-p_1-p_2:p_1-p_2]$$

mit Kopunktalität in

$\boxed{\eta(P)=(p_2+p_3:p_3+p_1:p_1+p_2)}$.



Es gibt auch ein Dreieck A‘‘B‘‘C‘‘, zu dem ABC das Innenmittendreieck ist. Für das Außenmittendreieck ist

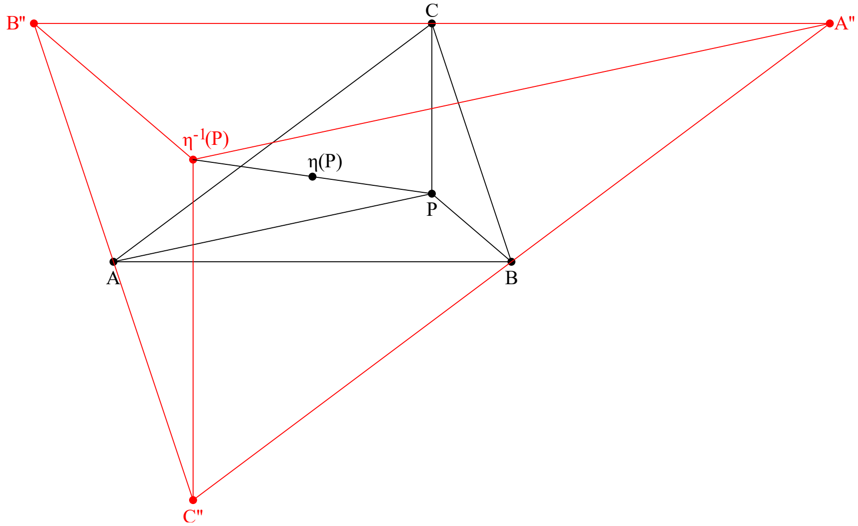
$A''=(-1:1:1)$; $B''=(1:-1:1)$; $C''=(1:1:-1)$.

Die Parallelen zu $AP=[0:p_3:-p_2]$; $BP=[p_3:0:--p_1]$; $CP=[p_2:-p_1:0]$

durch die jeweiligen Außenmittelpunkte sind

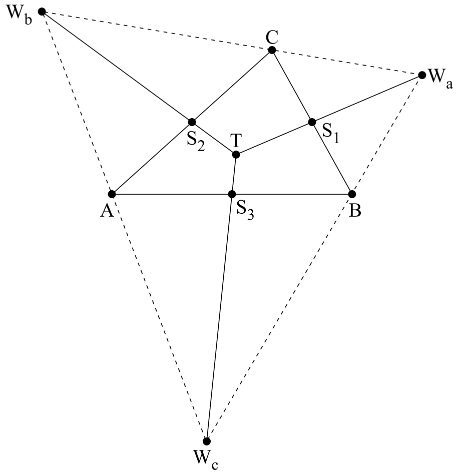
$$f_a = [p_2 - p_3 : p_2 : -p_3]$$
$$f_b = [-p_1 : p_3 - p_1 : p_3]$$
$$f_c = [p_1 : -p_2 : p_1 - p_2]$$

mit Kopunktalität in $\boxed{\eta^{-1}(P) = (-p_1 + p_2 + p_3 : -p_2 + p_3 + p_1 : -p_3 + p_1 + p_2)}$.



21 Der Mittenpunkt T = X9 und seine Begleiter

Christian Heinrich von NAGEL (1803–1882) hat nicht nur den NAGELpunkt gefunden, sondern auch den *Mittenpunkt* (der auch auf Englisch so heißt). Auch er kann mit dem Satz von CEVA behandelt werden.
Verbindet man die Ankreiszentren mit den Mittelpunkten der zugehörigen Seiten, so schneiden sich diese Geraden in einem Punkt T, dem Mittenpunkt.



Wegen

$$W_a = (-a:b:c)$$
$$W_b = (a:-b:c)$$
$$W_c = (a:b:-c)$$

ist $A = \dfrac{\sigma_b \cdot W_b + \sigma_c \cdot W_c}{2 \cdot a}$ usw.

Fasst man $W_aW_bW_c$ als Grunddreieck auf, so kann man den Satz von CEVA anwenden. Bezüglich dieses neuen Grunddreiecks werden die Punkte mit spitzen Klammern versehen.

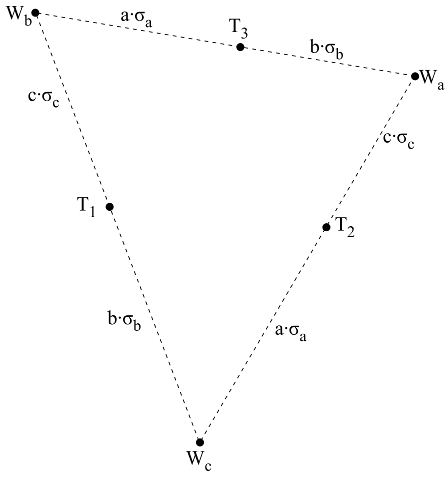
Dann ist

$$A = \left\langle 0 : \frac{\sigma_b}{2 \cdot a} : \frac{\sigma_c}{2 \cdot a} \right\rangle = \langle 0 : \sigma_b : \sigma_c \rangle$$

usw.

sowie

$S_3 = \left\langle a \cdot \sigma_a : b \cdot \sigma_b : (a+b) \cdot \sigma_c \right\rangle$, was auf der Seite W_bW_a zum Punkt $T_3 = \langle a \cdot \sigma_a : b \cdot \sigma_b : 0 \rangle$ führt. Man erkennt die Symmetrie der Koordinaten.



Damit ist

$$\begin{aligned}T&=\left\langle a\cdot\sigma_a : b\cdot\sigma_b : c\cdot\sigma_c\right\rangle\\&=\frac{a\cdot(-a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C)+b\cdot(a\cdot A-b\cdot B+c\cdot C)+c\cdot(a\cdot A+b\cdot B-c\cdot C)}{a\cdot\sigma_a+b\cdot\sigma_b+c\cdot\sigma_c}\\&=\frac{a\cdot\sigma_a\cdot A+b\cdot\sigma_b\cdot B+c\cdot\sigma_c\cdot C}{a\cdot\sigma_a+b\cdot\sigma_b+c\cdot\sigma_c}\\&=\boxed{(a\cdot\sigma_a : b\cdot\sigma_b : c\cdot\sigma_c)=(1+\cos\alpha : 1+\cos\beta : 1+\cos\gamma)=T}.\end{aligned}$$

Nebenbei: T ist S-CEVA-konjugiert zu W.

21.1 Die Gerade TSG

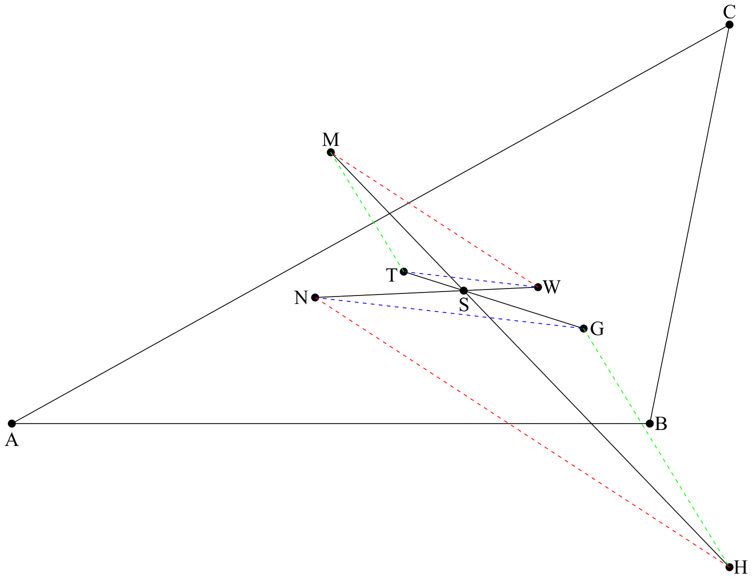
Wegen

$$a\cdot\sigma_a+b\cdot\sigma_b+c\cdot\sigma_c=\sigma_b\cdot\sigma_c+\sigma_c\cdot\sigma_a+\sigma_a\cdot\sigma_b=2\cdot a\cdot\sigma_a+\sigma_b\cdot\sigma_c$$

und wegen

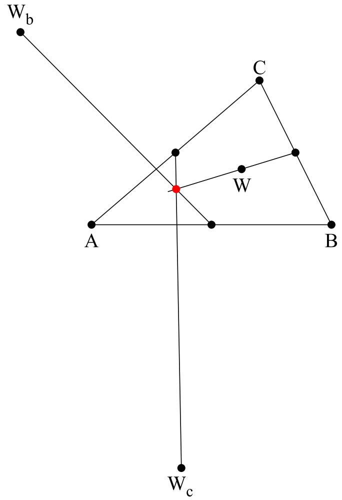
$$\begin{aligned}\frac{2\cdot T+G}{3}&=\frac{2\cdot\dfrac{a\cdot\sigma_a\cdot A+b\cdot\sigma_b\cdot B+c\cdot\sigma_c\cdot C}{a\cdot\sigma_a+b\cdot\sigma_b+c\cdot\sigma_c}+\dfrac{\sigma_b\cdot\sigma_c\cdot A+\sigma_c\cdot\sigma_a\cdot B+\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot C}{\sigma_b\cdot\sigma_c+\sigma_c\cdot\sigma_a+\sigma_a\cdot\sigma_b}}{3}\\&=\frac{(2\cdot a\cdot\sigma_a+\sigma_b\cdot\sigma_c)\cdot A+\ldots}{3\cdot(a\cdot\sigma_a+b\cdot\sigma_b+c\cdot\sigma_c)}=(1:1:1)\end{aligned}$$

sind T, S und G kollinear, und S teilt TG im Verhältnis 1:2.
Für gleichseitige Dreiecke existiert die Gerade TSG nicht.
Damit hat man eine dritte Gerade durch S, auf der zwei weitere Punkte liegen.
Auf der EULERgeraden liegen S, H und M, auf einer anderen Geraden liegen S, W und N, auf einer dritten Geraden liegen S, G und T. Die drei Geraden stimmen nur für gleichseitige Dreiecke überein. Wegen $\frac{SN}{SW}=\frac{SH}{SM}=\frac{SG}{ST}=2$ hat man drei Trapeze:


C
M
T
W
N
S
G
A
B
H

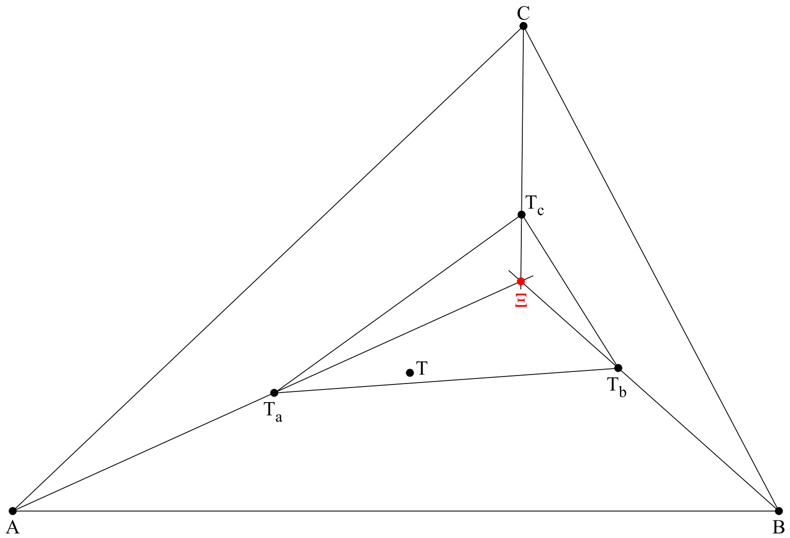
21.2 Begleiter des Mittenpunkts

Man bekommt einen **Begleiter** des Mittenpunktes, wenn man nicht W_aS_1, W_bS_2 und W_cS_3 sich schneiden lässt, sondern W_a durch W ersetzt und W_b mit W_c vertauscht.



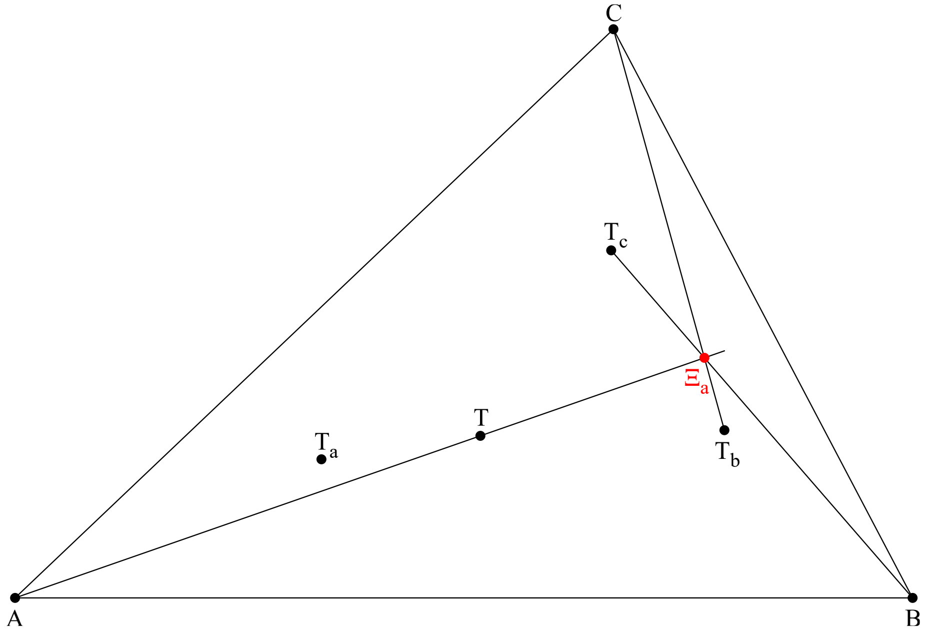
Der gemeinsame Schnittpunkt ist $\boxed{T_a = \left(a\cdot\sigma : b\cdot\sigma_c : c\cdot\sigma_b\right)}$. Die Gesamtkonstellation gestaltet sich wie in der nebenstehenden Graphik.

21.3 Zweites Auftreten von Ξ = X57 und von $Ξ_a$



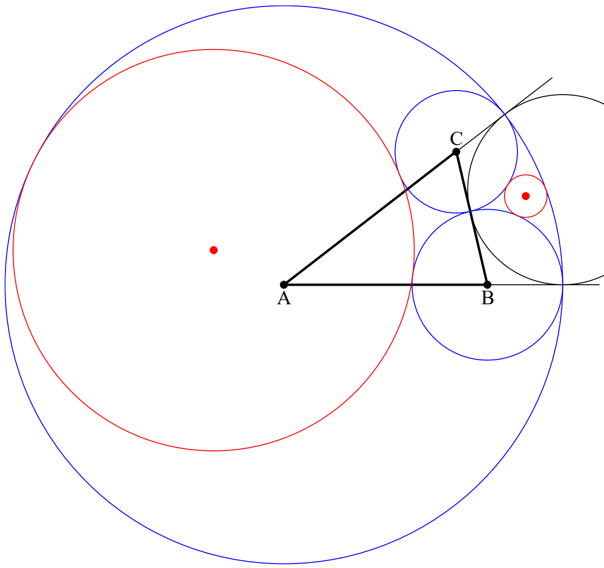
Es sind AT_a, BT_b und CT_c kopunktal im Punkt $\boxed{\Xi = X57 = \left(\frac{a}{\sigma_a} : \frac{b}{\sigma_b} : \frac{c}{\sigma_c}\right)}$, dem isogonalen Konjugat des Mittenpunkts T.

Die Geraden AT, BT_c und CT_b sind kopunktal in $\Xi_a = \left(a \cdot r : b \cdot r_c : c \cdot r_b\right)$, dem isogonalen Konjugat von T_a, des Begleiters des Mittenpunkts:



21.4 Exkurs: Die Begleiter der SODDY-Kreise

Jeder Ankreis gibt Anlass zu drei Kreisen (blau) um A, umB und um C, und diese wiederum zu einem Innen- und einem Außenkreis (rot), deren Mittelpunkte liegen beim Ankreis um W_a auf der Geraden durch W_a und G_a.



Der Mittelpunkt des a-Innen-Kreises ist $Z_{\text{inn, a}} = \dfrac{\sigma_a \cdot W_a + (r_b + r_c - r) \cdot G_a}{\sigma_a + (r_b + r_c - r)}$ und

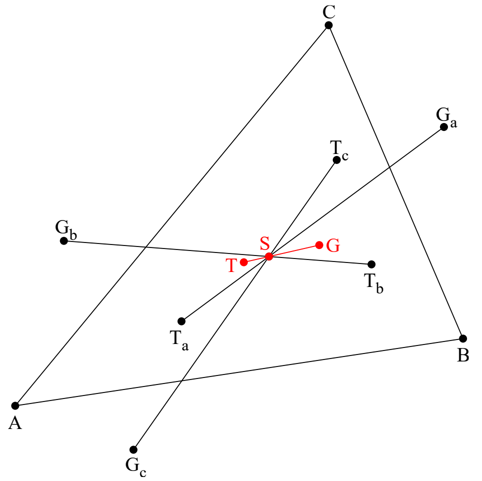
der des a-Außen-Kreises ist $Z_{\text{aus, a}} = \dfrac{-\sigma_a \cdot W_a + (r_b + r_c - r) \cdot G_a}{-\sigma_a + (r_b + r_c - r)}$.

21.5 Die Geraden T_aSG_a

Der GERGONNE-Punkt liegt auf der Geraden TSG mit dem Mittenpunkt

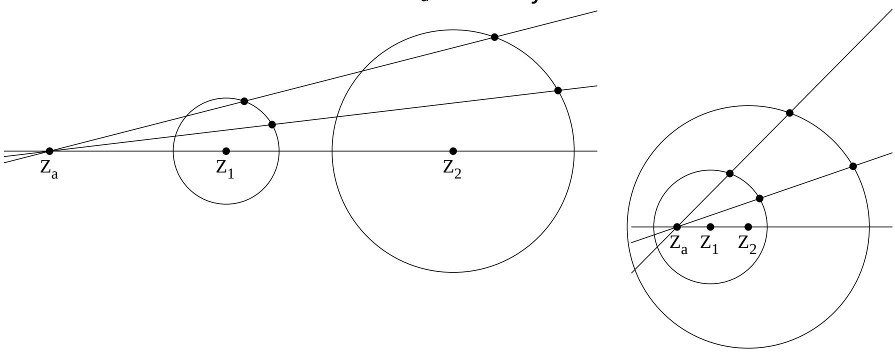
$T = (a \cdot \sigma_a : b \cdot \sigma_b : c \cdot \sigma_c)$.

Ein Begleiter des Mittenpunkts ist $T_a = (a \cdot \sigma : b \cdot \sigma_c : c \cdot \sigma_b)$. Wegen $\frac{2 \cdot T_a + G_a}{3} = S$ (diese etwas aufwändige Rechnung überlasse man einem CAS) sind auch S, T_a und G_a kollinear, und S teilt T_aG_a im Verhältnis 1:2.

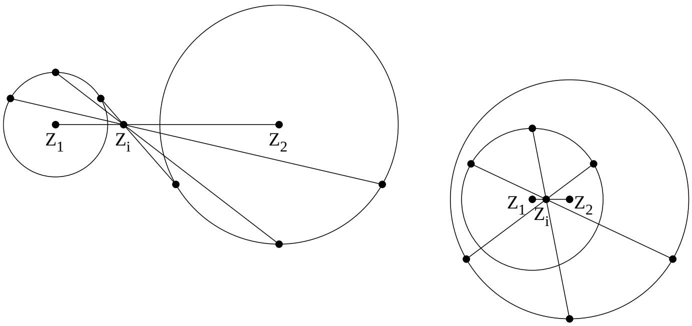


22 Die beiden Ähnlichkeitszentren zweier Kreise

Verbindet man die zum gleichen Winkel gehörigen Punkte zweier Kreise mit den Mittelpunkten Z_1 und Z_2 und den Radien r_1 und r_2, so schneiden sich die Verbindungsgeraden in $\boxed{Z_a = \frac{r_2 \cdot Z_1 - r_1 \cdot Z_2}{r_2 - r_1}}$. Das gilt auch, wenn die Kreise ineinander enthalten sind. Der Punkt Z_a heißt *äußeres Ähnlichkeitszentrum*.



Verbindet man jeweils die zu φ und zu $180° + \varphi$ gehörigen Kreispunkte miteinander, so schneiden sich die Geraden in $\boxed{Z_i = \frac{r_2 \cdot Z_1 + r_1 \cdot Z_2}{r_1 + r_2}}$, dem *inneren Ähnlichkeitszentrum*. Auch dieser Sachverhalt besteht, wenn ein Kreis im anderen enthalten ist.



22.1 Ähnlichkeitszentren X56 und X55 von Um- und Inkreis

Zwei ausgezeichnete Kreise eines Dreiecks sind Um- und Inkreis.

Der Umkreis hat Mittelpunkt M und Radius $R=\dfrac{c}{2\cdot\sin\gamma}$, der Inkreis hat W als Mittelpunkt und den Radius $\rho=\dfrac{2\cdot\Delta}{\sigma}$, so dass das äußere Ähnlichkeitszentrum gegeben ist durch

$$
\begin{aligned}
Z_a &= \frac{R\cdot W-\rho\cdot M}{R-\rho}\\
&= \frac{R\cdot\dfrac{a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C}{\sigma}-\dfrac{2\cdot\Delta}{\sigma}\cdot\dfrac{(\tan\beta+\tan\gamma)\cdot A+\ldots}{2\cdot\tau}}{\dfrac{c}{2\cdot\sin\gamma}-\dfrac{2\cdot\Delta}{\sigma}}
\end{aligned}
$$

Der Faktor bei A ist (bis auf den Nenner σ) gegeben durch

$$
\begin{aligned}
R\cdot a-b\cdot c\cdot\sin\alpha\cdot\frac{2\cdot\cos\alpha}{2\cdot\sin\beta\cdot 2\cdot\sin\gamma} &= R\cdot a\cdot -R\cdot a\cdot\cos\alpha\\
&= R\cdot a\cdot\frac{\sigma_b\cdot\sigma_c}{2\cdot b\cdot c}=\frac{\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c}{2\cdot a\cdot b\cdot c}\cdot R\cdot\frac{a^2}{\sigma_a}.
\end{aligned}
$$

Das äußere Ähnlichkeitszentrum Z_a = X56 von Um- und Inkreis ist somit zum NAGELpunkt isogonal konjugiert.

Das innere Ähnlichkeitszentrum zu Umkreis und Inkreis ist

$$Z_i = \frac{R \cdot W + \rho \cdot M}{R - \rho}$$

$$= \frac{R \cdot \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{\sigma} + \frac{2 \cdot \Delta}{\sigma} \cdot \frac{(\tan\beta + \tan\gamma) \cdot A + \ldots}{2 \cdot \tau}}{\frac{c}{2 \cdot \sin\gamma} - \frac{2 \cdot \Delta}{\sigma}}$$

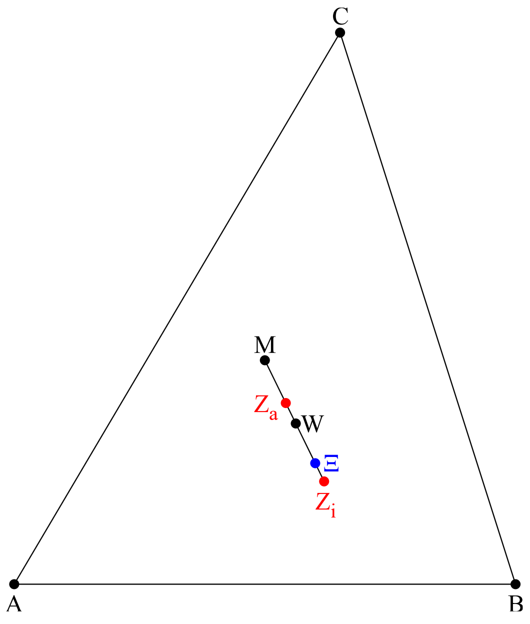
Der Faktor bei A ist (bis auf den Nenner σ) gegeben durch

$$R \cdot a + b \cdot c \cdot \sin\alpha \cdot \frac{2 \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sin\beta \cdot 2 \cdot \sin\gamma} = R \cdot a \cdot + R \cdot a \cdot \cos\alpha = R \cdot a \cdot (1 + \cos\alpha)$$

$$= R \cdot a \cdot \frac{\sigma \cdot \sigma_a}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{\sigma}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} \cdot R \cdot a^2 \cdot \sigma_a \, .$$

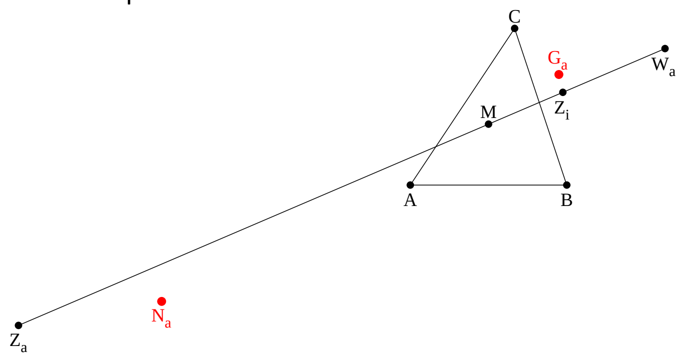
Das innere Ähnlichkeitszentrum Z_i = X55 zu Um- und Inkreis ist somit zum GERGONNE-Punkt isogonal konjugiert.

Die beiden Ähnlichkeitszentren Z_i und Z_a liegen mit Ξ auf der Geraden durch M und W.



22.2 Ähnlichkeitszentren von Um- und Ankreis

Betrachtet man den Umkreis und den Ankreis um W_a, so ist das äußere Ähnlichkeitszentrum *nicht*, wie man vermuten könnte, einer der Begleiter des NAGELpunktes, und auch das innere Ähnlichkeitszentrum ist *nicht* einer der Begleiter des GERGONNEpunktes.



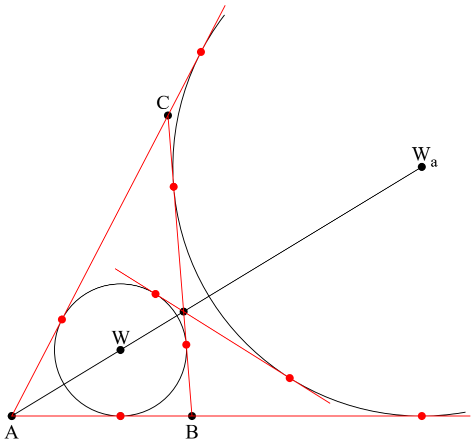
22.3 Ähnlichkeitszentren von In- und Ankreis

Betrachtet man den Inkreis und den Ankreis um W_a, so ist das äußere Ähnlichkeitszentrum gegeben durch

$$Z_a = \frac{\rho_a \cdot W - \rho \cdot W_a}{\rho_a - \rho} = \frac{\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_a}\cdot\frac{a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}{\sigma} - \frac{2\cdot\Delta}{\sigma}\cdot\frac{-a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}{\sigma_a}}{\rho_a - \rho} = A\,.$$

Das innere Ähnlichkeitszentrum ist

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{\rho_a \cdot W + \rho \cdot W_a}{\rho_a + \rho} \\ &= \frac{\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_a}\cdot\frac{a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}{\sigma}}{\rho_a - \rho} \\ &+ \frac{\frac{2\cdot\Delta}{\sigma}\cdot\frac{-a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}{\sigma_a}}{\rho_a - \rho} \\ &= (0:b:c) = W_1, \end{aligned}$$



also der gemeinsame Spurpunkt von W und W_a auf BC.

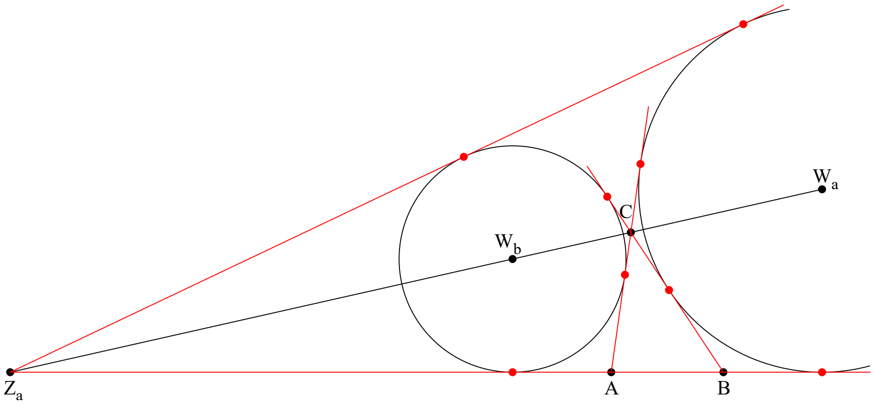
22.4 Ähnlichkeitszentren zweier Ankreise

Betrachtet man die Ankreise um W_a und um W_b, so ist das äußere Ähnlichkeitszentrum gegeben durch

$$Z_a = \frac{\rho_a \cdot W_b - \rho_b \cdot W_a}{\rho_a - \rho_b} = \frac{\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_a}\cdot\frac{a\cdot A - b\cdot B + c\cdot C}{\sigma_b} - \frac{2\cdot\Delta}{\sigma_b}\cdot\frac{-a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}{\sigma_a}}{\rho_a - \rho_b}$$
$$= (a : -b : 0)$$

und das innere Ähnlichkeitszentrum erwartungsgemäß durch

$$Z_i = \frac{\rho_a \cdot W_b + \rho_b \cdot W_a}{\rho_a + \rho_b} = \frac{\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_a}\cdot\frac{a\cdot A - b\cdot B + c\cdot C}{\sigma_b}}{\rho_a - \rho_b} + \frac{\frac{2\cdot\Delta}{\sigma_b}\cdot\frac{-a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C}{\sigma_a}}{\rho_a - \rho_b} = C.$$

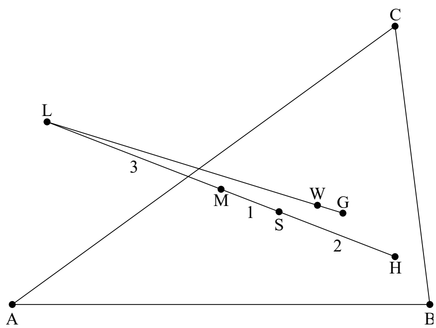


23 Der LONGCHAMPS-Punkt L = X20

Die Geraden WG und HM schneiden einander im nach Gohierre de LONGCHAMPS (1842–1906) benannten Punkt

$$\boxed{L = (\tau - 2\cdot\tan\alpha : \tau - 2\cdot\tan\beta : \tau - 2\cdot\tan\gamma)}$$

benannten Punkt, der gleichzeitig Spiegelpunkt von H an M ist und damit auch auf der EULER-Geraden liegt.



Wegen des Teiverhältnisses 3 : 1 : 2 liegen S und L zu M und H harmonisch.
L hat auch die Formen

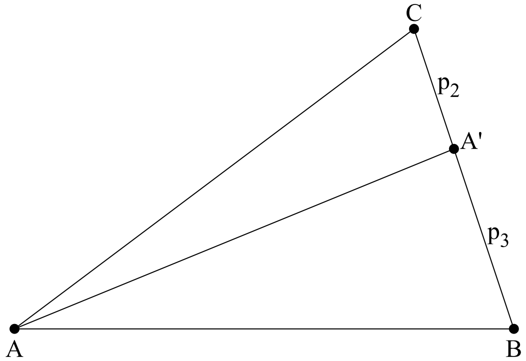
$$\boxed{\begin{aligned} L &= \left(-\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma : \tan\alpha-\tan\beta+\tan\gamma : \tan\alpha+\tan\beta-\tan\gamma\right) \\ &= \left(a\cdot\left(\cos\beta\cdot\cos\gamma-\cos\alpha\right) : b\cdot\left(\cos\gamma\cdot\cos\alpha-\cos\beta\right) : c\cdot\left(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos\gamma\right)\right) \\ &= \eta^{-1}(H) \end{aligned}}$$

24 Schwerpunkte

Der <u>Flächen</u>schwerpunkt von ABC ist $S=\left(1:1:1\right)=\left(SBC:ASC:ABS\right)$; jede Seitenhalbierende halbiert den Flächeninhalt von ABC.
Da sich die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 teilen, ist S auch <u>Ecken</u>schwerpunkt, denn man kann sich die Massen von A und B im Seitenmittelpunkt vereinigt denken.

24.1 Der Kantenschwerpunkt

Beim <u>Kanten</u>schwerpunkt ist es anders:



Ist die Schwerelinie eine <u>Eck</u>transversale, muss $b+\frac{p_2}{p_2+p_3}\cdot a=c+\frac{p_3}{p_2+p_3}\cdot a$

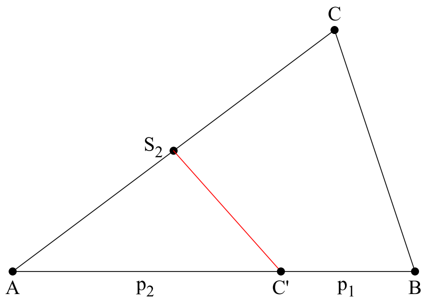
bzw. $\frac{p_2}{p_3}=\frac{\sigma_b}{\sigma_c}$ sein, woraus $A'=\left(0:\sigma_b:\sigma_c\right)$ folgt.

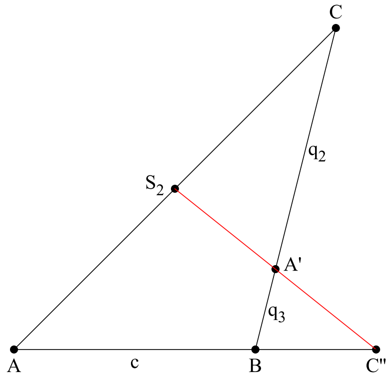
Die drei Schwerelinien sind daher kopunktal im Nagelpunkt $\left(\sigma_a:\sigma_b:\sigma_c\right)=N$.

24.2 Der SPIEKER-Punkt Sp=X10

Verlaufen die Schwerelinien durch die Seiten***<u>mitten</u>***, muss im Falle der

Schwerelinie durch $S_2=\frac{A+C}{2}$





für $c>a$ die Bedingung $\frac{p_2}{p_1+p_2}\cdot c+\frac{b}{2}=\frac{p_1}{p_1+p_2}\cdot c+a+\frac{b}{2}$ oder

$C'=\left(c-a:c+a:0\right)$ und

für $c<a$ die Bedingung $\frac{b}{2}+\frac{q_2}{q_2+q_3}\cdot a=\frac{b}{2}+c+\frac{q_3}{q_2+q_3}\cdot a$ oder

$A'=\left(0:c+a:a-c\right)$ und damit $C''=\left(c-a:a+c:0\right)$ erfüllt sein.

C‘ und C‘‘ haben die gleiche Gestalt; die Schwerelinie

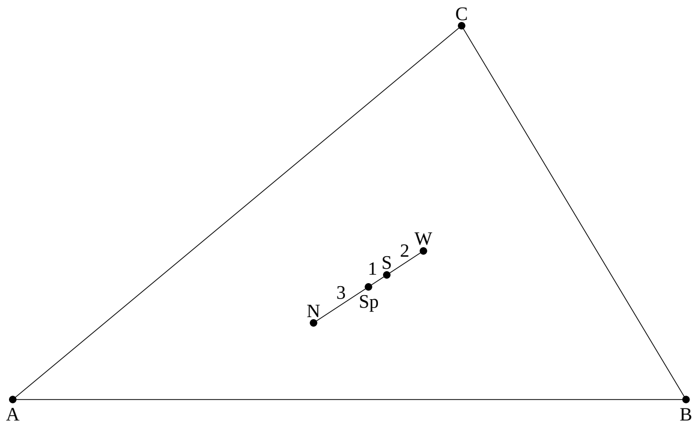
durch S_2 ist $\left[-a-c:c-a:a+c\right]$,

durch S_3 ist $\left[a+b:-a-b:a-b\right]$,

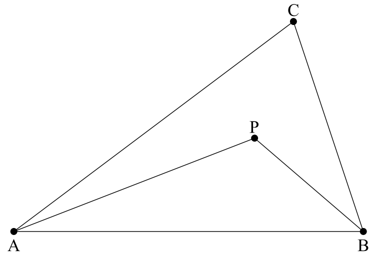
durch S_1 ist $\left[b-c:b+c:-b-c\right]$.

Alle Schwerelinien durch die Seitenmitten sind kopunktal im nach Theodor SPIEKER (1823-1913) benannten Punkt $\boxed{Sp=\left(b+c:c+a:a+b\right)=X10=\eta(W)}$.

Sp ist mit den Punkten S, W und N kollinear mit den nebenstehenden Streckenverhältnissen; wieder hat man ein harmonisches Verhältnis.



25 Der Abstand eines Punktes zu den Dreiecksseiten



Der senkrechte Abstand von P zur Dreiecksseite c sei mit cP bezeichnet.

Wegen $\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}=\frac{ABP}{ABC}=\frac{c\cdot cP}{c\cdot h_c}$ ist

$\boxed{cP=\frac{h_c\cdot p_3}{p_1+p_2+p_3}}$, wenn h_c die Länge der Höhe durch C bezeichnet. Liegen P und C auf verschiedenen Seiten von c, ist cP negativ.

Mit $p=p_1+p_2+p_3$ und mit R als Umkreisradius und Δ als Dreiecksfläche erhält man

$$cP=\frac{h_c\cdot p_3}{p_1+p_2+p_3}=\frac{a\cdot\sin\beta\cdot p_3}{p}=\frac{a\cdot b\cdot p_3}{2\cdot R\cdot p}=\frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot R\cdot p}\cdot\frac{p_3}{c}=\frac{2\cdot\Delta}{p}\cdot\frac{p_3}{c}.$$

25.1 Eine Beziehung von CARNOT und ihre Verallgemeinerung

Mit dem Umkreismittelpunkt $M=(a\cdot\cos\alpha : b\cdot\cos\beta : c\cdot\cos\gamma)$ ist

$$aM+bM+cM=2\cdot\Delta\cdot\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma}=2\cdot\Delta\cdot\frac{1+\frac{r}{R}}{\frac{2\cdot\Delta}{R}}=R+r$$

(diese Beziehung wird nach Lazare CARNOT (1753 - 1823) benannt) und

$$aM+bM-cM=2\cdot\Delta\cdot\frac{\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma}{a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma}=2\cdot\Delta\cdot\frac{-1+\frac{r_c}{R}}{\frac{2\cdot\Delta}{R}}=-R+r_c$$

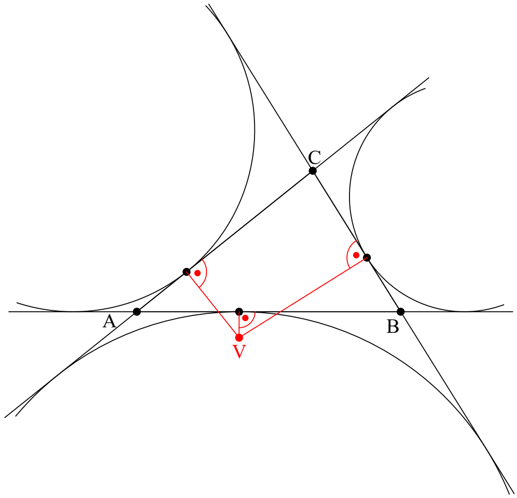
und deswegen

$$\boxed{r_a+r_b+r_c-r=4\cdot R}$$

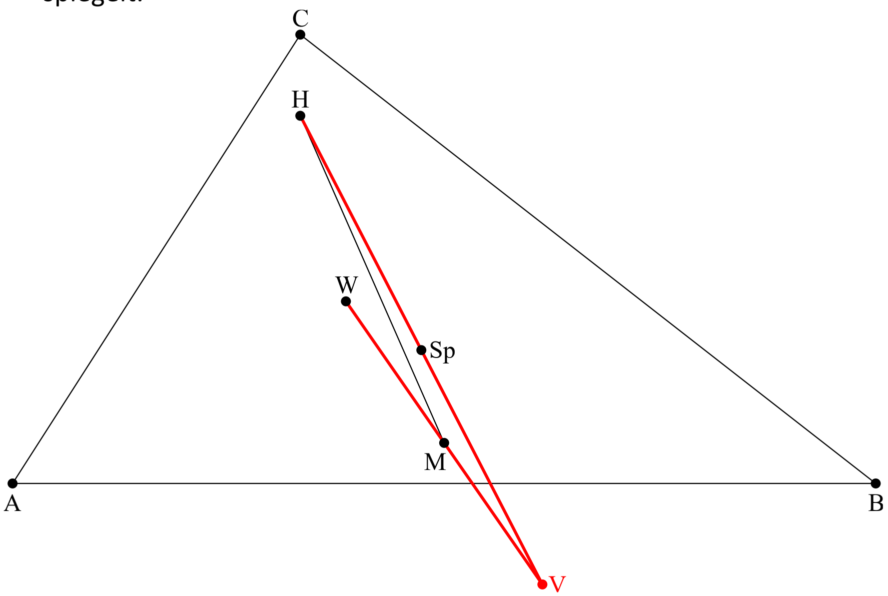
26 Der BEVAN-Punkt V = X40 und seine Begleiter

Die Lotfußpunkte von W auf den Dreiecksseiten sind die Inkreis-Berührpunkte.
Sind auch die Ankreis-Berührpunkte Lotfußpunkte eines Punktes?
Dies ist der nach Benjamin BEVAN (1773 - 1833) (und mitunter auch nach Jacques HADAMARD) benannte Punkt V.

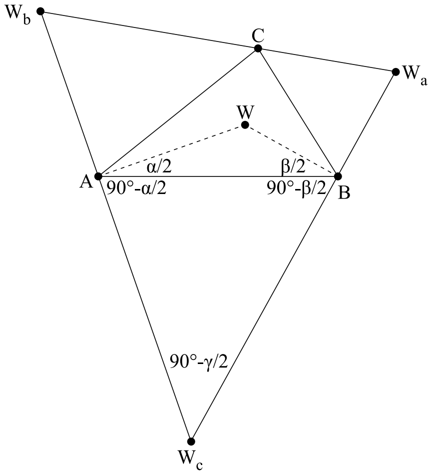
Er hat mehrere Eigenschaften:



1. V ist Umkreismittelpunkt der Ankreiszentren W_a, W_b und W_c.
2. V ist der Schnittpunkt der Lote von W_a auf a, von W_b auf b und von W_c auf c, wobei W_a, W_b, W_c die Ankreis-Zentren sind.
3. V entsteht, wenn man W an M spiegelt
4. V entsteht, wenn man den Höhen-Schnittpunkt H am SPIEKER-Punkt Sp spiegelt.



Man wird hier auch die Grenzen des baryzentrischen Kalküls erkennen, da zum Nachweis der Äquivalenz der drei Eigenschaften ein CAS hilfreich sein wird.



Ad 1.: Die Innenwinkel des von den Ankreiszentren gebildeten Dreiecks sind an der Figur ablesbar.

Daher ist

$$V=\frac{\sin\alpha\cdot W_a+\sin\beta\cdot W_c+\sin\gamma\cdot W_c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{a\cdot W_a+b\cdot W_b+c\cdot W_c}{\sigma}$$

$$=\frac{a}{\sigma}\cdot\frac{-a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C}{\sigma_a}+\frac{b}{\sigma}\cdot\frac{a\cdot A-b\cdot B+c\cdot C}{\sigma_b}+\frac{c}{\sigma}\cdot\frac{a\cdot A+b\cdot B-c\cdot C}{\sigma_c}$$

$$=\frac{a}{\sigma}\cdot\left(-\frac{a}{\sigma_a}+\frac{b}{\sigma_b}+\frac{c}{\sigma_c}\right)\cdot A+\ldots=\boxed{\left(a\cdot\lambda_a : b\cdot\lambda_b : c\cdot\lambda_c\right)=V}$$

mit

$$\lambda_a:=-\frac{a}{\sigma_a}+\frac{b}{\sigma_b}+\frac{c}{\sigma_c};\ \ \lambda_b:=\frac{a}{\sigma_a}-\frac{b}{\sigma_b}+\frac{c}{\sigma_c};\ \ \lambda_c:=\frac{a}{\sigma_a}+\frac{b}{\sigma_b}-\frac{c}{\sigma_c}.$$

Damit ist $V=W\cdot\eta^{-1}(W\cdot G)$.

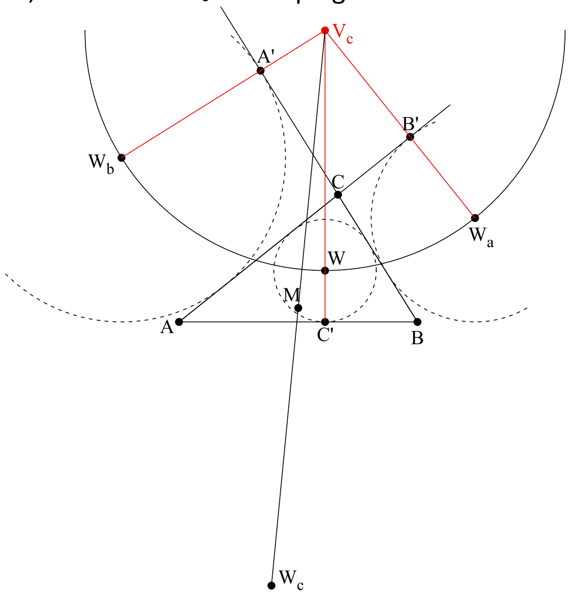
Ad 2.: Der Berührpunkt des Ankreises um W_c mit der Seite c ist $C'=(\sigma_a : \sigma_b : 0)$. Die Gerade durch W_c und C' ist daher $[c\cdot\sigma_b : -c\cdot\sigma_a : a\cdot\sigma_b-b\cdot\sigma_a]$. Den Nachweis, dass V auf dieser Geraden liegt, überlasse man einem CAS.

Ad 3-4.: Dies überlasse man einem CAS.

26.1 Die Begleiter des BEVAN-Punktes

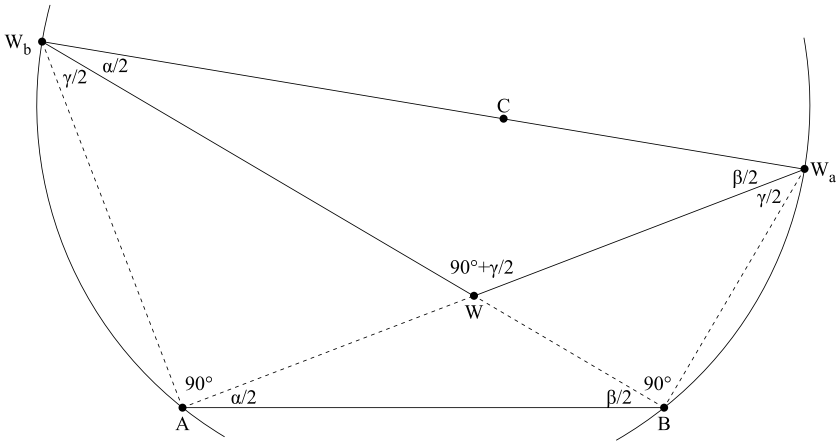
Vertauscht man einen der Ankreismittelpunkte mit dem Inkreismittelpunkt, so gelangt man zu den drei **Begleitern** des BEVAN-Punktes. So hat der BEVAN-Punkt V_c analoge Eigenschaften (man beachte, dass in 4. sich die Lote vertauschen):

5. V_c ist Umkreismittelpunkt von W_a, W_b und W.
6. V_c ist der Schnittpunkt der Lote von W_a auf b, von W_b auf a und von W auf c.
7. V_c entsteht, wenn man W_c an M spiegelt:



Die beiden anderen Begleiter V_a und V_b haben entsprechende Definitionen und Eigenschaften.

<u>Ad 5.</u>: Die Innenwinkel des von W_a, W_b und W gebildeten Dreiecks sind an der folgenden Figur ablesbar (Da die Winkel bei W_a und W_b jeweils die Größe $\frac{\gamma}{2}$ haben, liegen W_{AZ} und W_b auf einem Kreis mit der Sehne AB, dann betrachte man die Sehnen AW_b und BW_a).



Daher ist

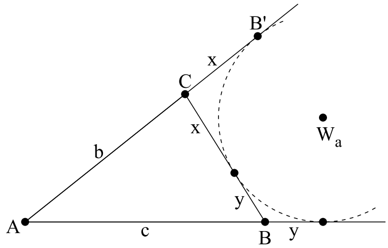
$$V_c = \frac{\sin\beta \cdot W1 + \sin\alpha \cdot W2 - \sin\gamma \cdot W}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma} = \frac{b \cdot W1 + a \cdot W2 - c \cdot W}{\sigma_c}$$
$$= \boxed{\left(a \cdot \mu_a : b \cdot \mu_b : c \cdot \mu_c\right) = V_c}$$

mit

$$\mu_a := \frac{a}{\sigma_b} - \frac{b}{\sigma_a} - \frac{c}{\sigma}; \quad \mu_b := \frac{b}{\sigma_a} - \frac{a}{\sigma_b} - \frac{c}{\sigma}; \quad \mu_c := -\frac{c}{\sigma} + \frac{a}{\sigma_b} + \frac{b}{\sigma_a}.$$

Selbstverständlich ist hier keine Symmetrie zu erwarten, da c gegenüber a und b ausgezeichnet ist. Die Formeln sehen nicht schön aus und laden nicht dazu ein, die Rechnungen per Hand durchzuführen.

Ad 6.: Der Berührpunkt des Inkreises mit c ist $C' = \left(\sigma_b : \sigma_a : 0\right)$; der Berührpunkt des Ankreises um W_a mit b ist $B' = \left(\sigma_b : 0 : -\sigma\right)$.

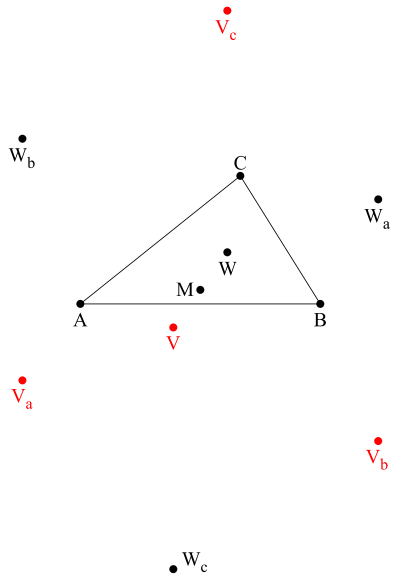


Wegen $x + y = a$ und $b + x = c + y$ ist $x = \frac{\sigma_b}{2}$ und daher $C = \frac{x \cdot A + b \cdot B'}{b + x}$, woraus

$$B' = \frac{-x\cdot A + (b+x)\cdot C}{b} = (2x : 0 : -2\cdot b - 2\cdot x)$$
$$= (\sigma_b : 0 : -2\cdot b - \sigma_b) = (\sigma_b : 0 : -\sigma)$$

folgt. Analog ist $A' = (0 : \sigma_a : -\sigma)$ der Berührpunkt des Ankreises um W_b mit a. Die Kollinearitäten lassen sich mit Hilfe eines CAS leicht überprüfen.
Ad 7.: Auch dies überlasse man einem CAS.

Da W Höhenschnittpunkt von $W_aW_bW_c$ ist, gilt auch: V ist Höhenschnittpunkt von $V_aV_bV_c$:



27 Die Abbildung ζ

Es sei $P = (u{:}v{:}w)$ ein Punkt mit den Spurpunkten $P_1 = (0{:}v{:}w)$, $P_2 = (u{:}0{:}w)$ und $P_3 = (u{:}v{:}0)$. Man betrachte die Seitenmittelpunkte R_a, R_b, Rc von $P_1P_2P_3$ wie z.B:

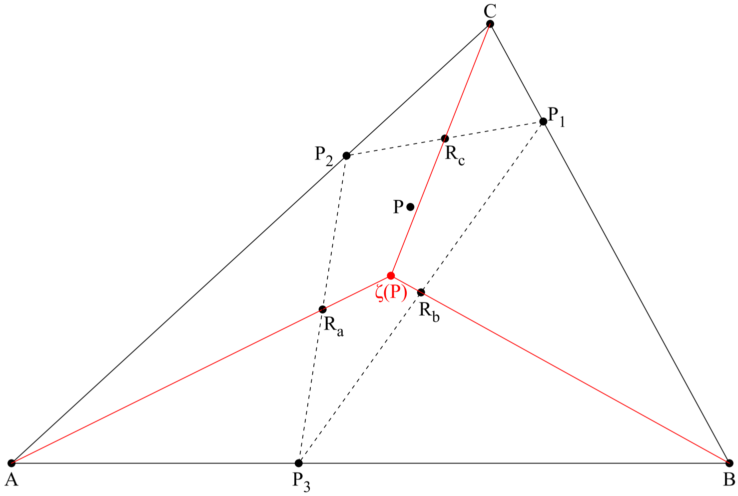
$$R_c = (u\cdot(v+w) : v\cdot(u+w) : \ldots).$$

Die Geraden

$$CR_c = [-v\cdot(u+w) : u\cdot(v+w) : 0],$$

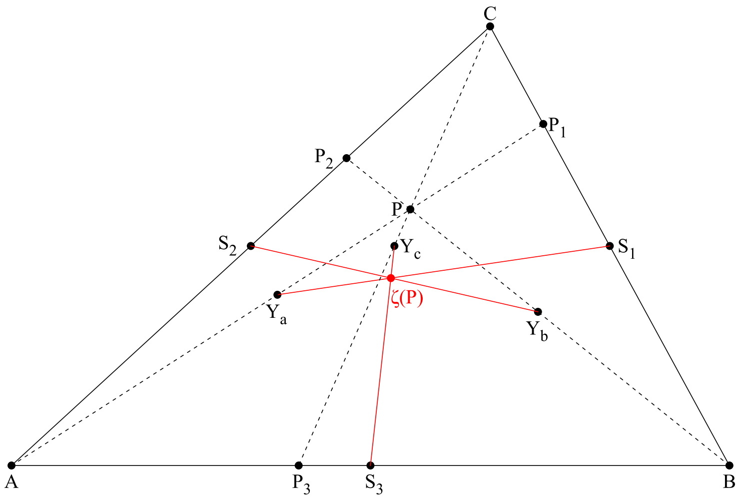
AR_a und BR_b sind kopunktal in

$$\boxed{\zeta(P):=\left(u\cdot(v+w):v\cdot(w+u):w\cdot(u+v)\right)=P\cdot\eta(P)}.$$



Man bekommt $\zeta(P)$ *auch auf andere Art*:

Zu $P=(u:v:w)$ und dem Spurpunkt $P_3=(u:v:0)$ wird der Transversalenmittelpunkt $Y_c=(u:v:u+v)$ gebildet und mit $S_3=(1:1:0)$ verbunden. Auf $S_3Y_c=[u+v:-u-v:v-u]$ liegt $\zeta(P)$, und aus Symmetriegründen gehen auch S_1Y_a und S_2Y_b durch $\zeta(P)$.



Bei der Abbildung ζ: $P \mapsto \zeta(P)$ werden die Eckpunkte A, B, C, die Seitenmitten S_1, S_2, S_3 und der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden auf sich abgebildet. Jeder Punkt auf AB (außer A und B) wird auf S_3 abgebildet; die Abbildung ist also **nicht** injektiv.

27.1 ζ und H: Der Symmedianpunkt Γ = X6 nach LEMOINE / GREBE

Dieser wird hier mit Γ bezeichnet; er wird auch nach Ernst Wilhelm GREBE (1804-1874) oder nach Émile Michel Hyacinthe LEMOINE (1840-1912) benannt, heißt auch *Symmedian*punkt und entsteht dadurch, dass die im letzten Abschnitt definierte Abbildung ζ auf den Höhenschnittpunkt angewendet wird. Es ist also $\Gamma = \zeta(H)$. Wegen

$$\tan\beta + \tan\gamma = \frac{\sin\beta\cdot\cos\gamma + \sin\gamma\cdot\cos\beta}{\cos\beta\cdot\cos\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cdot\cos\gamma} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

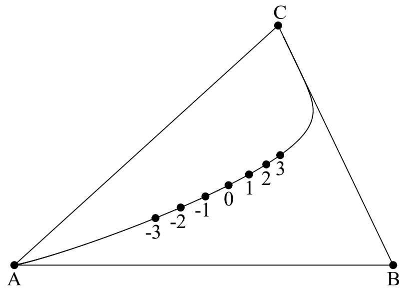
ist

$$\begin{aligned}\zeta(H) &= \big(\tan\alpha\cdot(\tan\beta+\tan\gamma) : \tan\beta\cdot(\tan\gamma+\tan\alpha) : \tan\gamma\cdot(\tan\alpha+\tan\beta)\big)\\ &= (\tan\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha : \tan\beta\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta : \tan\gamma\cdot\sin\gamma\cdot\cos\gamma)\\ &= \boxed{\left(a^2 : b^2 : c^2\right) =: \Gamma = \zeta(H)}.\end{aligned}$$

Damit ist $\Gamma = W\cdot W = H\cdot\eta(H) = H\cdot M$.

Die Graphik zeigt die Punkte $P(e) = \left(a^e : b^e : c^e\right)$ für unterschiedliche Exponenten e.

Es ist $P(0) = S$, $P(1) = W$, $P(2) = \Gamma$.



Der Symmedianpunkt Γ ist zum Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden isogonal konjugiert.

Die zum Symmedianpunkt harmonisch konjugierten Punkte sind die Eckpunkte des Tangentendreiecks (s.u.).

27.2 ζ, W und N

Die Abbildung ζ wird auf den Schnittpunkt W der Innenwinkelhalbierenden angewendet. Es ist $\zeta(W) = \boxed{\left(a\cdot(b+c) : b\cdot(c+a) : c\cdot(a+b)\right) = \zeta(W) = W\cdot Sp}$.

Der Punkt $\zeta(W)$ hat keinen besonderen Namen und erscheint als X37.

Wendet man ζ auf den Nagelpunkt $N = (\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c)$ an, bekommt man den Mittenpunkt:

$$\zeta(N) = (a\cdot\sigma_a : b\cdot\sigma_b : c\cdot\sigma_c) = T .$$

28 Ein weiterer Zusammenhang zwischen Punkten

Bezeichnet man wieder mit gP den Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden g, so ist $P = (PBC : PCA : PAB) = (a\cdot aP : b\cdot bP : c\cdot cP)$.

Wegen $\Gamma = (a^2 : b^2 : c^2)$ ist $a\Gamma : b\Gamma : c\Gamma = a:b:c$ und wegen $W = (a:b:c)$ deshalb $W = (a\Gamma : b\Gamma : c\Gamma)$.

Analog folgt wegen $T = (a\cdot\sigma_a : b\cdot\sigma_b : c\cdot\sigma_c)$ und $N = (\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c)$, dass $N = (aT : bT : cT)$ gilt. Die beiden von NAGEL gefundenen Punkte N und T hängen somit auch inhaltlich miteinander zusammen.

Analog folgt auch wegen $W = (a:b:c)$ und $S = (1:1:1)$, dass $S = (aW : bW : cW)$ gilt, was man auch schon daran sieht, dass $aW = bW = cW$ der Inkreisradius ist.

29 Quadriken

Liegt der Punkt $P = (x : y : z)$ auf einer Quadrik, gilt die Gleichung[12]

[12] Eine Verwechslung mit dem Inkreisradius r oder dem Dreiecksumfang σ ist nicht zu befürchten.

$$\underbrace{2\cdot r\cdot y\cdot z+2\cdot s\cdot z\cdot x+2\cdot t\cdot x\cdot y+\rho\cdot x^2+\sigma\cdot y^2+\tau\cdot z^2}_{=:M}$$
$$+\underbrace{R\cdot x+S\cdot y+T\cdot z}_{=:L}+K=0.$$

Wegen $(x:y:z)=(\lambda\cdot x:\lambda\cdot y:\lambda\cdot z)$ muss dann neben $M+L+K=0$ auch

$$\lambda^2\cdot M+\lambda\cdot L+K=0$$

für alle Werte von $\lambda\neq 0$ gelten. Für $\lambda=-1$ ist $M-L+K=0$, also $L=0$, und für $\lambda=2$ folgt $4\cdot M+K=0$, also $K=0$.
Eine Quadrik hat also die homogene Gleichung

$$\boxed{\rho\cdot x^2+\sigma\cdot y^2+\tau\cdot z^2+2\cdot(r\cdot y\cdot z+s\cdot z\cdot x+t\cdot x\cdot y)=0}$$

bzw.

$$\boxed{(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix}\rho & t & s\\ t & \sigma & r\\ s & r & \tau\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=:P\cdot\Sigma\cdot P^t=0}\,.$$

Eine Verwechslung zwischen der Matrix Σ und der Quadratsumme $\Sigma=a^2+b^2+c^2$ ist nicht zu befürchten.
Man beachte, dass der Übergang zur Matrix nicht eindeutig ist; so kann man $x^2+2\cdot x\cdot y+y^2=(x:y)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x:y)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ schreiben. Die *symmetrische Form wird stets bevorzugt*, da man mit ihr leicht Tangenten und (auf die Quadrik bezogene) Polaren bestimmen kann.
Die Quadrik zerfällt in zwei Geraden, falls die Determinante der Matrix verschwindet.

Für $x\neq 0$ ist der allgemeine Punkt durch

$$P(y)=\left(\tau:y\cdot\tau:-s-r\cdot y\pm\sqrt{(r^2-\sigma\cdot\tau)\cdot y^2+2\cdot(r\cdot s-t\cdot\tau)\cdot y+s^2-\rho\cdot\tau}\right)$$

gegeben.
Da die sechsKoeffizienten ρ,σ,τ,r,s,t nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind, benötigt man fünf Punkte, um die Quadrik festzulegen.

29.1 Quadrik durch 6 Spurpunkte

Durch die sechs Spurpunkte von $Q_i=(x_i:y_i:z_i)$ (i=1, ..., 2) verläuft die Quadrik mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{x_1\cdot x_2}+\frac{y^2}{y_1\cdot y_2}+\frac{z^2}{z_1\cdot z_2}=$$
$$\left(\frac{x\cdot y}{x_1\cdot y_2}+\frac{x\cdot y}{x_2\cdot y_1}\right)+\left(\frac{y\cdot z}{y_1\cdot z_2}+\frac{y\cdot z}{y_2\cdot z_1}\right)+\left(\frac{z\cdot x}{z_1\cdot x_2}+\frac{z\cdot x}{z_2\cdot x_1}\right)$$

bzw.

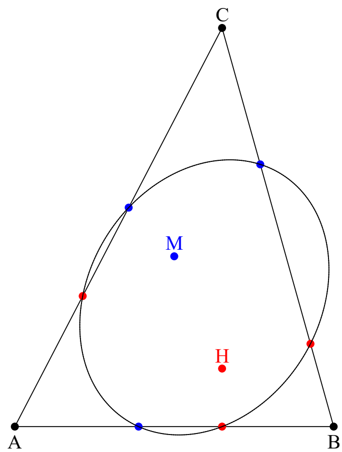
$$\begin{aligned} &y_1\cdot z_1\cdot y_2\cdot z_2\cdot x^2+x_1\cdot z_1\cdot x_2\cdot z_2\cdot y^2+x_1\cdot y_1\cdot x_2\cdot y_2\cdot z^2\\ &=(x_1\cdot y_2+x_2\cdot y_1)\cdot z_1\cdot z_2\cdot x\cdot y\\ &\quad+(y_1\cdot z_2+y_2\cdot z_1)\cdot x_1\cdot x_2\cdot y\cdot z\\ &\quad+(x_1\cdot z_2+x_2\cdot z_1)\cdot y_1\cdot y_2\cdot z\cdot x \end{aligned}$$

bzw. $(x:y:z)\cdot\Sigma\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$ mit

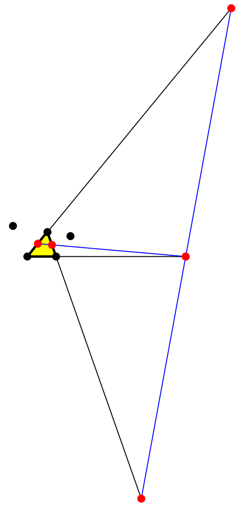
$$\Sigma=\begin{pmatrix} -2\cdot y_1\cdot y_2\cdot z_1\cdot z_2 & (x_1\cdot y_2+x_2 y_1)\cdot z_1\cdot z_2 & (x_1\cdot z_2+x_2\cdot z_1)\cdot y_1\cdot y_2\\ (x_1\cdot y_2+x_2 y_1)\cdot z_1\cdot z_2 & -2\cdot x_1\cdot x_2\cdot z_1\cdot z_2 & (y_1\cdot z_2+y_2\cdot z_1)\cdot x_1\cdot x_2\\ (x_1\cdot z_2+x_2\cdot z_1)\cdot y_1\cdot y_2 & (y_1\cdot z_2+y_2\cdot z_1)\cdot x_1\cdot x_2 & -2\cdot x_1\cdot x_2\cdot y_1\cdot y_2 \end{pmatrix},$$

und man überzeugt sich leicht davon, dass tatsächlich alle 6 Spurpunkte auf dieser Quadrik liegen. Dieser Sachverhalt wird mitunter nach Lazare Nicolas Marguerite CARNOT (1753-1823) benannt.

Rechts sieht man die Ellipse durch die Spurpunkte von M und H.



Die Quadrik kann auch in zwei Geraden zerfallen. Das ist der Fall, wenn man die Spurpunkte von W_a und W_c betrachtet (dabei sind die Spurpunkte von W_a auf c und von W_b auf c miteinander identisch. In der Graphik ist das Ausgangsdreieck gelb und fett umrandet, W_a und W_b sind schwarz, die Spurpunkte rot und das Geradenpaar blau.



29.2 abc-Quadriken

... berühren die Dreiecksseiten a, b, c.

Hat die Quadrik die Gestalt $\boxed{\frac{x^2}{u^2}+\frac{y^2}{v^2}+\frac{z^2}{w^2}=2\cdot\left(\frac{x\cdot y}{u\cdot v}+\frac{y\cdot z}{v\cdot w}+\frac{z\cdot x}{w\cdot u}\right)}$ bzw.

$$0=x^2\cdot v^2\cdot w^2+y^2\cdot w^2\cdot u^2+z^2\cdot u^2\cdot v^2-2\cdot u\cdot v\cdot w\cdot(x\cdot y\cdot w+y\cdot z\cdot u+z\cdot x\cdot v)$$

$$=(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix} v^2\cdot w^2 & -u\cdot v\cdot w^2 & -u\cdot v^2\cdot w \\ -u\cdot v\cdot w^2 & w^2\cdot u^2 & -u^2\cdot v\cdot w \\ -u\cdot v^2\cdot w & -u^2\cdot v\cdot w & u^2\cdot v^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

so hat die Schnittgleichung mit der Seite c die Form

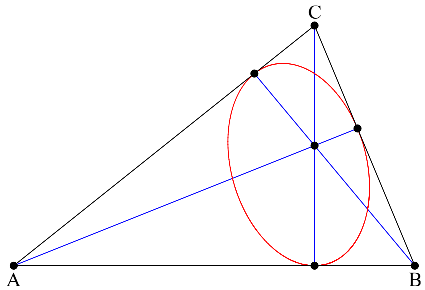
$\frac{x^2}{u^2}-2\cdot\frac{x\cdot y}{u\cdot v}+\frac{y^2}{v^2}=\left(\frac{x}{u}-\frac{y}{v}\right)^2=0$; man hat also den Berührpunkt $(u:v:0)$.

Die Quadrik der obigen Gestalt berührt demnach alle Dreiecksseiten in den *Spurpunkten* von $P=(u:v:w)$. P ist der nach BRIANCHON benannte Punkt (s.u.); er verallgemeinert den GERGONNE-Punkt.

Ist etwa $w=0$, so lautet die Gleichung $z^2\cdot u^2\cdot v^2=0$, beschreibt also eine zerfallende Quadrik.

Daher sei $\boxed{u\cdot v\cdot w\neq 0}$, d.h. P darf auf keiner Dreiecksseite liegen.

Liegt P im DreiecksInneren, so liegen alle drei Spurpunkte jeweils zwischen den Dreiecks-Eckpunkten, und die obige Quadrik ist eine In-*Ellipse*.

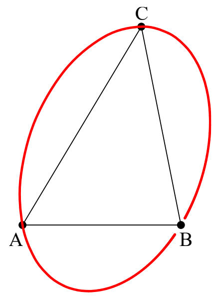


Schneidet man obige Quadrik mit der Ferngerade, bekommt man die Diskriminante $-(u\cdot v+v\cdot w+w\cdot u)$. Sind u, v, w alle echt positiv, hat man eine In-Ellipse.
Ist $w=-1$, muss im Ellipsenfall $u\cdot v>u+v$ und im Parabelfall $u\cdot v=u+v$ sein.

29.3 Berühr-Parabeln

Die Diskriminante verschwindet für $u\cdot v+v\cdot w+w\cdot u=0$. Man hat also eine *Parabel* für $w=\frac{-u\cdot v}{u+v}$ bzw. für $P=\left(u:v:\frac{-u\cdot v}{u+v}\right)=\left(u\cdot(u+v):v\cdot(u+v):-u\cdot v\right)$.

Die Punkte P, die zu einer Parabel führen, liegen offenbar auf der roten Um-Ellipse mit der Gleichung $u\cdot v+v\cdot w+w\cdot u=0$, der STEINER'schen Um-Ellipse (s.u.), dem isotomen Bild der Ferngeraden.

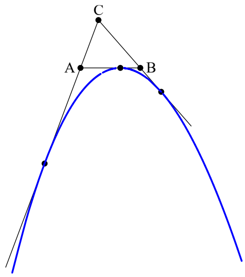


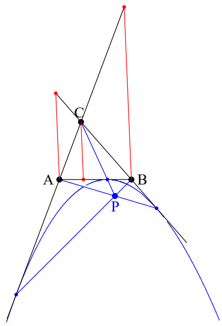
Der zu P isotom konjugierte Punkt $P'=\left(v:u:-(u+v)\right)$ liegt auf der Ferngeraden.

Die nebenstehende Parabel gehört zum BRIANCHON-Punkt

$P=\left(1:2:-\frac{2}{3}\right)$.

Blau sind ganz rechts der BRIANCHON-Punkt P und dessen Spurpunkte, rot die an den Seitenmitten gespiegelten Spurpunkte; man sieht, dass das isotome Konjugat von P auf der Ferngerade liegt.





Die Gleichung einer Berühr-Parabel allgemein ist

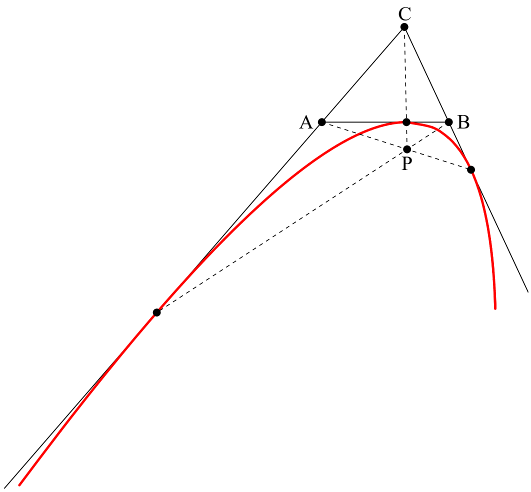
$$0=x^2\cdot v^2+y^2\cdot u^2+z^2\cdot(u+v)^2+2\cdot\left(-x\cdot y\cdot u\cdot v+z\cdot y\cdot u\cdot(u+v)+z\cdot x\cdot v\cdot(u+v)\right)$$

$$=(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix} v^2 & -u\cdot v & v\cdot(u+v) \\ -u\cdot v & u^2 & u\cdot(u+v) \\ v\cdot(u+v) & u\cdot(u+v) & (u+v)^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$=(x\cdot v-y\cdot u)^2+z\cdot(u+v)\cdot\left(z\cdot(u+v)+2\cdot(y\cdot u+x\cdot v)\right)$$

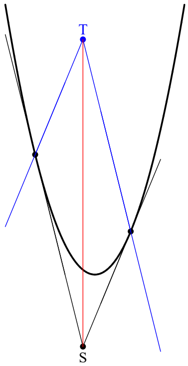
Eine Gerade $g_{Q,R}$ durch $Q=(u:v:0)$ und R schneidet die Parabel in einem weiteren Punkt S. (Ist $g_{Q,R}$ eine Tangente, so ist $S=Q$.)

Bewegt sich R auf einem Kreis um Q, so bekommt man auf diese Weise alle Punkte der Parabel. Dies führt (nach CAS-unterstützter Rechnung) zur Parameterdarstellung der Berühr-Parabel



$$Q(s)=\left(u\cdot(u+t\cdot v)^2 : v\cdot\left(s\cdot u-t\cdot(u+v)\right)^2 : -4\cdot t^2\cdot u\cdot v\cdot(u+v)\right) \text{ mit } t=1-s.$$

Das isotome Konjugat $P'=(v:u:-u-v)$ des BRIANCHON-Punktes $P=\left(u:v:\frac{-u\cdot v}{u+v}\right)$ ist der Berührpunkt der Parabel mit der Ferngerade.



Nun gilt bei ***jeder*** Parabel:
Zwei Tangenten (schwarz) mögen einander in S schneiden.
Die blauen Parallelen der Tangenten durch die jeweils anderen Punkte mögen einander in T schneiden.
Dann ist ST parallel zur Parabelachse.

Die Tangente in $P_1=(0:v:w)$ ist $a=[1:0:0]$, die Tangente in $P_2=(u:0:w)$ ist $b=[0:1:0]$; beide schneiden sich in C.

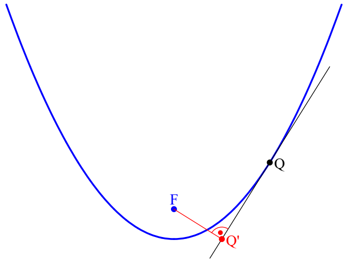
Die Parallele der P_1-Tangente durch P_2 ist $[-w:u:u]=[v:u+v:u+v]$, die Parallele der P_2-Tangente durch P_1 ist $[v:-w:v]=[u+v:u:u+v]$; beide Tangenten schneiden einander in $C=\left(v:u:\frac{u\cdot v}{u+v}-(u+v)\right)$. Dann sind C, C und P‘ kollinear, d.h. P‘ gibt die Richtung der Parabel-Achse an:

$$\boxed{\infty(\text{Achse})=(v:u:-u-v)=P'}.$$

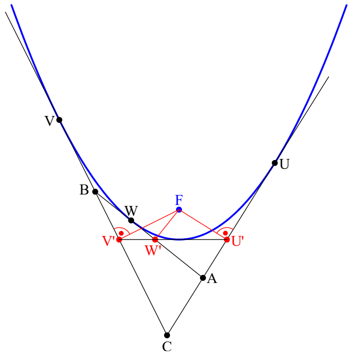
P‘ ist der Berührpunkt der Parabel mit der Ferngeraden; sein isogonales Konjugat $P'^{\#}=\left(a^2\cdot u:b^2\cdot v:\frac{-c^2\cdot u\cdot v}{u+v}\right)$ liegt auf dem Umkreis von ABC.

Die isogonalen Konjugate der Punkte auf einer Umkreis-Tangente bilden einen Kegelschnitt, der die Ferngerade berührt, also eine Parabel.
Umgekehrt bilden die isogonalen Konjugate der Punkte auf der Berühr-Parabel die zu $P'^{\#}=\left(a^2\cdot u:b^2\cdot v:\frac{-c^2\cdot u\cdot v}{u+v}\right)$ gehörige Umkreis-Tangente.

Für jeden Parabelpunkt Q gilt: Fällt man vom Brennpunkt F das Lot Q‘ auf die zu Q gehörige Tangente, so liegt Q‘ auf der Scheiteltangente.



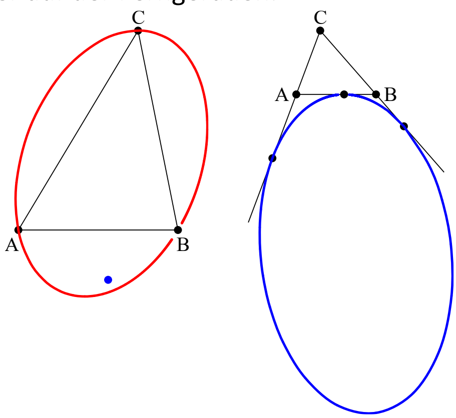
Bildet man zu den Parabelpunkten U, V, W das Tangentendreieck ABC und fällt vom Brennpunkt F die Lote U‘ und V‘ und W‘ so liegen alle drei Lote auf der Scheiteltangente, sind also kollinear.
Nach WALLACE/SIMSON liegt F daher auf dem Umkreis von ABC (ein nach Johann Heinrich LAMBERT (1728 -1777) benannter Sachverhalt).



Das isogonale Konjugat von F liegt daher auf der Ferngeraden.

29.4 Berühr-Ellipsen

Die Punkte P im Inneren der roten Ellipse führen zu Ellipsen, also auch etwa der blaue Punkt $P=(2:3:-1)$, der zu der blauen *An-Ellipse* führt, da P nicht im Inneren des Dreiecks liegt.
Punkte P außerhalb der roten Ellipse führen naturgemäß zu Berühr-Hyperbeln.



29.5 Die Inellipse von MACBEATH

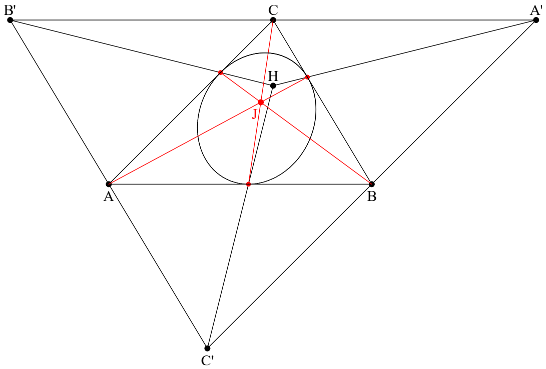
Ist A’B’C‘ mit $A'=(-1:1:1)$, $B'=(1:-1:1)$, $C'=(1:1:-1)$ das Parallelendreieck zu ABC, so schneidet HA‘ die Seite a in

$(o:\tan\alpha+\tan\beta:\tan\alpha+\tan\gamma)=(0:j_b:j_c)$ mit $j_b=\dfrac{1}{\tan\alpha+\tan\gamma}$ usw. Es handelt sich also um die Spurpunkte von

$J=\left(j_a : j_b : j_c\right)=\left(\dfrac{1}{\sin(2\cdot\alpha)} : \dfrac{1}{\sin(2\cdot\beta)} : \dfrac{1}{\sin(2\cdot\gamma)}\right)$. J ist zu M isotom konjugiert.

Die Berührquadrik hat die Gleichung $\dfrac{x^2}{j_a^2}+\dfrac{y^2}{j_b^2}+\dfrac{z^2}{j_c^2} = 2\cdot\left(\dfrac{x\cdot y}{j_a\cdot j_b}+\dfrac{y\cdot z}{j_b\cdot j_c}+\dfrac{z\cdot x}{j_c\cdot j_a}\right)$,

ist eine Ellipse mit den Brennpunkten H und M und nach Alexander Murray MACBEATH (1923 - 2014) benannt.



Die Nachweise führt man wohl besser nicht mit baryzentrischen Koordinaten.

29.6 Ein Weg zum Inkreis

Hier eröffnet sich gleich ein Weg zum Inkreis: Die Berührpunkte sind die Spurpunkte des GERGONNE-Punktes $G=\left(\dfrac{1}{\sigma_a} : \dfrac{1}{\sigma_b} : \dfrac{1}{\sigma_c}\right)$ und führen zur Gleichung

$$x^2\cdot\sigma_a^2+y^2\cdot\sigma_b^2+z^2\cdot\sigma_c^2 = 2\cdot\left(x\cdot y\cdot\sigma_a\cdot\sigma_b+y\cdot z\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c+z\cdot x\cdot\sigma_c\cdot\sigma_a\right)$$

bzw. zu $(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix}-\sigma_a^2 & \sigma_b\cdot\sigma_a & \sigma_c\cdot\sigma_a\\ \sigma_a\cdot\sigma_b & -\sigma_b^2 & \sigma_c\cdot\sigma_b\\ \sigma_a\cdot\sigma_c & \sigma_b\cdot\sigma_c & -\sigma_c^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0$.

Dass es sich hier tatsächlich um einen Kreis handelt, wird später deutlich werden.

29.7 Tangenten und Polaren

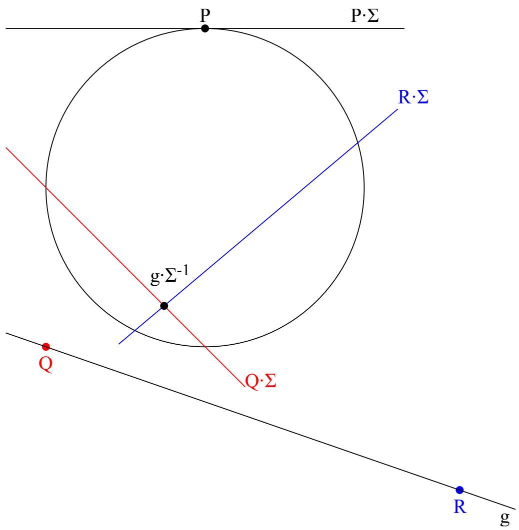
$P\cdot\Sigma$ ist ein Zeilentripel und stellt die <u>Tangente</u> in P an die Quadrik dar, denn P liegt (wegen $(P\cdot\Sigma)*P=P\cdot\Sigma\cdot P^t=0$) auf $P\cdot\Sigma$, und $P\cdot\Sigma$ hat mit der Quadrik nur den Punkt P gemeinsam, denn wäre Q ein weiterer gemeinsamer Punkt, so müsste $Q\cdot\Sigma\cdot Q^t=0$ und $0=(P\cdot\Sigma)*Q=P\cdot\Sigma\cdot Q^t$ gelten, woraus einerseits

$\left(\lambda\cdot P+\mu\cdot Q\right)\cdot\Sigma\cdot Q^t=0$ gelten, andererseits wegen $P\cdot\Sigma\cdot P^t=0$ auch $P\cdot\Sigma\cdot\left(\lambda\cdot P+\mu\cdot Q\right)^t=0$, was sich wegen der Symmetrie von Σ auch als $\left(\lambda\cdot P+\mu\cdot Q\right)\cdot\Sigma\cdot P^t=0$ schreibt. Zusammen gilt daher $\left(\lambda\cdot P+\mu\cdot Q\right)\cdot\Sigma\cdot\left(\lambda\cdot P+\mu\cdot Q\right)^t=0$, und damit wäre die gesamte Gerade durch P und Q Teil der Quadrik. Das ist nur in dem uninteressanten Fall möglich, dass die Quadrik zu zwei Geraden ausgeartet ist.

Liegt P außerhalb der Quadrik, so hat $P\cdot\Sigma$ eine andere Bedeutung: Die beiden Tangenten von P an die Quadrik haben die Berührpunkte B_1 und B_2, damit gelten die Gleichungen $0=\left(B_1\cdot\Sigma\right)*P=B_1\cdot\Sigma\cdot P^t$ und $0=\left(B_2\cdot\Sigma\right)*P=B_2\cdot\Sigma\cdot P^t$ bzw. $P\cdot\Sigma\cdot B_1^t=0$ und $P\cdot\Sigma\cdot B_2^t=0$. Demnach liegen die beiden Berührpunkte B_1 und B_2 auf der Geraden $P\cdot\Sigma$. In diesem Fall ist $P\cdot\Sigma$ die (auf die Quadrik bezogene) Polare.

Liegen P und Q auf g, gilt also $g\cdot P^t=0=g\cdot Q^t$, und liegen P und Q außerhalb der Quadrik, so schneiden sich die Polaren von P und Q für $\det\left(\Sigma\right)\neq 0$ in $g\cdot\Sigma^{-1}$, denn dieser Punkt liegt auf $P\cdot\Sigma$ wegen $P\cdot\Sigma\cdot\left(g\cdot\Sigma^{-1}\right)^t=P\cdot\Sigma\cdot\Sigma^{-1}\cdot g^t=P\cdot g^t=0$ (für Q argumentiert man analog).

Die Graphik zeigt die Verhältnisse beim Kreis:



Damit hat man die Zuordnung $g \mapsto g \cdot \Sigma^{-1}$ für Geraden außerhalb der Quadrik, deren Umkehrung $R \mapsto R \cdot \Sigma$ schon oben für Punkte R außerhalb der Quadrik erklärt wurde. Somit sind die beiden Zuordnungen $R \mapsto R \cdot \Sigma$ und $g \mapsto g \cdot \Sigma^{-1}$ nun für alle Punkte R und für alle Geraden g erklärt.

29.8 ABC-Quadriken

… verlaufen durch A, B und C.

Setzt man $A = (1:0:0)$ ein in

$$2 \cdot r \cdot y \cdot z + 2 \cdot s \cdot z \cdot x + 2 \cdot t \cdot x \cdot y + \rho \cdot x^2 + \sigma \cdot y^2 + \tau \cdot z^2 = 0,$$

so folgt $\rho = 0$. Analog ergibt sich $\sigma = \tau = 0$.

ABC-Quadriken haben daher die Gleichung

$$\boxed{r \cdot y \cdot z + s \cdot z \cdot x + t \cdot x \cdot y = 0},$$

was mit dem Symbol $\langle r:s:t \rangle$ bezeichnet werden soll. Die Koordinaten r, s, t sind homogen.

Ist etwa $r = 0$, zerfällt die Quadrik in die beiden Geraden $x = 0$ und $s \cdot z + t \cdot y = 0$. Man kann daher $\boxed{r \cdot s \cdot t \neq 0}$ annehmen.

Ist $x = 0$, so folgt $y \cdot z = 0$, man bekommt also Eckpunkte.

Schreibt man die ABC-Quadrik als $\frac{r}{x} + \frac{s}{y} + \frac{t}{z} = 0$ und ist

$P^\# = \left(x^\# : y^\# : z^\#\right) = \left(\frac{a^2}{x} : \frac{b^2}{y} : \frac{c^2}{z}\right)$ das isogonale Konjugat von $P = (x:y:z)$, so

ist zu erkennen, dass wegen $\frac{a^2 \cdot r}{a^2 \cdot x} + \frac{b^2 \cdot s}{b^2 \cdot y} + \frac{c^2 \cdot t}{c^2 \cdot p_3} z = \frac{r}{a^2} \cdot x^\# + \frac{s}{b^2} \cdot y^\# + \frac{t}{c^2} \cdot z^\# = 0$

gilt:

> Die ABC-Quadrik $\langle r:s:t \rangle$ ist zur Geraden $\left[\frac{r}{a^2} : \frac{s}{b^2} : \frac{t}{c^2}\right]$ isogonal konjugiert.

Die isogonale Konjugation bildet daher Kegelschnitte durch A, B, C auf Geraden ab.

Ein allgemeiner Punkt der ABC-Quadrik für $r = x = 1$ ist

$P(v) = \left(v + s : v \cdot (v + s) : -t \cdot v\right)$ mit $P(0) = A$, $P(-s) = C$ und $P\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} B$.

Auf der Quadrik mit $\frac{r}{x}+\frac{s}{y}+\frac{t}{z}=0$ liegen nicht nur A, B und C, sondern auch die Punkte $(-r:2\cdot s:2\cdot t)$, $(2\cdot r:-s:2\cdot t)$, $(2\cdot r:2\cdot s:-t)$.

Die Matrix-Darstellung ist

$$(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix}0 & t & s\\ t & 0 & r\\ s & r & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0.$$

Um zu bestimmen, um welche Art von Quadrik es sich handelt, muss diese mit der Ferngeraden (oder die zugeordnete isogonal konjugierte Gerade mit dem Umkreis) geschnitten werden. Die Ferngerade hat den allgemeinen Punkt $(u:v:-u-v)$; es können nicht gleichzeitig u und v verschwinden.

Schneidet man eine nicht zerfallende Quadrik (also mit $r\cdot s\cdot t\neq 0$) mit der Ferngeraden (mit dem allgemeinen Punkt $(u:v:-u-v)$ für $u\cdot v\neq 0$), bekommt man mit $f:=\frac{u}{v}$ die Schnittgleichung

$$f^2+f\cdot\frac{r+s-t}{s}+\frac{r}{s}=0.$$

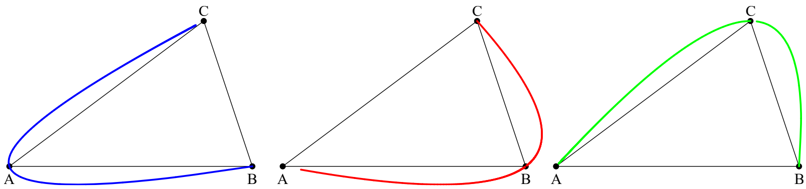
Deren Diskriminante ist

$$\boxed{\begin{aligned}\delta(r,s,t) &:= r^2+s^2+t^2-2\cdot(r\cdot s+s\cdot t+t\cdot r)\\ &= -\left(\sqrt{r}+\sqrt{s}+\sqrt{t}\right)\cdot\left(-\sqrt{r}+\sqrt{s}+\sqrt{t}\right)\cdot\left(\sqrt{r}-\sqrt{s}+\sqrt{t}\right)\cdot\left(\sqrt{r}+\sqrt{s}-\sqrt{t}\right)\end{aligned}}$$

(Dieser Ausdruck wird uns noch später begegnen.)

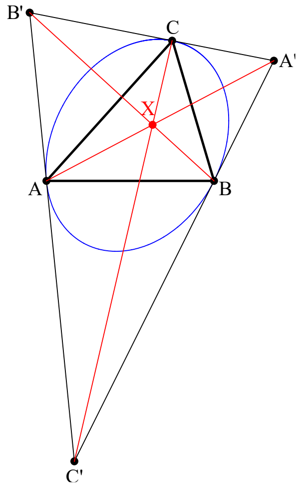
Man bekommt beispielsweise *Parabeln* für

$$4\cdot y\cdot z+z\cdot x+x\cdot y=0;\; y\cdot z+4\cdot z\cdot x+x\cdot y=0;\; y\cdot z+z\cdot x+4\cdot x\cdot y=0.$$



Man bekommt eine *Ellipse* etwa für $2\cdot y\cdot z+z\cdot x+x\cdot y=0$.

29.9 Deutung von r, s, t bei einer ABC-Quadrik

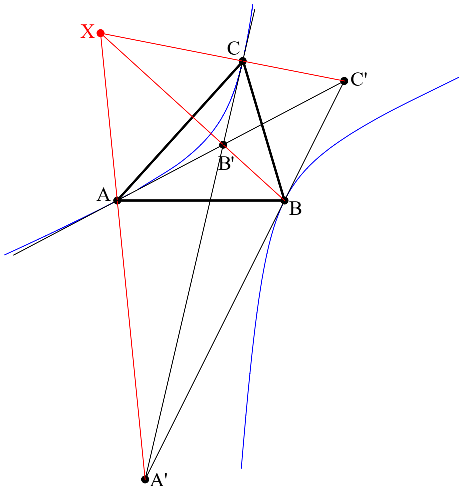


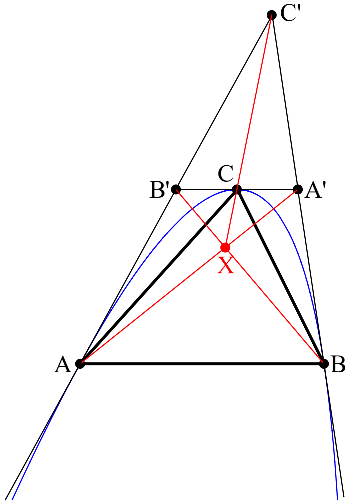
Die ABC-Quadrik mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & t & s \\ t & 0 & r \\ s & r & 0 \end{pmatrix}$ hat in A die Tangente $[0:t:s]$, und die Tangenten in B und in C schneiden sich in $A' = (-r:s:t)$.

Rechts sieht man eine In-Ellipse als Beispiel.
Die Geraden AA‘, BB‘ und CC‘ sind kopunktal in $X = (r:s:t)$.

Die Punkte X, A‘, B‘, C‘ bilden ein harmonisches Punktequadrupel.

Die Aussage gilt auch für Hyperbeln und Parabeln:

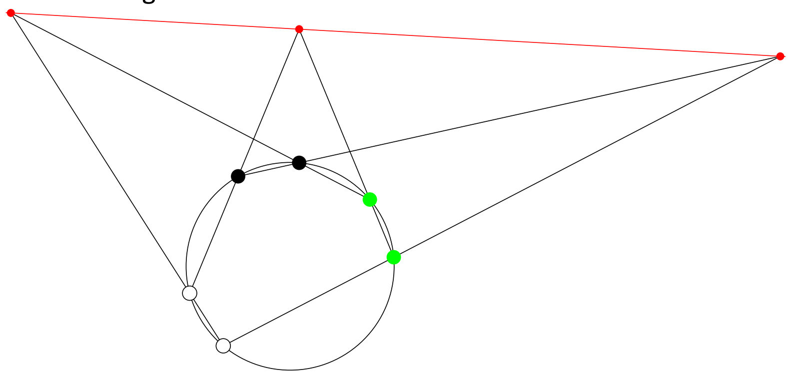




Die Tangente $[0:t:s]$ schneidet die Seite a in $(0:s:-t)$; die analog gebildeten Punkte $(-r:0:t)$ und $(-r:s:0)$ sind kollinear auf $\left[\frac{1}{r}:\frac{1}{s}:\frac{1}{t}\right]$, auf der nach LEMOINE oder nach Ludwig Otto HESSE (1811–1874) benannten Geraden.

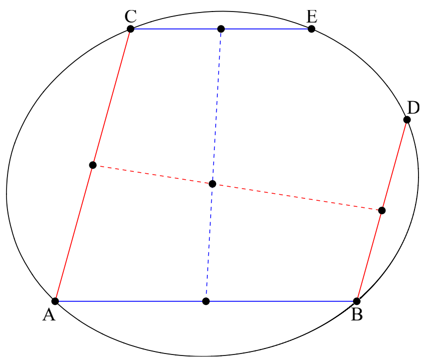
29.10 Zusammenhang mit dem Satz von PASCAL

Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall des Satzes von Blaise PASCAL (1623 - 1662) über ein Sehnen-Sechseck, wenn sich gleichfarbige Kreispunkte aufeinander zu bewegen.



29.11 Der Mittelpunkt einer ABC-Quadrik

Verwendet wird die Tatsache, dass die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einer Geraden durch den Mittelpunkt liegen.

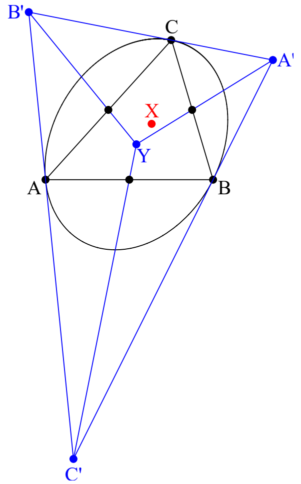


Wegen $AC=[0:1:0]$ hat die Parallele zu AC durch B die Form $[1:0:1]$; sie schneidet die Quadrik mit $r\cdot y\cdot z+s\cdot z\cdot x+t\cdot x\cdot y=0$ in $D=(f:s:-f)$.

Der Mittelpunkt von DB ist $(f:2\cdot s:-f)$; die die Mittelpunkte von AC und von BD verbindende Gerade hat die Gestalt $[-s:f:s]$.

Wegen $AB=[0:0:1]$ hat die Parallele zu AB durch C die Form $[1:1:0]$; sie schneidet die Quadrik mit $r\cdot y\cdot z+s\cdot z\cdot x+t\cdot x\cdot y=0$ für $g:=r-s$ in $E=(-g:g:t)$. Der Mittelpunkt von CE ist $E=(-g:g:2\cdot t)$; die die Mittelpunkte von AB und von CE verbindende Gerade hat die Gestalt $[t:-t:g]$.

Die beiden die Sehnenmittelpunkte verbindenden Geraden schneiden sich im Mittelpunkt Y der Quadrik.



Es ist

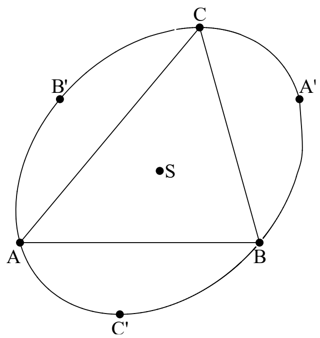
$$\boxed{Y=\left(r\cdot(-r+s+t):s\cdot(r-s+t):t\cdot(r+s-t)\right)}.$$

Es handelt sich um den S-CEVA-konjugierten Punkt zu $X=(r:s:t)$. Man bekommt ihn, wenn man die zu X harmonischen Punkte A', B' und C' mit den Seitenmitten verbindet; die Verbindungsgeraden sind kopunktal in Y.

Bei Parabeln liegt der Mittelpunkt auf der Ferngerade.

29.12 Die STEINER'sche Um-Ellipse

Spiegelt man A an $S=(1:1:1)$, so bekommt man $A'=(-1:2:2)$ usw. Die ABC-Quadrik durch A', B' und C' hat die Gleichung $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=0$ und ist nach Jakob STEINER (1796 - 1863) benannt; es ist die flächenkleinste Um-Ellipse; ihr Mittelpunkt ist S.



29.13 ABC-Quadriken durch H

Für nicht rechtwinklige Dreiecke ABC gilt:

Verläuft die Quadrik mit $\frac{r}{x}+\frac{s}{y}+\frac{t}{z}=0$ durch $H=(\tan\alpha:\tan\beta:\tan\gamma)$, so ist $r\cdot\cot\alpha+s\cdot\cot\beta+t\cdot\cot\gamma=0$.

Die zugeordnete isogonal konjugierte Gerade verläuft durch M, schneidet also den Umkreis an zwei verschiedenen Stellen. Da der Umkreis das isogonale Konjugat der Ferngeraden ist, gilt:

Ist ABC nicht rechtwinklig, so ist jede ABC-Quadrik durch H eine *Hyperbel*.

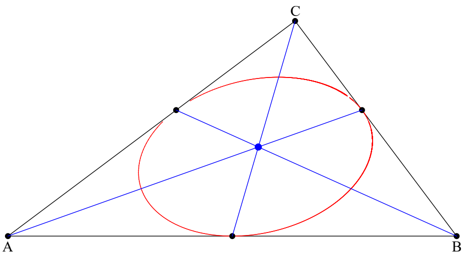
Man kann noch mehr sagen, falls ABC nicht rechtwinklig ist: Die der Quadrik zugeordnete Gerade ist ein Durchmesser QR des Umkreises, wegen Thales steht AQ auf AR senkrecht. Die isogonal konjugierten Punkte $Q^{\#}$ und $R^{\#}$ liegen auf der Ferngeraden; $AQ^{\#}$ und $AR^{\#}$ sind zu den Asymptoten der Hyperbel parallel. Da sich der Winkel zwischen zwei Geraden durch A bei isogonaler Konjugation nicht ändert, ist $AQ^{\#}$ zu $AR^{\#}$ orthogonal, d.h. die Hyperbel ist rechtwinklig. Liegt umgekehrt eine rechtwinklige Hyperbel vor, dann steht AQ auf AR senkrecht, und die der Quadrik zugeordnete Gerade verläuft durch M. Es gilt also die Äquivalenz:

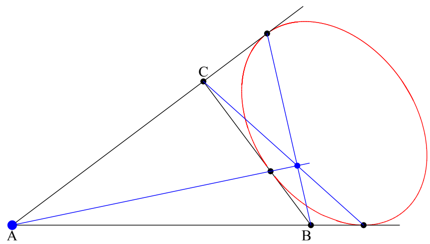
Für nicht rechtwinklige Dreiecke gilt: Eine ABC-Quadrik verläuft genau dann durch H, wenn sie eine rechtwinklige Hyperbel ist.

29.14 Der BRIANCHON-Punkt

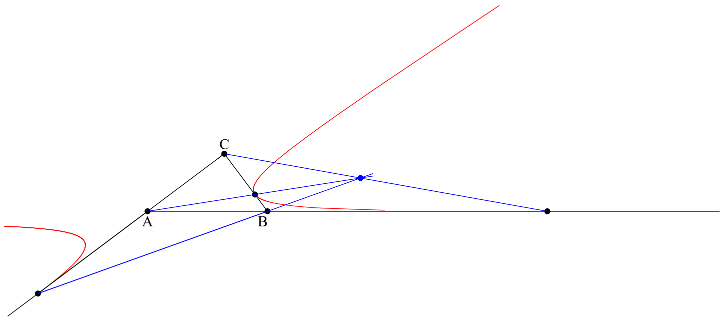
Wegen $AA'=[0:S:\varepsilon_R \cdot T]$, $BB'=[R:0:\varepsilon_S \cdot T]$, $CC'=[R:\varepsilon_T \cdot S:0]$ hat man Kopunktalität dieser Geraden für $\varepsilon_S + \varepsilon_R \cdot \varepsilon_T = 0$ bzw. für die dazu äquivalente Bedingung $\boxed{\varepsilon_R \cdot \varepsilon_S \cdot \varepsilon_T = -1}$ in $\boxed{Bri = \left(\frac{\varepsilon_R}{R} : \frac{\varepsilon_S}{S} : \frac{\varepsilon_T}{T}\right)}$.

Die Kopunktalitätsvoraussetzung ist erfüllt für $\varepsilon_R = \varepsilon_S = \varepsilon_T = -1$ (In-Ellipse; links), aber auch für den Fall, dass nur etwa $\varepsilon_R = -1$ (An-Ellipse; rechts) ist.



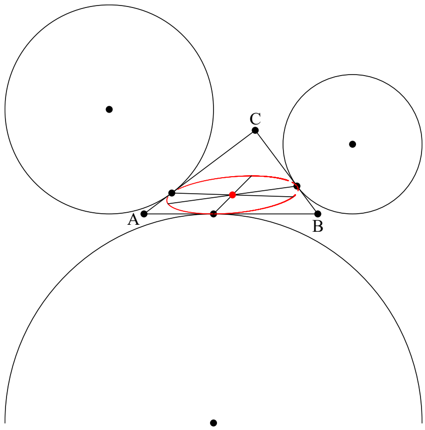


Dieser nach BRIANCHON benannte Punkt verallgemeinert den GERGONNE-Punkt bzw. dessen Begleiter und wurde im dortigen Abschnitt bereits erwähnt. Er existiert auch für Kegelschnitte, die keine Ellipsen sind:



29.15 In-Ellipsen und deren Mittelpunkte

Im Gegensatz zum Inkreis gibt es zu einem Dreieck viele In-Ellipsen. Sind die Berührpunkte die Seitenmitten, so ist die Ellipse nach STEINER benannt; sie ist die In-Ellipse mit dem größten Flächeninhalt; für sie ist $R = S = T$. Sind die Berührpunkte die Berührpunkte der Ankreise, so ist die (nebenstehende) Ellipse nach H. MANDART benannt; ihr Mittelpunkt ist der Mittenpunkt.



Die Gleichung einer In-Ellipse

$$R^2 \cdot x^2 + S^2 \cdot y^2 + T^2 \cdot z^2 = 2 \cdot (S \cdot T \cdot y \cdot z + T \cdot R \cdot z \cdot x + R \cdot S \cdot x \cdot y)$$

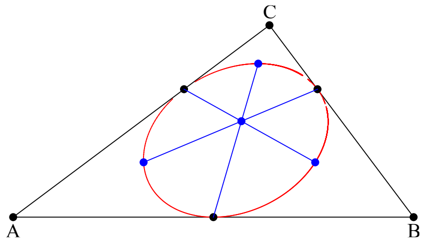
schreibt sich mit $u = R \cdot x$, $v = S \cdot y$, $w = T \cdot z$ einfacher als

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 \cdot (u \cdot v + v \cdot w + w \cdot u)$$

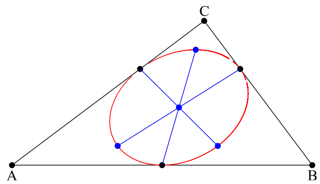
und hat für $u \neq 0$ den allgemeinen Punkt $P(v) = (1 : v : 1 + v \pm 2 \cdot \sqrt{v})$.

Auf der Kurve liegen daher nicht nur die schon erwähnten Berührpunkte

$\left(\frac{1}{R}:\frac{1}{S}:0\right)$ usw., sondern auch $\left(\frac{1}{R}:\frac{1}{S}:\frac{4}{T}\right)$ usw. (blau), deren Verbindungslinien zu den Berührpunkten kopunktal sind in $\left(\frac{1}{R}:\frac{1}{S}:\frac{1}{T}\right)$.



Interessanter sind die Kurvenpunkte $\left(R:S:\frac{(R+S)^2}{T}\right)$ usw.; der Mittelpunkt von $(S:R:0)$ und $\left(R\cdot T:S\cdot T:(R+S)^2\right)$ ist $\boxed{Z=(S+T:T+R:R+S)}$, aufgrund der Symmetrie der Koordinaten dieses Punktes handelt es sich um den *Mittelpunkt* der In-Ellipse.



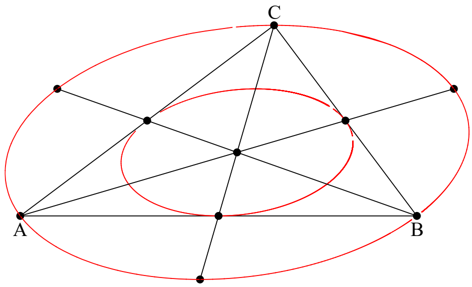
29.16 Die beiden STEINER-Ellipsen

Die STEINER'sche Um-Ellipse hat die Gleichung $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=0$. Sie ist das isotome Bild der Ferngeraden.

Die STEINER'sche In-Ellipse hat die Gleichung $x^2+y^2+z^2=2\cdot(y\cdot z+z\cdot x+x\cdot y)$.

beide Ellipsen haben den Mittelpunkt $S=(1:1:1)$.

Nun sei $P=(u:v:w)$ ein Punkt. Liegt dessen Bild $\eta^{-1}(P)=(-u+v+w:*:*)$ auf der Um-Ellipse, so liegt P auf der In-Ellipse, wie man leicht nachrechnet.



29.17 ABab-Quadriken, ARTZT-Parabeln

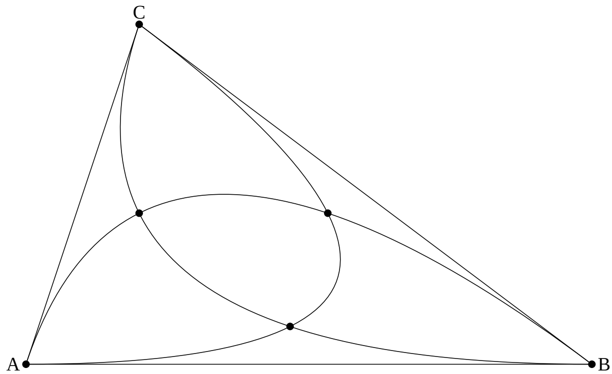
… gehen durch A und B und berühren a und b in B und A. Sie haben die Gleichung

$$\tau \cdot z^2 + 2 \cdot t \cdot x \cdot y = 0 .$$

Sie haben mit der Ferngerade mit dem allgemeinen Punkt $(\lambda : 1-\lambda : -1)$ eine doppelte Lösung, falls $t = -2 \cdot \tau$, was auf $\boxed{z^2 = 4 \cdot x \cdot y}$ führt. In diesem Fall hat man eine Parabel, die nach August ARTZT (1835 - 1899) benannt wird.

Die Parabeln zu $z^2 = 4 \cdot x \cdot y$ und zu $y^2 = 4 \cdot z \cdot x$ schneiden sich in $(1 : 4 \cdot \zeta : 4 \cdot \zeta^2)$ mit ζ als dritter Einheitswurzel und natürlich in $A = (1 : 0 : 0)$, also in 4 Punkten. Die reellen Schnittpunkte liegen auf den Seitenhalbierenden von ABC.

Man beachte, dass die ARTZT-Parabeln quadratische BÉZIER-Kurven mit A, B, C als jeweiligen „Kontrollpunkten“ sind.



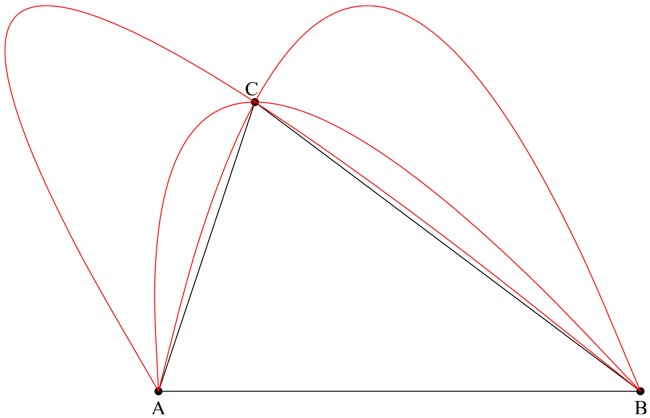
Als BÉZIER-Kurve hat die Parabel durch A und B mit $s = 1 - t$ den allgemeinen Punkt $P(t) = (s^2 : 2 \cdot s \cdot t : t^2)$. Ersetzt man den „Kontrollpunkt“ C durch $\cdot D_\tau = (\sigma^2 : \tau^2 : -1)$ mit $\sigma = 1 - \tau$, so bekommt man den allgemeinen Punkt

$$\begin{aligned} Q_\tau(t) &= s^2 \cdot A + 2 \cdot s \cdot t \cdot D_\tau + t^2 \cdot B \\ &= s^2 \cdot A + 2 \cdot s \cdot t \cdot \frac{-\sigma^2 \cdot A - \tau^2 \cdot B + C}{2 \cdot \sigma \cdot \tau} + t^2 \cdot B \\ &= (s \cdot \sigma \cdot (s \cdot \tau - t \cdot \sigma) : t \cdot \tau \cdot (t \cdot \sigma - s \cdot \tau) : s \cdot t) \end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist $s = 1$ und daher $Q_\tau(0) = A$.

Für $t = 1$ ist $s = 0$ und daher $Q_\tau(1) = B$.

Für $t = \tau$ ist $s = \sigma$ und daher $Q_\tau(\tau) = C$.

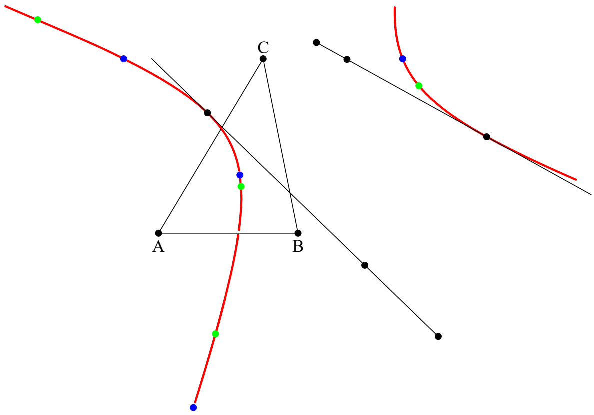


Die Graphik zeigt die entstehenden Um-Parabeln für $\tau=\frac{1}{4}$, $\tau=\frac{2}{4}$, $\tau=\frac{3}{4}$.

30 Die TomGon-Hyperbel

Unter welchen Umständen sind $P=(u:v:w)$, dessen isotomes Konjugat $P'=\left(\frac{1}{u}:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}\right)$ und dessen isogonales Konjugat $P^{\#}=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)$ zueinander kollinear?

Ist $u=0$, so ist $P'=A=P^{\#}$, also ist die Kollinearität für jeden Punkt der Dreiecksseiten außer für die Eckpunkte erfüllt.



Die entsprechende Kurve muss auch durch die Fixpunkte der isotomen Konjugation gehen (also $S=(1:1:1)$ und dessen harmonische Konjugierte (blau)) und durch die Fixpunkte der isogonalen Konjugation (also $W=(a:b:c)$ und dessen harmonische Konjugierte (grün)) gehen.

Liegt P auf keiner Dreiecksseite, so muss $\boxed{\rho\cdot u^2+\sigma\cdot v^2+\tau\cdot w^2=0}$ mit $\rho=b^2-c^2;\ \sigma=c^2-a^2;\ \tau=a^2-b^2$ sein.
Die Kurve ist eine Hyperbel.
Auf der Kurve sind zwei schwarze Punkte zusammen mit deren isotomen und isogonalen Konjugaten eingetragen. Die zugehörigen Geraden sind offenbar Tangenten:

Schreibt man die Hyperbelgleichung als $(u:v:w)\cdot\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & \tau\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=0$, erkennt man, dass die Tangente in $P=(u:v:w)$ gegeben ist durch $[u\cdot\rho : v\cdot\sigma : w\cdot\tau]$.

Man sieht sofort, dass $P'=\left(\frac{1}{u}:\frac{1}{v}:\frac{1}{w}\right)$ und $P^{\#}=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)$ auf dieser Tangente liegen.

31 Der Umkreis von ABC

Der Punkt $P=(x:y:z)$ liegt genau dann auf dem Umkreis[13], wenn P zusammen mit A, B und C ein Sehnenviereck bildet, und das ist genau dann der Fall, wenn der Satz des Claudius PTOLEMÄUS (etwa 100 – etwa 160) gilt:

[13] Ermittlung der Gleichung nach E. A. Weiss (1941): Metrik in Dreieckskoordinaten. In: Jahresbericht der DMV.

Sind b und b‘ die beiden Diagonalen, so muss $b\cdot b'=c\cdot c'+a\cdot a'$ sein. Wegen

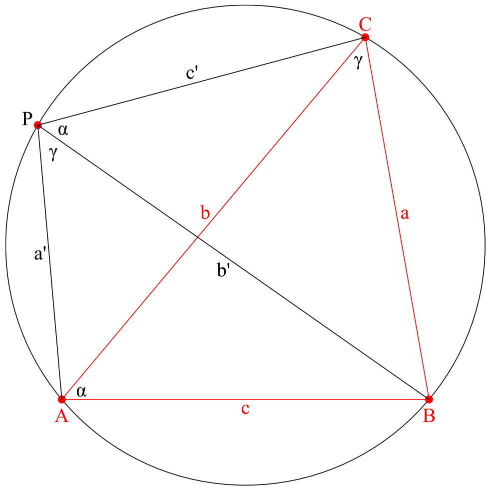
$$P=(x:y:z)=(PBC:PCA:PAB)$$

gelten die Beziehungen

$$x=\frac{PBC}{ABC}=\frac{b'\cdot c'\cdot\sin\alpha}{b\cdot c\cdot\sin\alpha}=\frac{b'\cdot c'}{b\cdot c};$$

$$y=\frac{PCA}{ABC}=-\frac{c'\cdot a'\cdot\sin(\alpha+\gamma)}{c\cdot a\cdot\sin\beta}=-\frac{c'\cdot a'}{c\cdot a}$$

$$z=\frac{PAB}{ABC}=\frac{a'\cdot b'\cdot\sin\gamma}{a\cdot b\cdot\sin\gamma}=\frac{a'\cdot b'}{a\cdot b}$$



Damit ist aufgrund des Satzes von PTOLEMÄUS

$$\begin{aligned} a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y &= -\frac{c'\cdot a'}{c}\cdot\frac{a'\cdot b'}{b}+\frac{a'\cdot b'}{a}\cdot\frac{b'\cdot c'}{c}-\frac{b'\cdot c'}{b}\cdot\frac{c'\cdot a'}{a} \\ &= \frac{a'\cdot b'\cdot c'}{a\cdot b\cdot c}\cdot(-a'\cdot a+b'\cdot b+c'\cdot c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nun hat man die Gleichung für den Umkreis gefunden; mit

$$\boxed{Um(P):=a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y}$$

lautet sie

$$\boxed{Um(P)=0}\,.$$

Für Punkte innerhalb des Umkreises ist $Um(P)>0$, für Punkte außerhalb ist $Um(P)<0$.

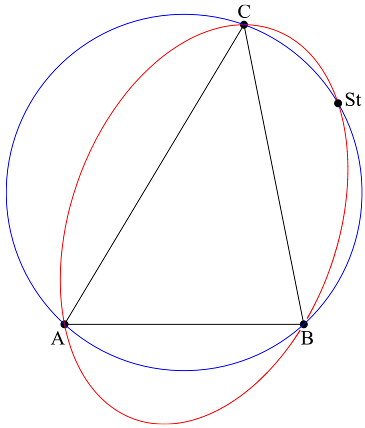
(Dies sieht man am Fernpunkt $P=(0:1:-1)$, für den $Um(P)=-a^2<0$ ist, und für den stets im Umkreis liegenden Seitenhalbierendenschnittpunkt $S=(1:1:1)$, für den $Um(P)=a^2+b^2+c^2>0$ ist. Da $Um(P)$ nur auf dem Umkreis verschwindet, liefert ein Stetigkeitsargument die gewünschte Aussage.)

Die Funktion Um wird später bei der Abstandsbestimmung eine wichtige Rolle spielen.

Die Gleichung des Umkreises schreibt sich auch als

$$(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix}0 & c^2 & b^2\\ c^2 & 0 & a^2\\ b^2 & a^2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=0.$$

31.1 Der STEINER-Punkt St = X99



Der (blaue) Umkreis hat die Gleichung

$a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y=0$,

die (rote) Um-Ellipse nach STEINER hat die Gleichung $y\cdot z+z\cdot x+x\cdot y=0$.

Beide Kurven schneiden einander in A, B, C und dem STEINER-Punkt

$$\boxed{St=\left(\frac{1}{b^2-c^2}:\frac{1}{c^2-a^2}:\frac{1}{a^2-b^2}\right)}=X99.$$

Dieser existiert nicht für gleichseitige Dreiecke, und für $a=b$ bekommt man den Punkt C.

31.2 Umkreispunkt und Ferngerade

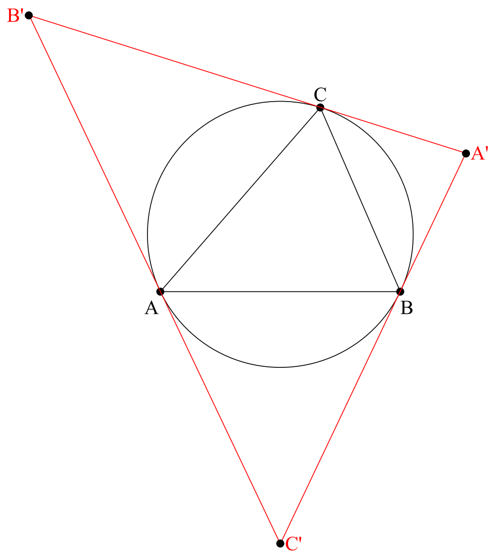
Betrachtet man zu $P=(u:v:w)$ für $u\cdot v\cdot w\neq 0$ den isogonal konjugierten Punkt $(u^*:v^*:w^*)=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)$, so liegt P genau dann auf dem Umkreis, wenn $\boxed{u^*+v^*+w^*=0}$ liegt.

Der zu P isogonal konjugierte Punkt liegt also auf der *Ferngeraden*.
Ferngerade und Umkreis sind mithin zueinander isogonal konjugiert.

31.3 Umkreistangenten und die LEMOINE-Gerade

Mit der zu $\mathrm{Um}(P)=a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y=\frac{1}{2}\cdot(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix}0&c^2&b^2\\c^2&0&a^2\\b^2&a^2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

gehörigen Umkreis-Matrix $\Sigma=\begin{pmatrix}0&c^2&b^2\\c^2&0&a^2\\b^2&a^2&0\end{pmatrix}$ kann man einige *Tangenten* berechnen:



Die Umkreis-Tangenten durch A, B und C sind

$$\left\{\begin{array}{l}A\cdot\Sigma=\left[0:c^2:b^2\right]\\B\cdot\Sigma=\left[c^2:0:a^2\right]\\C\cdot\Sigma=\left[b^2:a^2:0\right]\end{array}\right\}$$

und schneiden einander in $A'=\left(-a^2:b^2:c^2\right)$ usf., den harmonisch konjugierten Punkten des GREBE-LEMOINE-Punktes $\Gamma=(a^2:b^2:c^2)$.

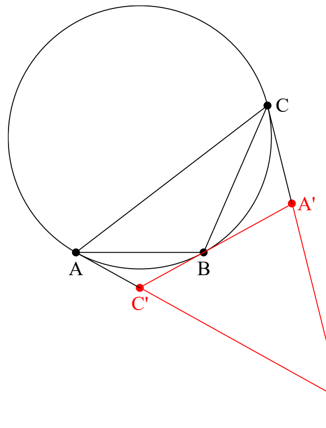
A'B'C' heißt *Tangentendreieck* von ABC.

Es ist unmittelbar klar, dass für spitzwinklige Dreiecke ABC der Umkreis von ABC identisch ist mit dem Inkreis von A'B'C'. Insbesondere ist $M_{ABC}=W_{A'B'C'}$.

Die Ecktransversalen AA', BB' und CC' sind kopunktal in $\Gamma=\left(a^2:b^2:c^2\right)$.

Ist ABC stumpfwinkig, so ist M_{ABC} Mittelpunkt eines Ankreises von A'B'C'.

Ist ABC rechtwinkig, so sind zwei Umkreistangenten zueinander parallel.

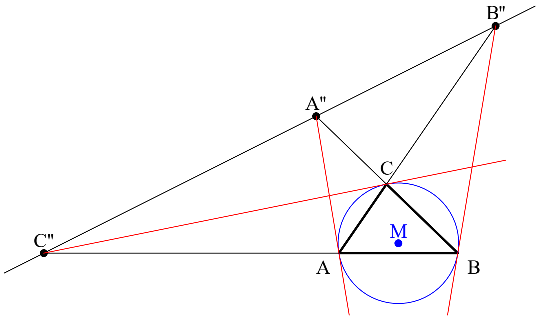


Die Schnittpunkte der Tangenten mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten sind

$$A''=\left(0:b^2:-c^2\right)$$

$$B''=\left(-a^2:0:c^2\right)$$

$$C''=\left(a^2:-b^2:0\right)$$



Wie bei jeder ABC-Quadrik sind diese kollinear auf $\left[\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}\right]$, der harmonischen Polaren von Γ. Diese Gerade wird nach LEMOINE und mitunter auch nach HESSE benannt.

31.4 Punkte auf dem Umkreis

Mit der Umkreisgleichung lassen sich einige *Punkte* berechnen:

Liegt $P=(u:v:w)$ auf dem Umkreis, gilt $a^2\cdot v\cdot w+b^2\cdot w\cdot u+c^2\cdot u\cdot v=0$.

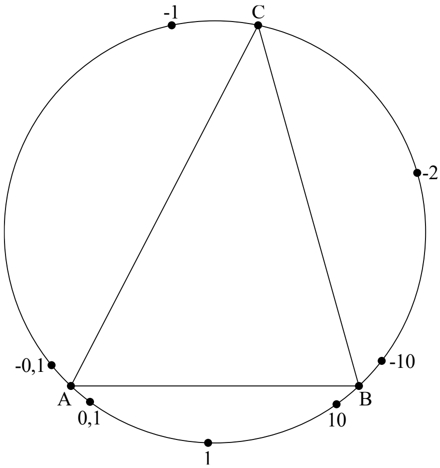
Ist $u=0$, so ist $v=0$ oder $w=0$. Sei also o.B.d.A. $u=1$.

Dann ist $w=-\dfrac{c^2\cdot v}{a^2\cdot v+b^2}$, und ein beliebiger Umkreis-Punkt hat

mit $f(v)=\dfrac{c^2\cdot v}{a^2\cdot v+b^2}$ die Form

$$K(v)=(1:v:-f(v))$$
$$=\left(a^2\cdot v+b^2 : v\cdot\left(a^2\cdot v+b^2\right) : -c^2\cdot v\right)$$

mit $K(0)=A$ und $K\left(-\dfrac{b^2}{a^2}\right)=C$.



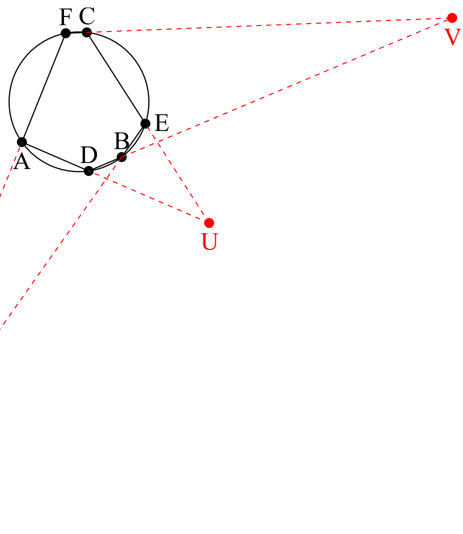
Die Graphik zeigt, die Lage einiger Punkte K(v).

Ferner ist

$$K\left(\frac{1}{v}\right)=\left(a^2\cdot\frac{1}{v}+b^2 : \frac{1}{v}\cdot\left(a^2\cdot\frac{1}{v}+b^2\right) : -c^2\cdot\frac{1}{v}\right)$$
$$=\left(a^2\cdot v+b^2\cdot v^2 : a^2+b^2\cdot v : -c^2\cdot v\right)\xrightarrow{v\to 0}\left(0 : a^2 : 0\right)=B$$

31.5 Der Satz von Pascal

Mit $f(v)=\dfrac{c^2\cdot v}{a^2\cdot v+b^2}$ ist $K(v)=(1:v:-f(v))$ ein typischer Punkt des Umkreises.



Mit

$$D=K(u)=(1:u:-f(u))$$
$$E=K(v)=(1:v:-f(v))$$
$$F=K(w)=(1:w:-f(w))$$

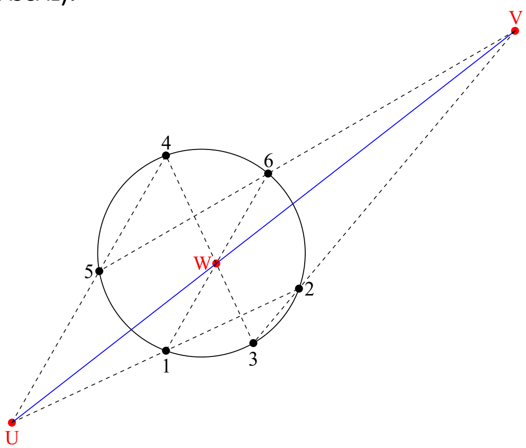
ist

$$AD=[0:f(u):u];\ AF=[0:f(w):w]$$
$$BD=[f(u):0:1];\ BE=[f(v):0:1]$$
$$CE=[-v:1:0];\ CF=[-w:1:0]$$

und

$$U=AD\cap CE=(u:u\cdot v:-v\cdot f(u))$$
$$V=FC\cap DB=(1:w:-f(u))$$
$$W=AF\cap BE=(f(w):w\cdot f(v):-f(v)\cdot f(w))$$

U, V, W sind kollinear (Satz von PASCAL).
Da die Begründung unabhängig ist von der Wahl von u, v und w, gilt der Satz auch dann, wenn die Punkte nicht konsekutiv liegen.



Diese Kollinearität besteht auch, wenn man statt mit $f(v)=\frac{c^2\cdot v}{a^2\cdot v+b^2}$ mit $f(v)=\frac{t\cdot v}{r\cdot v+s}$ gearbeitet hätte, wenn man also nicht vom Umkreis, sondern von einem beliebigen Kegelschnitt durch A, B, C ausgegangen wäre. Dahinter steckt natürlich, dass jeder Kegelschnitt projektives Bild eines Kreises ist und dass bei projektiven Abbildungen die Kollinearität erhalten bleibt.

31.6 Die Sätze vom Südpol und vom Nordpol

Die Winkelhalbierende $CW=[-b:a:0]$ und die Mittelsenkrechte

$$\begin{aligned} m_c &= [\sin(2\cdot\gamma):-\sin(2\cdot\gamma):\sin(2\cdot\beta)-\sin(2\cdot\alpha)] \\ &= [c^2\cdot\cos\gamma:-c^2\cdot\cos\gamma:b\cdot c\cdot\cos\beta-a\cdot c\cdot\cos\alpha] \\ &= [c^2\cdot\cos\gamma:-c^2\cdot\cos\gamma:b\cdot(a-b\cdot\cos\gamma)-a\cdot(b-a\cdot\cos\gamma)] \\ &= [c^2:-c^2:a^2-b^2] \end{aligned}$$

zu c schneiden sich im gemeinhin „Südpol“ genannten Punkt

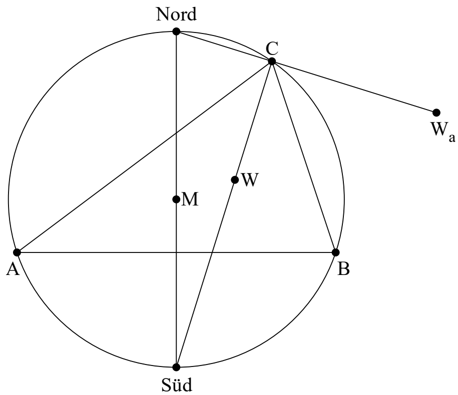
$$\boxed{\text{Süd}=(a\cdot(a+b):b\cdot(a+b):-c^2)}\,.$$

Dieser Punkt liegt auf dem Umkreis, wie eine kurze Rechnung zeigt.

Es gilt auch: Die Außenwinkelhalbierende $CW_a=[b:a:0]$ und die Mittelsenkrechte $m_c=[c^2:-c^2:a^2-b^2]$ zu c schneiden sich im Punkt

$$\boxed{\text{Nord}=(-a\cdot(-a+b):b\cdot(-a+b):-c^2)}\,,$$

der auch auf dem Umkreis liegt. Da er diametral zu Süd liegt, kann man ihn als „Nordpol“ bezeichnen. Er entsteht aus Süd, indem man a durch $-a$ (oder b durch $-b$) ersetzt.



31.7 Die imaginären Kreispunkte, die Kreisgleichung und Tangenten

Die Schnittpunkte des Umkreises mit der Ferngeraden ergeben sich aus der Schnittgleichung, wenn man etwa $u=1$ und $w=-1-v$ setzt:

$$a^2\cdot v\cdot(-1-v)+b^2\cdot(-1-v)+c^2\cdot v=0\,;$$

die beiden Lösungen sind

$$v=\frac{c^2-a^2-b^2\pm\sqrt{-\sigma\cdot\sigma_a\cdot\sigma_b\cdot\sigma_c}}{2\cdot a^2}=\frac{-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\pm 4\cdot i\cdot\Delta}{2\cdot a^2}$$
$$=\frac{-b\cdot\cos\gamma\pm i\cdot b\cdot\sin\gamma}{a}=-\frac{b}{a}\cdot e^{\mp i\cdot\gamma}$$

und führen wegen

$$w=-1-v=\frac{-a+b\cdot\cos\gamma\mp i\cdot b\cdot\sin\gamma}{a}=\frac{-c\cdot\cos\beta\mp i\cdot c\cdot\sin\beta}{a}=-\frac{c}{a}\cdot e^{\pm i\cdot\beta}$$

zu den beiden von Jean-Victor PONCELET (1788 – 1867) gefundenen *imaginären Kreispunkten*

$$\boxed{K^{\pm}=\left(-a:b\cdot e^{\mp i\cdot\gamma}:c\cdot e^{\pm i\cdot\beta}\right)}.$$

Die beiden Punkte liegen tatsächlich auf der Ferngeraden wegen

$$a=b\cdot\left(\cos\gamma\mp i\cdot\sin\gamma\right)+c\cdot\left(\cos\beta\pm i\cdot\sin\beta\right).$$

Mit $Um(P):=a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y$ ist

$$Um\left(K^{\pm}\right)=x\cdot y\cdot z\cdot\left(-a+\frac{b}{e^{\mp i\cdot\gamma}}+\frac{c}{e^{\pm i\cdot\beta}}\right)=x\cdot y\cdot z\cdot\left(-a+b\cdot e^{\pm i\cdot\gamma}+c\cdot e^{\mp i\cdot\beta}\right)$$
$$=x\cdot y\cdot z\cdot\left(-a+b\cdot\left(\cos\gamma\pm i\cdot\sin\gamma\right)+c\cdot\left(\cos\beta\mp i\cdot\sin\beta\right)\right)=0$$

Man weiß aus der „cartesischen projektiven Geometrie“, dass *__alle__* Kreise (und *__nur__* die Kreise) die Form $x^2+y^2+A\cdot x+B\cdot y=C$ bzw. $x^2+y^2+A\cdot x\cdot z+B\cdot y\cdot z=C\cdot z^2$ haben und somit durch die beiden (*nicht* in baryzentrischen Koordinaten ausgedrückten) imaginären Kreispunkte $\left(1:\pm i:0\right)$ gehen. Mit $K^{\pm}=\left(-a:b\cdot e^{\mp i\cdot\gamma}:c\cdot e^{\pm i\cdot\beta}\right)$ hat man die beiden imaginären Kreispunkte in baryzentrischen Koordinaten gefunden.
Die Bevorzugung der ersten Koordinate ist nur scheinbar; wegen $e^{i\cdot\beta}\cdot e^{i\cdot\gamma}=-e^{-i\cdot\alpha}$ gilt etwa

$$K^{\pm}=\left(-a:b\cdot e^{\mp i\cdot\gamma}:c\cdot e^{\pm i\cdot\beta}\right)=\left(a\cdot e^{\pm i\cdot\gamma}:-b:-c\cdot e^{\pm i\cdot\beta}\cdot e^{\pm i\cdot\gamma}\right)$$
$$=\left(a\cdot e^{\pm i\cdot\gamma}:-b:c\cdot e^{\mp i\cdot\alpha}\right).$$

Eine andere Darstellung der Kreispunkte ist

$$K^{\pm}=\left(-2\cdot a^2:2\cdot a\cdot b\cdot(\cos\gamma\mp i\cdot\sin\gamma):2\cdot a\cdot c\cdot(\cos\beta\pm i\cdot\sin\beta)\right)$$
$$=\boxed{\left(-2\cdot a^2:\Sigma_c\mp i\cdot 4\cdot\Delta:\Sigma_b\pm i\cdot 4\cdot\Delta\right)=K^{\pm}}.$$

Die beiden imaginären Kreispunkte sind zueinander isogonal konjugiert, da mit $P^{\#}=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)$ als isogonalem Konjugat von $P=(u:v:w)$ die folgende Beziehung gilt:

$$\left(K^{+}\right)^{\#}=\left(\frac{a^2}{-a}:\frac{b^2}{b\cdot e^{-i\cdot\gamma}}:\frac{c^2}{c\cdot e^{+i\cdot\beta}}\right)=\left(-a:b\cdot e^{+i\cdot\gamma}:c\cdot e^{-i\cdot\beta}\right)=K^{-}.$$

Insbesondere ist eine Quadrik genau dann ein Kreis, wenn sie durch die beiden imaginären Kreispunkte verläuft. Ein ***allgemeiner Kreis*** hat demnach mit $\mathrm{Um}(P)=a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y$ die Gleichung

$$\boxed{\mathrm{Um}(P)=(x+y+z)\cdot(\kappa\cdot x+\lambda\cdot y+\mu\cdot z)}\ .$$

Eine andere Form der Kreisgleichung ist

$$0=\kappa\cdot x^2+\lambda\cdot y^2+\mu\cdot z^2+\left(\lambda+\mu-a^2\right)\cdot y\cdot z+\left(\mu+\kappa-b^2\right)\cdot z\cdot x+\left(\kappa+\lambda-c^2\right)\cdot x\cdot y$$

$$=(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix}\kappa & \frac{\kappa+\lambda-c^2}{2} & \frac{\mu+\kappa-b^2}{2}\\ \frac{\kappa+\lambda-c^2}{2} & \lambda & \frac{\lambda+\mu-a^2}{2}\\ \frac{\mu+\kappa-b^2}{2} & \frac{\lambda+\mu-a^2}{2} & \mu\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Die *Tangente* im Kreispunkt $(u:v:w)$ ist

$$(u:v:w)\cdot\begin{pmatrix}\kappa & \frac{\kappa+\lambda-c^2}{2} & \frac{\mu+\kappa-b^2}{2}\\ \frac{\kappa+\lambda-c^2}{2} & \lambda & \frac{\lambda+\mu-a^2}{2}\\ \frac{\mu+\kappa-b^2}{2} & \frac{\lambda+\mu-a^2}{2} & \mu\end{pmatrix}.$$

31.8 Die imaginären Kreispunkte für gleichseitige Dreiecke

Ist das Ausgangs-Dreieck ABC gleichseitig, so ist

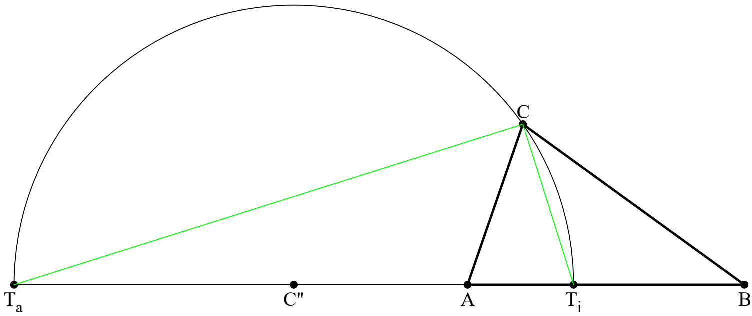
$$K^{\pm}=\left(-a:b\cdot e^{\mp i\cdot\gamma}:c\cdot e^{\pm i\cdot\beta}\right)=\left(1:-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}:-\frac{1}{2}\mp i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Mit den dritten Einheitswurzeln $\zeta = \frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$, $\zeta^2 = \frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$ bekommt man dann

$$K^+ = \left(1 : \zeta : \zeta^2\right),\ K^- = \left(1 : \zeta^2 : \zeta\right).$$

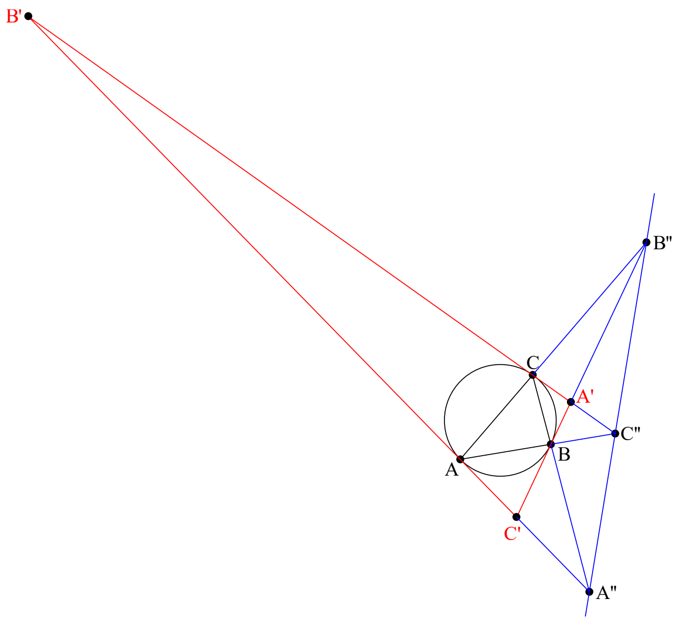
32 Apollonius-Kreise

Die Innen- und die dazu rechtwinklig verlaufende Außen-Winkelhalbierende zu γ schneiden c in $T_i = \left(a : b : 0\right)$ und in $T_a = \left(-a : b : 0\right)$. Deren Mittelpunkt ist C''. Der zugehörige APOLLONIUS-Kreis ist THALES-Kreis über T_aT_i.



32.1 Andere Deutung der APOLLONIUS-Kreis-Zentren

Man bekommt A'', B'', C'' auch als Schnittpunkte von A'B' mit AB usw.:



32.2 Die beiden isodynamischen Punkte X15 und X16

Einer der APOLLONIUS-Kreise verläuft durch

$C=(0:0:1)$, $T_i=(a:b:0)$, $T_a=(-a:b:0)$, seine Gleichung ist

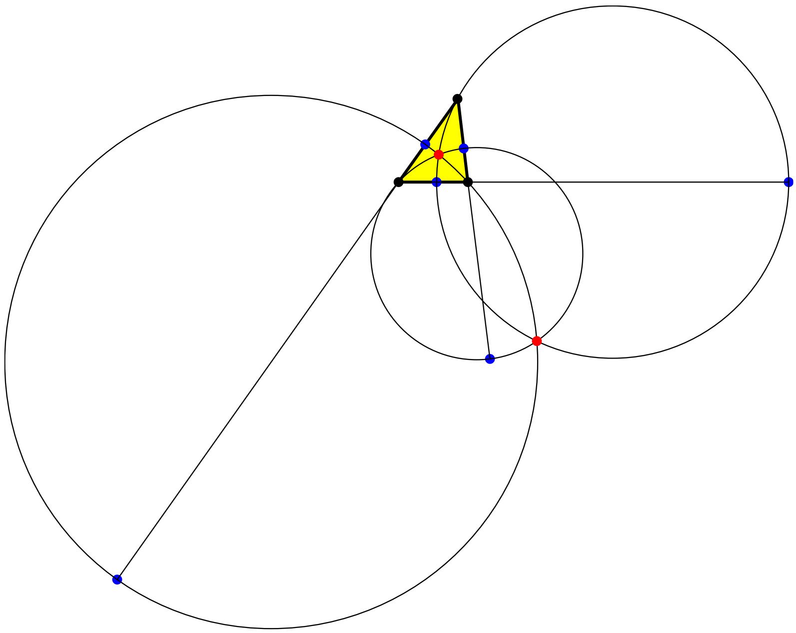
$$(a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y)\cdot\frac{b^2-a^2}{c^2}=(x+y+z)\cdot\left(b^2\cdot x-a^2\cdot y\right).$$

Die drei APOLLONIUS-Kreise schneiden sich in den beiden isodynamischen

Punkten $\boxed{X15=\left(a\cdot\sin(\alpha+60^\circ):b\cdot\sin(\beta+60^\circ):c\cdot\sin(\gamma+60^\circ)\right)}$ und

$\boxed{X16=\left(a\cdot\sin(\alpha-60^\circ):b\cdot\sin(\beta-60^\circ):c\cdot\sin(\gamma-60^\circ)\right)}$, die zu X13 und X14 isogonal konjugiert sind.

In der folgenden Graphik sind die Teilungspunkte blau und die beiden isodynamischen Punkte rot markiert.



33 Der Inkreis und der A-Ankreis von ABC

Der Inkreis geht durch $A'=(0:\sigma_c:\sigma_b)$, $B'=(\sigma_c:0:\sigma_a)$, $C'=(\sigma_b:\sigma_a:0)$.

Einsetzen in

$$a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y=(x+y+z)\cdot(\kappa\cdot x+\lambda\cdot y+\mu\cdot z)$$

führt auf

$$a\cdot\sigma_c\cdot\sigma_b=2\cdot(\lambda\cdot\sigma_c+\mu\cdot\sigma_b)$$
$$b\cdot\sigma_a\cdot\sigma_c=2\cdot(\kappa\cdot\sigma_c+\mu\cdot\sigma_a)$$
$$c\cdot\sigma_b\cdot\sigma_a=2\cdot(\kappa\cdot\sigma_b+\lambda\cdot\sigma_a)$$

mit der Lösung

$$\kappa=\frac{\sigma_a^2}{4};\quad \lambda=\frac{\sigma_b^2}{4};\quad \mu=\frac{\sigma_c^2}{4}$$

und der Inkreisgleichung

$$\boxed{Um(P)=(x+y+z)\cdot\left(\frac{\sigma_a^2}{4}\cdot x+\frac{\sigma_b^2}{4}\cdot y+\frac{\sigma_c^2}{4}\cdot z\right)}$$

bzw. nach leichter Rechnung

$$\boxed{(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix}-\sigma_a^2 & \sigma_a\cdot\sigma_b & \sigma_c\cdot\sigma_a\\ \sigma_a\cdot\sigma_b & -\sigma_b^2 & \sigma_b\cdot\sigma_c\\ \sigma_c\cdot\sigma_a & \sigma_b\cdot\sigma_c & -\sigma_c^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0}.$$

Die *Tangente* im Inkreispunkt $(u:v:w)$ ist daher

$$\left[\sigma_a\cdot(-\sigma_a\cdot u+\sigma_b\cdot v+\sigma_c\cdot w):\ldots:\ldots\right].$$

Der A gegenüber liegende Ankreis geht durch

$$A'=(0:\sigma_b:\sigma_c),\ B'=(-\sigma_b:0:\sigma),\ C'=(-\sigma_c:\sigma:0).$$

Einsetzen in die Kreisgleichung führt auf

$$\kappa=\frac{\sigma^2}{4};\quad \lambda=\frac{\sigma_c^2}{4};\quad \mu=\frac{\sigma_b^2}{4}$$

und die A-Ankreisgleichung

$$\boxed{Um(P)=(x+y+z)\cdot\left(\frac{\sigma^2}{4}\cdot x+\frac{\sigma_c^2}{4}\cdot y+\frac{\sigma_b^2}{4}\cdot z\right)}$$

bzw.

$$\boxed{(x:y:z)\cdot\begin{pmatrix}\sigma^2 & \sigma\cdot\sigma_c & \sigma\cdot\sigma_b\\ \sigma\cdot\sigma_c & \sigma_c^2 & -\sigma_b\cdot\sigma_c\\ \sigma\cdot\sigma_b & -\sigma_b\cdot\sigma_c & \sigma_b^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0}$$

mit der A-Ankreis-Tangente

$$\left[\sigma\cdot(\sigma\cdot u+\sigma_c\cdot v+\sigma_b\cdot w):\sigma_c\cdot(\sigma_c\cdot v+\sigma\cdot u-\sigma_b\cdot w):\sigma_b\cdot(\sigma_b\cdot w+\sigma\cdot u-\sigma_c\cdot v)\right].$$

34 Der CLAWSON-Punkt Cl = X19

Mit

$$\mathrm{Um}(P) = a^2 \cdot y \cdot z + b^2 \cdot z \cdot x + c^2 \cdot x \cdot y$$

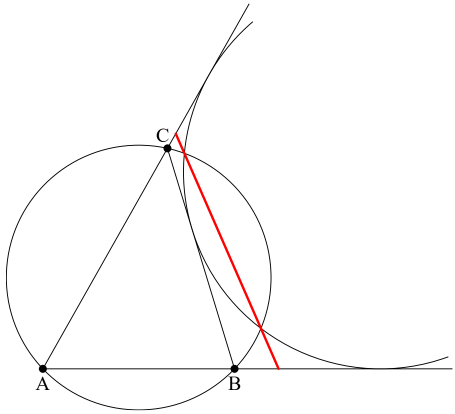
gilt:

Der Umkreis hat die Gleichung

$$\mathrm{Um}(P) = 0 .$$

Der A-Ankreis hat die Gleichung

$$\mathrm{Um}(P) = (x+y+z) \cdot \left(\frac{\sigma^2}{4} \cdot x + \frac{\sigma_c^2}{4} \cdot y + \frac{\sigma_b^2}{4} \cdot z \right)$$



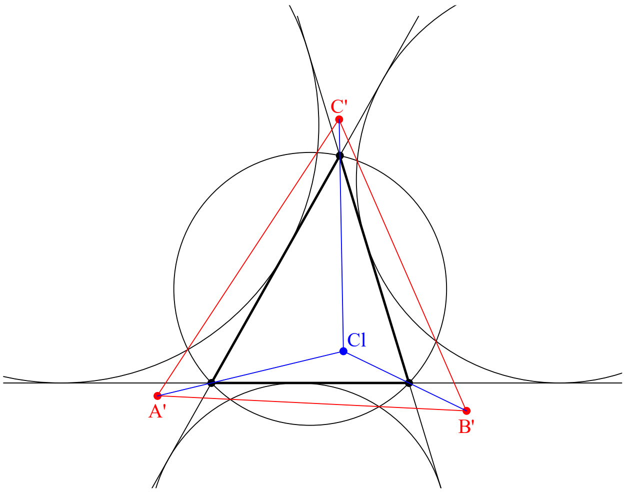
Die Chordale von Umkreis und A-Ankreis ist

$$\chi_A = \left[\sigma^2 : \sigma_c^2 : \sigma_b^2 \right].$$

Die Chordalen von B-Ankreis und Umkreis sowie von C-Ankreis und Umkreis sind

$$\chi_B = \left[\sigma_c^2 : \sigma^2 : \sigma_a^2 \right]$$

$$\chi_C = \left[\sigma_B^2 : \sigma_A^2 : \sigma^2 \right]$$



Die rotenChordalen schneiden einander in

$$A' = \left(\sigma^4 - \sigma_a^4 : \sigma_a^2 \cdot \sigma_b^2 - \sigma^2 \cdot \sigma_c^2 : \sigma_a^2 \cdot \sigma_c^2 - \sigma^2 \cdot \sigma_b^2 \right)$$

$$B' = \left(\sigma_b^2 \cdot \sigma_a^2 - \sigma^2 \cdot \sigma_c^2 : \sigma^4 - \sigma_b^4 : \sigma_b^2 \cdot \sigma_c^2 - \sigma^2 \cdot \sigma_a^2 \right)$$

$$C' = \left(\sigma_c^2 \cdot \sigma_a^2 - \sigma^2 \cdot \sigma_b^2 : \sigma_c^2 \cdot \sigma_b^2 - \sigma^2 \cdot \sigma_a^2 : \sigma^4 - \sigma_c^4 \right)$$

Die blauen Ecktransversalen

$$AA'=\left[0:-\left(\sigma_a^2\cdot\sigma_c^2-\sigma^2\cdot\sigma_b^2\right):\sigma_a^2\cdot\sigma_b^2-\sigma^2\cdot\sigma_c^2\right]$$
$$=\left[0:c\cdot\Sigma_b:-b\cdot\Sigma_c\right]=\left[0:c\cdot\tan\gamma:-b\cdot\tan\beta\right]$$
$$BB'=\left[-\left(\sigma_b^2\cdot\sigma_c^2-\sigma^2\cdot\sigma_a^2\right):0:\sigma_b^2\cdot\sigma_a^2-\sigma^2\cdot\sigma_c^2\right]$$
$$=\left[c\cdot\Sigma_a:0:-a\cdot\Sigma_c\right]=\left[c\cdot\tan\gamma:0:-a\cdot\tan\alpha\right]$$

schneiden einander in $\boxed{Cl:=\left(a\cdot\tan\alpha : b\cdot\tan\beta : c\cdot\tan\gamma\right)}=X19$; aus Symmetriegründen verläuft auch CC‘ durch Cl. Dieser Punkt wird nach John Wentworth CLAWSON (1881-1964) benannt.

34.1 Der C-Begleiter des CLAWSON-Punkts

Die Chordale zweier Kreise existiert auch, wenn sich die beiden Kreise gar nicht schneiden. So haben auch Um- und Inkreis eine Chordale.

Die Chordale von Umkreis und A-Ankreis ist $\left[\sigma^2:\sigma_c^2:\sigma_b^2\right]$, die von Umkreis und B-Ankreis ist $\left[\sigma_c^2:\sigma^2:\sigma_a^2\right]$, die von Umkreis und Inkreis ist $\left[\sigma_a^2:\sigma_b^2:\sigma_c^2\right]$.

Die ersten beiden Chordalen schneiden sich in

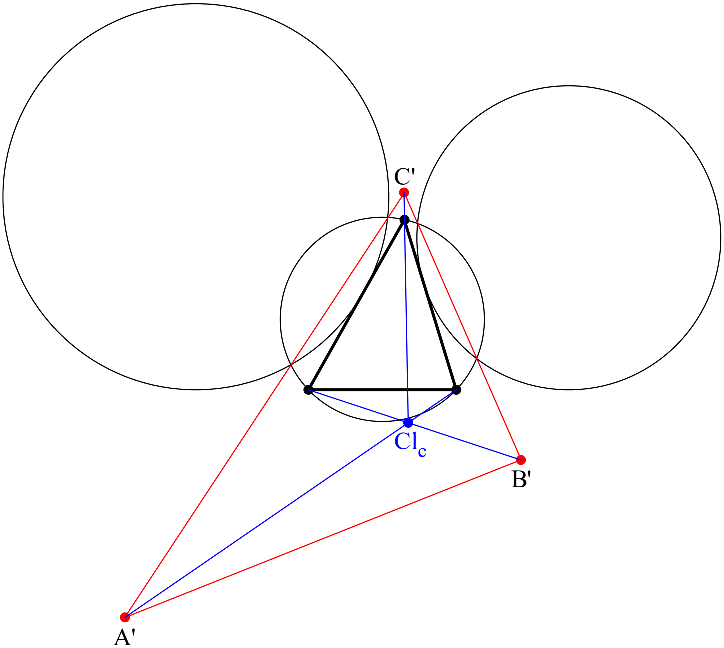
$C'=\left(a\cdot\Sigma_b : b\cdot\Sigma_a : (a+b)\cdot(\Sigma+2\cdot a\cdot b)\right)$.

Die erste und die letzte Chordale schneiden sich in

$B'=\left((b-c)\cdot(\Sigma-2\cdot b\cdot c) : -b\cdot\Sigma_c : c\cdot\Sigma_b\right)$.

Die beiden letzten Chordalen schneiden sich in

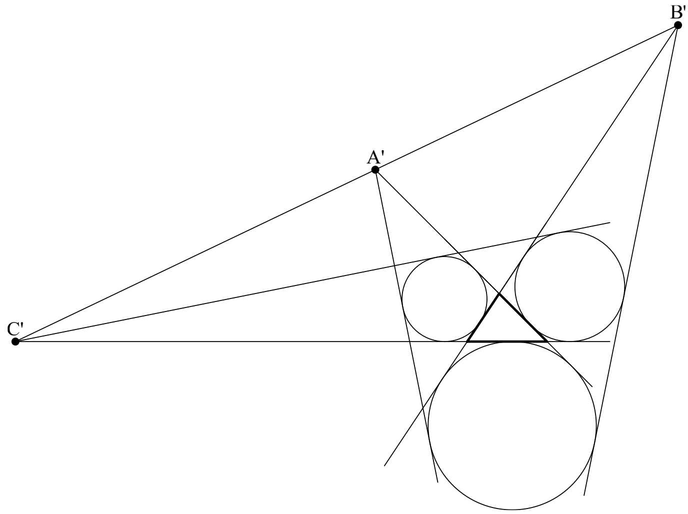
$A'=\left(-a\cdot\Sigma_c : (a-c)\cdot(\Sigma-2\cdot c\cdot a) : c\cdot\Sigma_a\right)$.



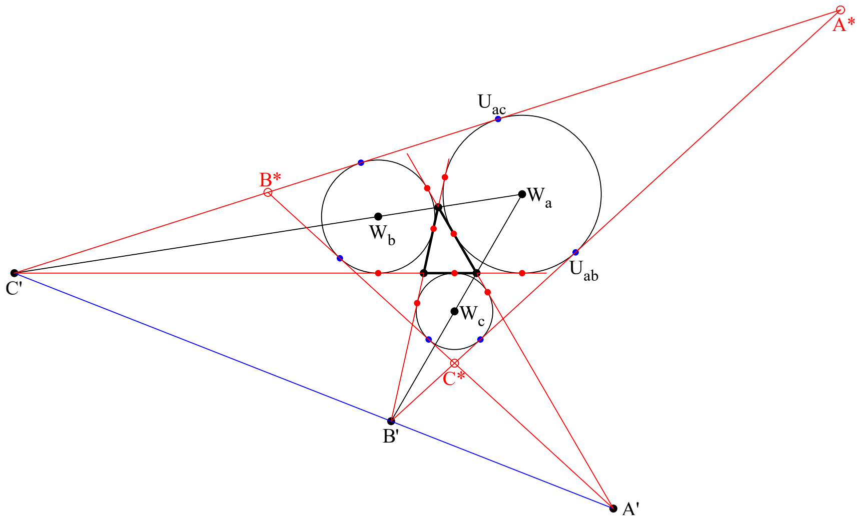
Dann gilt $CC'=[-b\cdot\Sigma_a:a\cdot\Sigma_b:0]=[-b\cdot\cot\alpha:a\cdot\cot\beta:0]$ und $AB'=[0:c\cdot\Sigma_b:b\cdot\Sigma_c]=[0:c\cdot\cot\beta:b\cdot\cot\gamma]$ sowie $BA'=[c\cdot\Sigma_a:0:a\cdot\Sigma_c]=[c\cdot\cot\alpha:0:a\cdot\cot\gamma]$. Diese drei Geraden sind kopunktal im Punkt $\boxed{CL_c=(a\cdot\tan\alpha:b\cdot\tan\beta:-c\cdot\tan\gamma)}$, dem Begleiter des CLAWSON-Punkts. Er ist zum CLAWSON-Punkt harmonisch konjugiert.

34.2 Drei Ankreise und deren Aussen-Tangenten

Mit ***drei*** Ankreisen bekommt man als Ähnlichkeitszentren drei Punkte $C'=(-a:b:0)$, $B'=(-a:0:c)$, $A'=(0:-b:c)$, die nach dem Satz von MONGE kollinear sind, und zwar in $\left[\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}\right]$, der harmonischen Polaren zu W. In der nachfolgenden Skizze ist das Ausgangsdreieck ABC fett dargestellt.



In der folgenden Graphik sind die roten Punkte die Berührpunkte der Ankreis-zentren. Die blauen Punkte entstehen aus den roten durch spiegelung an den Außen-Winkelhalbierenden des (fett gezeichneten) Dreiecks ABC.



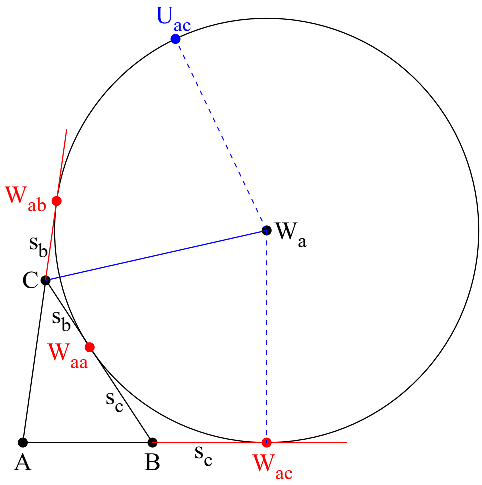
Rechts ist $s_a = \frac{\sigma_a}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$

usw.

Es ist

$$W_a = (-a : b : c)$$
$$W_{aa} = (0 : \sigma_b : \sigma_c)$$
$$W_{ab} = (-\sigma_b : 0 : \sigma)$$
$$W_{ac} = (-\sigma_c : \sigma : 0)$$

U_{ac} entsteht aus W_{ac} durch Spiegelung an CW_a und ist auch der zweite Berührpunkt der Tangente durch $C' = (-a : b : 0)$.



Der Ankreis um W_a hat die Gleichung:

$$Um(P) = (x+y+z)\cdot\left(\frac{\sigma^2}{4}\cdot x + \frac{\sigma_c^2}{4}\cdot y + \frac{\sigma_b^2}{4}\cdot z\right) \text{ bzw.}$$

$$P\cdot\begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma\cdot\sigma_c & \sigma\cdot\sigma_b \\ \sigma\cdot\sigma_c & \sigma_c^2 & -\sigma_b\cdot\sigma_c \\ \sigma\cdot\sigma_b & -\sigma_b\cdot\sigma_c & \sigma_b^2 \end{pmatrix}\cdot P^t = 0$$

. Die Tangente im A-Ankreispunkt $P = (p : q : r)$ ist

$$(p:q:r)\cdot\begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma\cdot\sigma_c & \sigma\cdot\sigma_b \\ \sigma\cdot\sigma_c & \sigma_c^2 & -\sigma_b\cdot\sigma_c \\ \sigma\cdot\sigma_b & -\sigma_b\cdot\sigma_c & \sigma_b^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\sigma\cdot(\sigma\cdot p + \sigma_c\cdot q + \sigma_b\cdot r) : \sigma_c\cdot(\sigma\cdot p + \sigma_c\cdot q - \sigma_b\cdot r) : \sigma_b\cdot(\sigma\cdot p - \sigma_c\cdot q + \sigma_b\cdot r)\right]$$

Soll diese Tangente durch $C' = (-a : b : 0)$ gehen, muss

$$a\cdot\sigma\cdot(\sigma\cdot p + \sigma_c\cdot q + \sigma_b\cdot r) = b\cdot\sigma_c\cdot(\sigma\cdot p + \sigma_c\cdot q - \sigma_b\cdot r)$$

bzw. nach leichter Rechnung

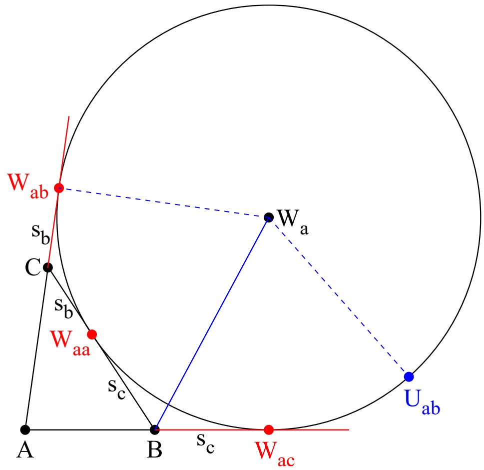
$$\left(p\cdot\sigma+q\cdot\sigma_c\right)+r\cdot\frac{(a+b)^2+c\cdot(a-b)}{a+b}=0$$

gelten. Ist $r=0$, so hat man den Berührpunkt $\left(-\sigma_c:\sigma:0\right)=W_{ac}$.

Für $r\neq 0$ hat man (mit CAS-Hilfe, da P obige Gleichung und die Ankreis-Gleichung erfüllen muss) $\left(-a^2\cdot\sigma:b^2\cdot\sigma_c:(a+b)^2\cdot\sigma_b\right)=U_{ac}$ als zweiten Berührpunkt.

Die Tangente durch C' und U_{ac} hat dann die Form $\left[\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{a+b}\right]$.

Analog wird U_{ab} gebildet als zweiter Berührpunkt der Tangenten von $B'=(-a:0:c)$ aus an den A-Ankreis; man bekommt $U_{ab}=\left(-a^2\cdot\sigma:(a+c)^2\cdot\sigma_c:c^2\cdot\sigma_b\right)$, und die Tangente durch B' und U_{ab} ist $\left[\frac{1}{a}:\frac{1}{a+c}:\frac{1}{c}\right]$.



Die Tangenten $C'U_{ac}$ und $B'U_{ab}$ und analog gebildete Tangentenpaare treffen sich in

$$A^*=\left(-a^2\cdot\sigma:b\cdot(a+c)\cdot\sigma_c:c\cdot(a+b)\cdot\sigma_b\right)$$

$$B^*=\left(a\cdot(b+c)\cdot\sigma_c:-b^2\cdot\sigma:c\cdot(b+a)\cdot\sigma_a\right)$$

$$C^*=\left(a\cdot(c+b)\cdot\sigma_c:b\cdot(c+a)\cdot\sigma_a:-c^2\cdot\sigma\right)$$

Die Höhen-Fußpunkte sind

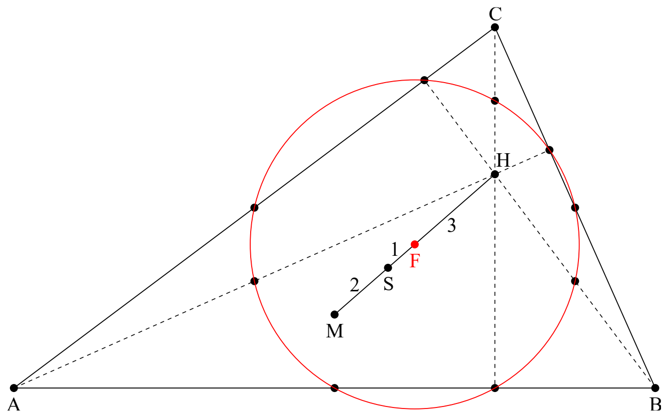
$$H_a=(0:b\cdot\cos\gamma:c\cdot\cos\beta),\ H_b=(a\cdot\cos\gamma:0:c\cdot\cos\alpha),\ H_c=(a\cdot\cos\beta:b\cdot\cos\alpha:0)$$

Mit dem CLAWSON-Punkt $Cl=(a\cdot\tan\alpha:b\cdot\tan\beta:c\cdot\tan\gamma)$ gilt: Die Geraden H_aCl, H_bCl und H_cCl enthalten den CLAWSON-Punkt Cl, wie man mit Hilfe eines CAS nachrechnet. Cl ist also auch Schnittpunkt der Geraden A^*H_a, B^*H_b, C^*H_c.

35 Der 9-Punkte-Kreis

Der (mitunter auch nach EULER oder nach FEUERBACH benannte) 9-Punkte-Kreis geht durch die Seitenmitten $S_1 = (0:1:1)$; $S_2 = (1:0:1)$; $S_3 = (1:1:0)$ und führt daher zur Gleichung $\boxed{\mathrm{Um}(P) = (x+y+z) \cdot \frac{x \cdot \Sigma_a + y \cdot \Sigma_b + z \cdot \Sigma_c}{4}}$.

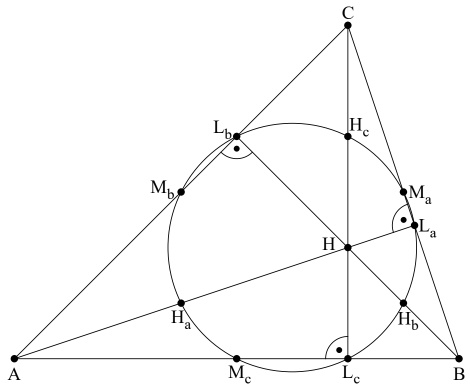
Eine leichte, aber aufwändige Rechnung zeigt, dass auch die Höhenfußpunkte wie etwa $H_1 = (0 : \tan\beta : \tan\gamma)$ und die Punkte $\frac{A+H}{2}, \frac{B+H}{2}, \frac{C+H}{2}$ auf dem FEUERBACH-Kreis liegen.



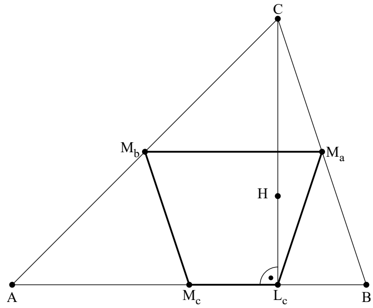
Somit liegen (mindestens) *neun* besondere Punkte auf diesem Kreis.

35.1 Elementargeometrisches zum 9-Punkte-Kreis

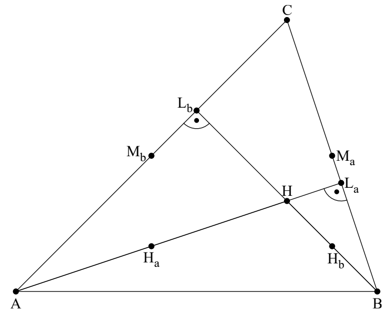
Eine elementar-geometrische Argumentation[14] erfordert für den Nachweis weniger Aufwand, dafür eine Idee. Zunächst die Aussage:
In einem Dreieck liegen die Seitenmitten M_a, M_b, M_c, die Höhenfußpunkte L_a, L_b, L_c und die Mitten H_a, H_b, H_c der längeren Höhenabschnitte auf einem Kreis.



[14] Nach Collet / Griso: Le cercle d'Euler. 1987 Paris: Vuibert, S. 13. Die Idee stammt von WILKINSON (1855).



Beweis, Teil 1:
Wegen $M_aM_b \parallel BA$ ist das fette Viereck ein Trapez.
Ferner ist L_c auf dem THALESkreis über BC und daher ist $\left|L_cM_a\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|BC\right| = \left|M_bM_c\right|$; also ist das Trapez symmetrisch, und L_c liegt zusammen mit M_a, M_b, M_c auf einem Kreis.
Analog verfährt man mit L_b und L_a.



Beweis, Teil 2:
AHBC ist ein Viereck, also ist nach dem Satz von VARIGNON $H_aH_bM_aM_b$ ein Parallelogramm.
Wegen der Strahlensätze ist dies Parallelogramm ein Rechteck. Daher liegen H_a, H_b, M_a, M_b auf einem Kreis.
L_a liegt auf dem THALESkreis über H_aM_a, und L_b liegt auf dem THALESkreis über M_bH_b.
Somit liegen H_a, H_b, M_a, M_b, L_a, L_b auf einem Kreis.

35.2 Der Mittelpunkt K=X5 des 9-Punkte-Kreises

… ist der Mittelpunkt[15] von M und H:

$$\boxed{K := \frac{M+H}{2} = \left(\tau + \tan\alpha : \tau + \tan\beta : \tau + \tan\gamma\right)} = X5 .$$

Oben hat man gesehen, dass $\tau + \tan\gamma = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\beta \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}$ gilt. Daraus folgt für den Mittelpunkt des 9-Punkte-Kreises

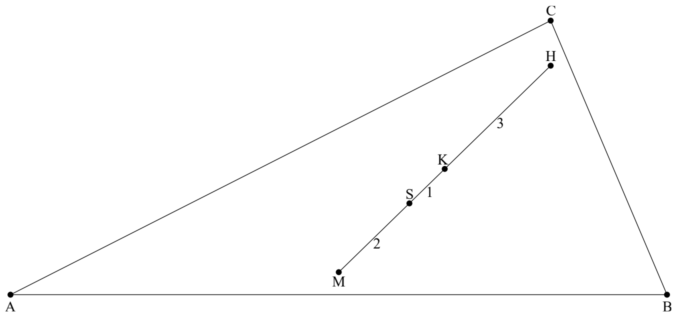
[15] Dessen Bezeichnung K erinnert an den Vornamen von Karl FEUERBACH; „F“ ist schon anderweitig vergeben (s.u.).

$$\boxed{\begin{aligned}K &= \left(\sin(2\cdot\beta)+\sin(2\cdot\gamma) : \sin(2\cdot\gamma)+\sin(2\cdot\alpha) : \sin(2\cdot\alpha)+\sin(2\cdot\beta)\right)\\ &= \eta(M)\end{aligned}}$$

mit der Koeffizientensumme $2\cdot\left(\sin(2\cdot\alpha)+\sin(2\cdot\beta)+\sin(2\cdot\gamma)\right)=\frac{4\cdot\Delta}{R^2}$.

Der 9-Punkte-Kreis hat den Radius R/2. Er berührt den Inkreis und die drei Ankreise (Satz von Karl Wilhelm FEUERBACH (1800 – 1834); nächster Abschnitt).

K liegt natürlich auf der EULER-Geraden.
M und K liegen harmonisch zu S und H.



35.3 Der Berührpunkt F_i = X11 von Inkreis und 9-Punkte-Kreis

Der Inkreis hat die Gleichung $Um(P)=(x+y+z)\cdot\left(\frac{\sigma_a^2}{4}\cdot x+\frac{\sigma_b^2}{4}\cdot y+\frac{\sigma_c^2}{4}\cdot z\right)$, seine *Tangente* im Inkreispunkt $(u:v:w)$ ist $\left[\sigma_a\cdot(-\sigma_a\cdot u+\sigma_b\cdot v+\sigma_c\cdot w):\ldots:\ldots\right]$.

Der 9-Punkte-Kreis hat die Gleichung $Um(P)=(x+y+z)\cdot\frac{x\cdot\Sigma_a+y\cdot\Sigma_b+z\cdot\Sigma_c}{4}$.

Wegen $\sigma_a^2-\Sigma_a=2\cdot a\cdot(a-b-c)+2\cdot b\cdot c=-2\cdot(a\cdot\sigma_a-b\cdot c)$ ist die Chordale

$$\left[\sigma_a^2-\Sigma_a:\sigma_b^2-\Sigma_b:\sigma_c^2-\Sigma_c\right]=\left[a\cdot\sigma_a-b\cdot c:b\cdot\sigma_b-c\cdot a:c\cdot\sigma_c-a\cdot b\right].$$

Sie ist für $\boxed{F_i=\left(\sigma_a\cdot(b-c)^2:\sigma_b\cdot(c-a)^2:\sigma_c\cdot(a-b)^2\right)}=X11$ Inkreis-Tangente, wie man mit Hilfe eines CAS nachprüft.

F_i heißt FEUERBACH-Punkt; er ist mithin der Berührpunkt von Inkreis und 9-Punkte-Kreis.

35.4 Der Berührpunkt von Ankreis und 9-Punkte-Kreis

Der A-Ankreis hat die Gleichung $\mathrm{Um}(P)=(x+y+z)\cdot\left(\frac{\sigma^2}{4}\cdot x+\frac{\sigma_c^2}{4}\cdot y+\frac{\sigma_b^2}{4}\cdot z\right)$,

der 9-Punkte-Kreis hat die Gleichung $\mathrm{Um}(P)=(x+y+z)\cdot\frac{x\cdot\Sigma_a+y\cdot\Sigma_b+z\cdot\Sigma_c}{4}$.

Die Chordale ist

$$\left[\sigma^2-\Sigma_a:\sigma_c^2-\Sigma_b:\sigma_b^2-\Sigma_c\right]=\left[(a+b)\cdot(a+c):(a+b)\cdot(b-c):(a+c)\cdot(c-b)\right]$$

und stimmt für $(u:v:w)=\boxed{F_a=\left(-\sigma\cdot(b-c)^2:\sigma_c\cdot(c+a)^2:\sigma_b\cdot(b+a)^2\right)}$ mit der A-Ankreis-Tangente

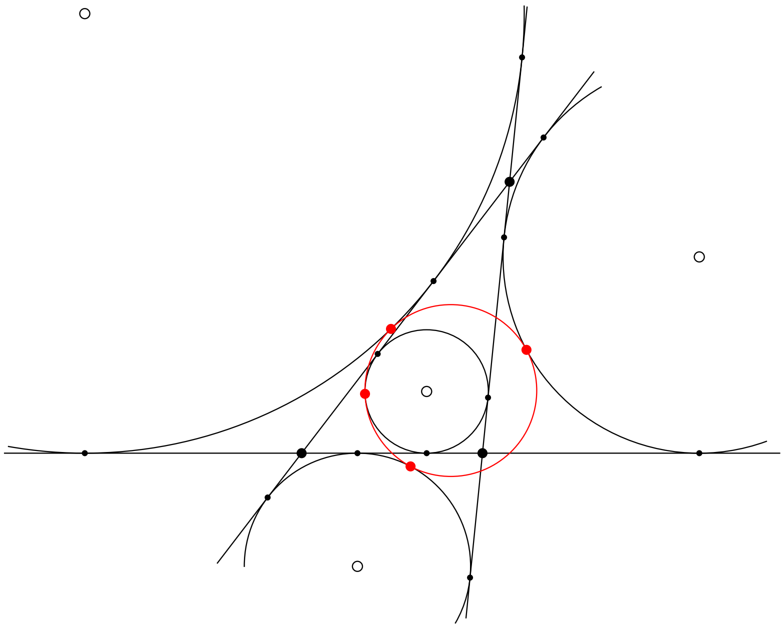
$$\left[\sigma\cdot(\sigma\cdot u+\sigma_c\cdot v+\sigma_b\cdot w):\sigma_c\cdot(\sigma_c\cdot v+\sigma\cdot u-\sigma_b\cdot w):\sigma_b\cdot(\sigma_b\cdot w+\sigma\cdot u-\sigma_c\cdot v)\right]$$

überein, so dass im Punkt F_a Berührung stattfindet.

Analog ist $\boxed{F_b=\left(\sigma_c\cdot(c+b)^2:-\sigma\cdot(c-a)^2:\sigma_a\cdot(a+b)^2\right)}$ der Berührpunkt von B-Ankreis und 9-Punkte-Kreis und $\boxed{F_c=\left(\sigma_b\cdot(b+c)^2:\sigma_a\cdot(a+c)^2:-\sigma\cdot(a-b)^2\right)}$ der Berührpunkt von C-Ankreis und 9-Punkte-Kreis.

In der folgenden Graphik zeigen die Hohlkreise die Mittelpunkte der Berührkreise an, die kleinen schwarzen Punkte zeigen die Berührpunkte mit den Dreiecksseiten.

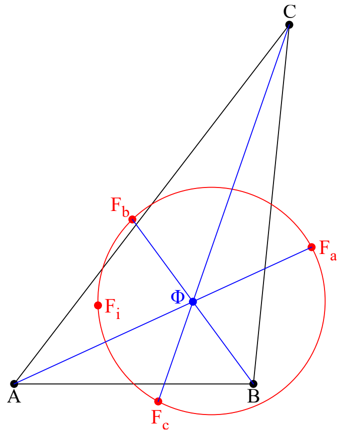
Der 9-Punkte -Kreis ist rot. Die roten Punkte sind die Berührpunkte des 9-Punkte -Kreises mit dem Inkreis bzw. den drei Ankreisen.



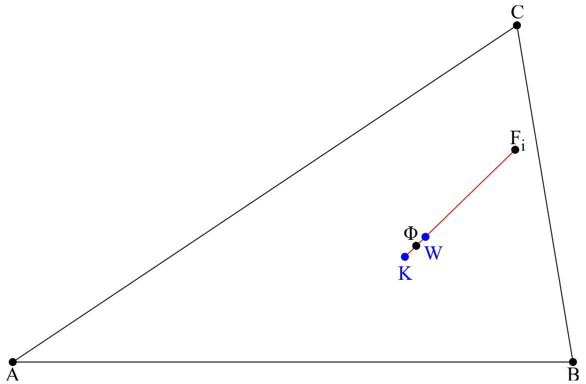
Man rechnet leicht nach, dass die Geraden AF_a, BF_b und CF_c sich im Punkt

$$\boxed{\Phi = \left(\frac{(b+c)^2}{\sigma_a} : \frac{(c+a)^2}{\sigma_b} : \frac{(a+b)^2}{\sigma_c} \right)} = X12$$

schneiden.



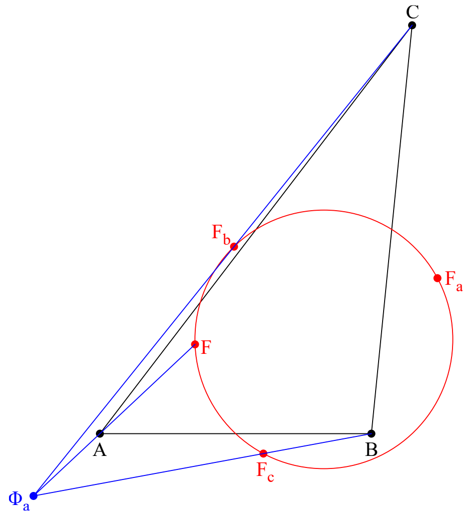
F_i und Φ liegen auf der Geraden durch W und K (und liegen sogar harmonisch zu W und K).



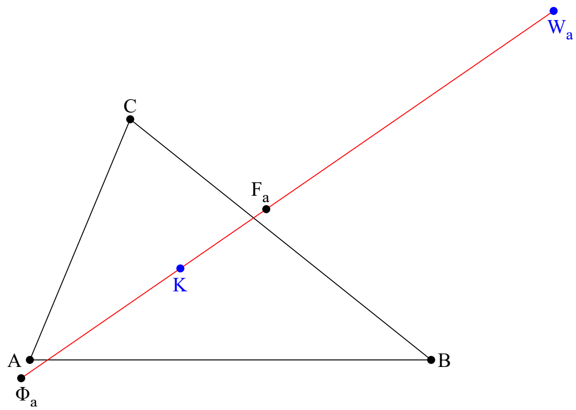
Ebenfalls ist leicht zu sehen, dass sich AF, BF_c und CF_b im Punkt

$$\boxed{\Phi_a = \left(-\frac{(b+c)^2}{\sigma} : \frac{(a-c)^2}{\sigma_c} : \frac{(a-b)^2}{\sigma_b}\right)}$$

schneiden.



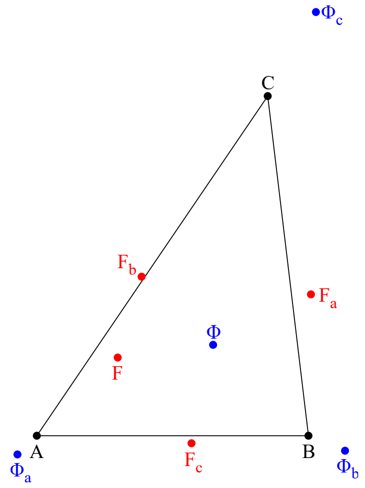
Auch hier sind W_a, K, F_a und Φ_a kollinear.
F_a und Φ_a liegen harmonisch zu W_a und K.



Die analog gebildeten Schnittpunkte sind

$$\Phi_b = \left(\frac{(b-c)^2}{\sigma_c} : -\frac{(c+a)^2}{\sigma} : \frac{(b-a)^2}{\sigma_a} \right)$$

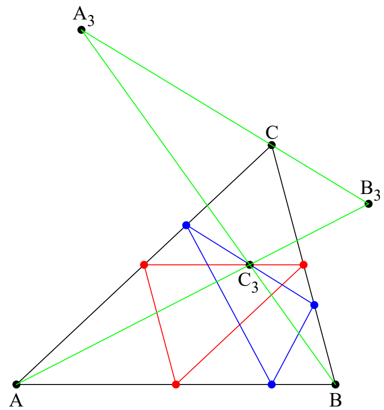
$$\Phi_c = \left(\frac{(c-b)^2}{\sigma_b} : \frac{(c-a)^2}{\sigma_a} : -\frac{(a+b)^2}{\sigma} \right)$$



36 Die Schröter-Punkte

Der 9-Punkte-Kreis des nicht-gleichschenkligen Dreiecks ABC geht durch die Ecken des roten Mittendreiecks $A_1B_1C_1$ mit $A_1 = (0:1:1)$ und des blauen Fußpunktdreiecks $A_2B_2C_2$ mit $A_2 = (0:\tan\beta:\tan\gamma)$.

Die Geraden $A_1B_1 = [1:1:-1]$ und $A_2B_2 = [\cot\alpha:\cot\beta:-\cot\gamma]$ schneiden sich



für $e_1 := \cot\beta - \cot\gamma$; $e_2 := \cot\gamma - \cot\alpha$; $e_3 := \cot\alpha - \cot\beta$ in $C_3 = (e_1 : e_2 : -e_3)$ (schwarz); analog ist $A_3 = (-e_1 : e_2 : e_3)$; $B_3 = (e_1 : -e_2 : e_3)$.

Es sind A, B_3 und C_3 kollinear, ebenso B, A_3 und C_3 sowie C, A_3 und B_3.

Interessanter ist, dass

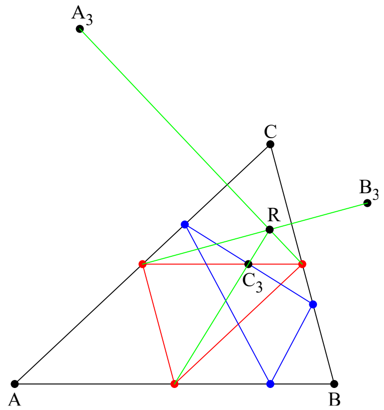
$A_1A_3 = [e_3 - e_2 : -e_1 : e_1]$ und

$B_1B_3 = [e_2 : e_1 - e_3 : -e_2]$ und

$C_1C_3 = [-e_3 : e_3 : e_2 - e_1]$ kopunktal sind,

und zwar im 1. SCHRÖTER-Punkt

$$\boxed{R = \left(e_1^2 : e_2^2 : e_3^2\right)}.$$

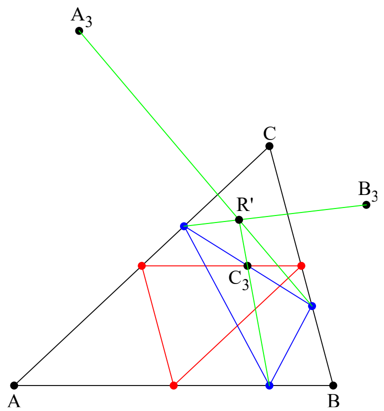


Ebenso interessant ist, dass auch

A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 kopunktal sind, und zwar im 2. SCHRÖTER-Punkt

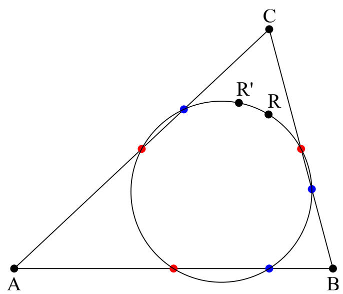
$$\boxed{R' = \left(e_1^2 \cdot \cot\alpha : e_2^2 \cdot \cot\beta : e_3^2 \cdot \cot\gamma\right)}.$$

Zum rechnerischen Nachweis ist ein CAS nützlich.



Der 9-Punkte-Kreis des nicht-gleichschenkligen Dreiecks ABC geht nicht nur durch die Ecken des roten Mittendreiecks und des blauen Fußpunktdreiecks und nicht nur durch die „oberen Höhenmitten“, sondern auch durch die beiden SCHRÖTER-Punkte.

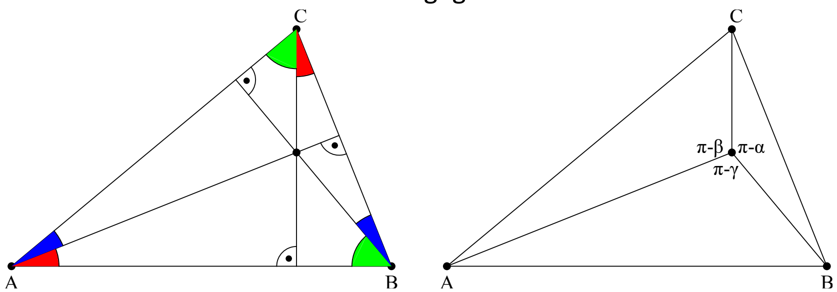
Auch hier ist zum rechnerischen Nachweis ein CAS nützlich.



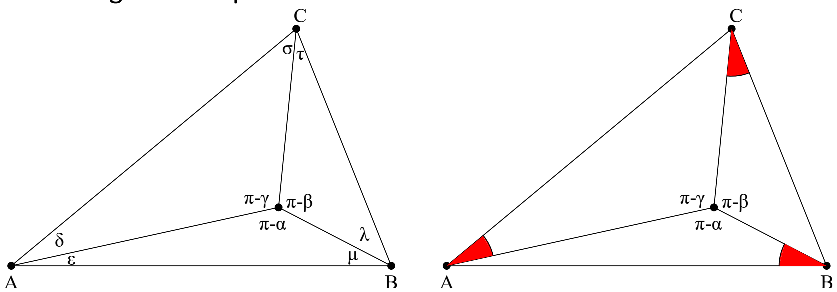
37 Die BROCARD-Punkte

37.1 Motivgebung

Beim Höhenschnitt haben die gleichfarbigen Winkel gleiche Größe. Daher erscheinen die Seiten unter den rechts angegebenen Winkeln.



Permutiert man die Winkel (mit einer geraden Permutation), so bekommt man etwa folgende Graphik.

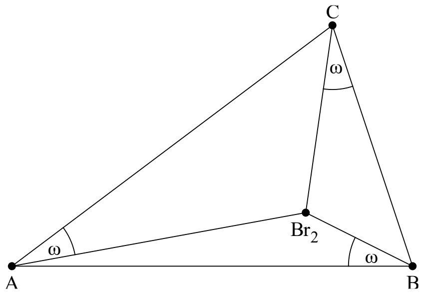


Links ist $\alpha = \varepsilon + \mu$, aber auch $\alpha = \varepsilon + \delta$, also ist $\mu = \delta$.

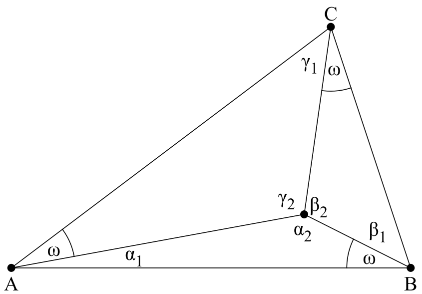
Ferner ist $\beta = \lambda + \tau$, aber auch $\beta = \lambda + \mu$, also ist $\mu = \tau$.

Damit haben rechts die roten Winkel alle die gleiche Größe ω.

37.2 Winkelbetrachtungen



Der zweite[16] nach Henri BROCARD (1845-1922) benannte Punkt Br_2 lässt sich durch die nebenstehende Winkelkonstellation definieren.



Der Winkel ω ist nicht beliebig wählbar, denn es gelten wegen

$\alpha_2 = 180° - (\alpha_1 + \omega) = 180° - \alpha$ usf.

die Beziehungen $\frac{ABr_1}{c} = \frac{\sin\omega}{\sin\alpha}$ sowie $\frac{ABr_1}{b} = \frac{\sin(\gamma-\omega)}{\sin\gamma}$, zusammen

also

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin(\gamma-\omega)}{\sin\omega \cdot \sin\gamma} = \sin\alpha \cdot \frac{\sin\gamma \cdot \cos\omega - \sin\omega \cdot \cos\gamma}{\sin\omega \cdot \sin\gamma} = \sin\alpha \cdot (\cot\omega - \cot\gamma).$$

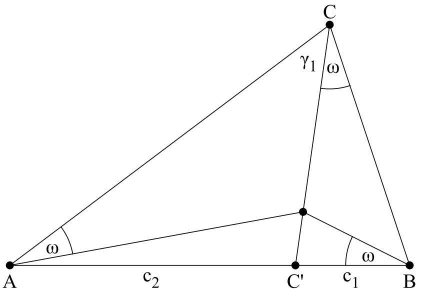
Daraus folgt

$$\cot\omega = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\alpha} + \cot\gamma = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha}{\sin\beta \cdot \sin\alpha} + \cot\gamma$$
$$= \boxed{\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\omega}.$$

Der Winkel ω heißt BROCARD-Winkel. Wegen $\cot\alpha = \frac{R}{a \cdot b \cdot c} \cdot \Sigma_a$ usf. ist

$\boxed{\cot\omega = \frac{R}{a \cdot b \cdot c} \cdot \Sigma}$, und wegen $\cot\alpha = \frac{\Sigma_a}{4 \cdot \Delta}$ usf. ist $\boxed{\cot\omega = \frac{\Sigma}{4 \cdot \Delta}}$.

[16] Welcher der beiden BROCARD-Punkte erster und welcher zweiter ist, wird in der Literatur nicht ganz einheitlich behandelt.



Zur Ermittlung von Br_2 sind die Spurpunkte wie C' hilfreich. Es ist

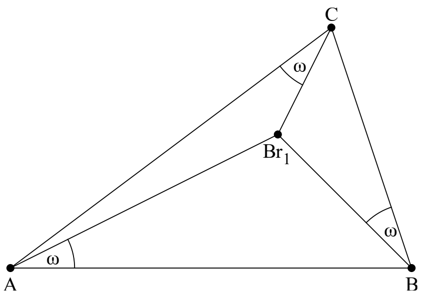
$$\frac{c_2}{CC'}=\frac{\sin(\gamma-\omega)}{\sin\alpha}$$
$$=\frac{\sin\gamma\cdot\cos\omega-\sin\omega\cdot\cos\gamma}{\sin\alpha}$$

und $\frac{c_1}{CC'}=\frac{\sin\omega}{\sin\beta}$

und somit

$$\frac{c_2}{c_1}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot(\sin\gamma\cdot\cot\omega-\cos\gamma)=\frac{b}{a}\cdot(\sin\gamma\cdot\cot\alpha+\sin\gamma\cdot\cot\beta+\sin\gamma\cdot\cot\gamma-\cos\gamma)$$
$$=\frac{b}{a}\cdot\sin\gamma\cdot(\cot\alpha+\cot\beta)=\frac{b}{a}\cdot\frac{\sin^2\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{c^2}{a^2}$$

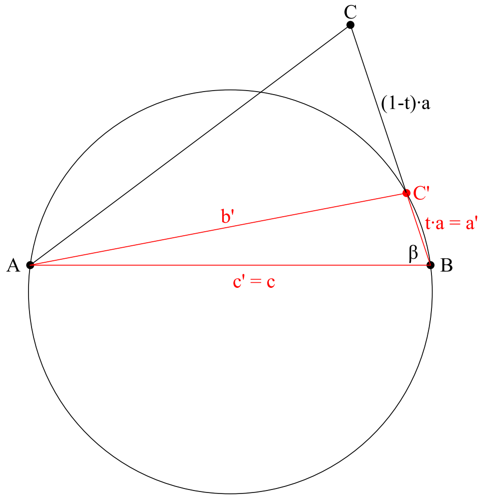
Damit ist $C'=(a^2 : c^2 : 0)$. Die anderen Spurpunkte ermitteln sich analog, so dass man für den zweiten BROCARD-Punkt $\boxed{Br_2=\left(\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2}\right)}$ erhält.



Der erste BROCARD-Punkt Br_1 lässt sich über die nebenstehende Figur definieren. Wieder ist $\boxed{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\cot\omega}$, und man bekommt $\boxed{Br_1=\left(\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}\right)}$.

Beide BROCARDpunkte sind zueinander isogonal konjugiert.

37.3 BROCARD-Punkte und Beikreise

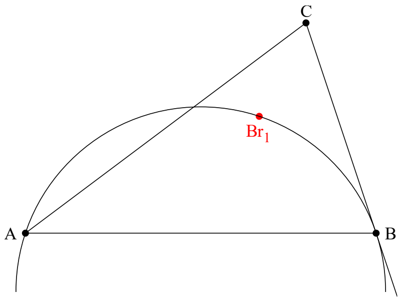


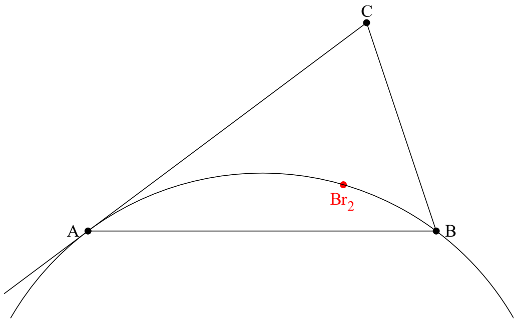
Man bekommt die BROCARDpunkte auch anders:
Wir berechnen zunächst den Kreis durch A, B und $C'=(0:1-t:t)$.
Der Ansatz

$$a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y =(x+y+z)\cdot(\kappa\cdot x+\lambda\cdot y+\mu\cdot z)$$

führt wegen A auf $\kappa=0$, wegen B auf $\lambda=0$ und wegen C' auf $a^2\cdot(1-t)=\mu$. Für $t\to 0$ berührt der Kreis die Seite a in B und hat die Gleichung $\boxed{Um(P)=a^2\cdot z}$.

Ein solcher Kreis heißt *Bei*kreis. Der BROCARDpunkt $Br_1=\left(\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}\right)$ liegt auf diesem *Beikreis* (links in der folgenden Graphik). Eine analoge Aussage bekommt man für Br_2 (rechts).



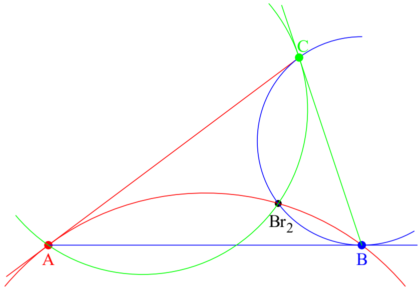


Durch Br_1 verlaufen auch zwei weitere Beikreise: Der Kreis mit

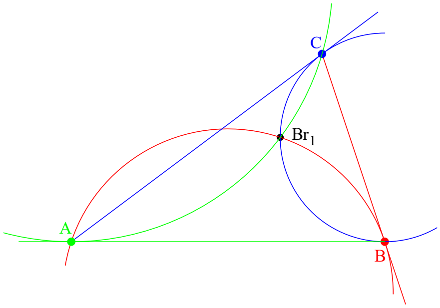
$\boxed{Um(P)=(x+y+z)\cdot c^2\cdot y}$ geht durch A und C und berührt c in A. Der Kreis mit

$\boxed{Um(P)=(x+y+z)\cdot x\cdot b^2}$ geht durch B und C und berührt b in C.

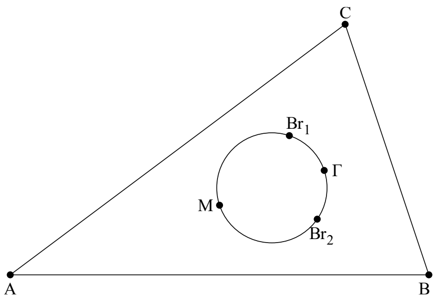
Rechts sieht man die drei Beikreise zu Br_2.
Der rote Kreis durch A und B berührt b in A.
Der blaue Kreis durch B und C berührt c in B.
Der grüne Kreis durch C und A berührt a in C.



Rechts sieht man die drei Beikreise zu Br_1.
Der rote Kreis durch A und B berührt a in B.
Der blaue Kreis durch B und C berührt b in C.
Der grüne Kreis durch C und A berührt c in A.



Es ist noch zu erwähnen, dass Br_1, Br_2, Γ und M konzyklisch sind, was etwa mit Hilfe eines CAS nachgewiesen werden kann.



37.4 Zur BROCARD-Achse und die BROCARD-Mitte X39

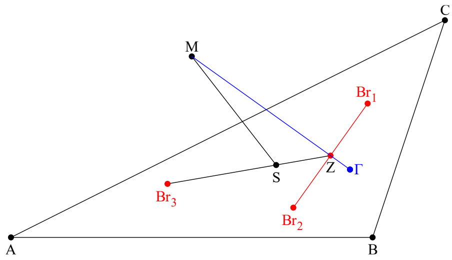
Die BROCARD-Achse verläuft durch $M=\left(a^2\cdot\Sigma_a : b^2\cdot\Sigma_b : c^2\cdot\Sigma_c\right)$ und $\Gamma=\left(a^2 : b^2 : c^2\right)$.

Man kann sich mit Hilfe eines CAS davon überzeugen, dass ΓM und die Verbindungsgerade zu

$Br_1 = \left(\frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}\right)$ und

$Br_2 = \left(\frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2}\right)$ aufeinander

senkrecht stehen.



Die BROCARD-Achse ist sogar Mittelsenkrechte von Br_1Br_2.

Nennt man $Br_3 = \left(\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}\right)$ den „dritten BROCARD-Punkt“, so stimmt der Mittelpunkt Z von Br_1 und Br_2 mit $\boxed{\eta(Br_3) = \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} : \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = X39}$ überein.

S ist auch der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $B_1B_2B_3$.

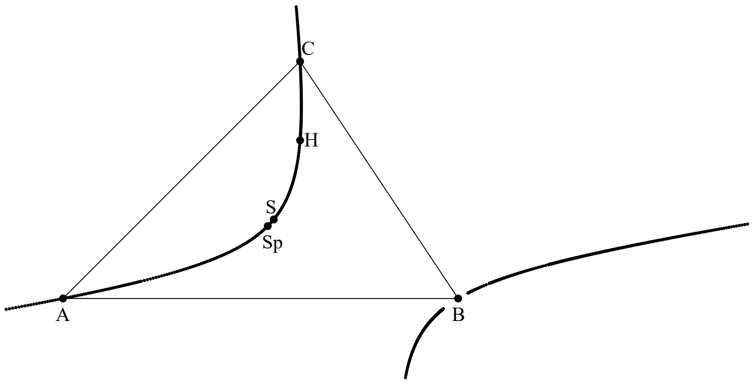
38 Die KIEPERT-Hyperbel

Diese nach Ludwig KIEPERT (1846 - 1934) benannte Kurve ist eine spezielle ABC-Quadrik, hat also die Gleichung $r \cdot y \cdot z + s \cdot z \cdot x + t \cdot x \cdot y = 0$ bzw. $\langle r:s:t \rangle$. Sie soll durch $S = (1:1:1)$ und $H = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$ verlaufen, ist also eine rechtwinklige Hyperbel. Es muss

$$\begin{aligned}\langle r:s:t \rangle &= \langle \tan\alpha \cdot (\tan\beta - \tan\gamma) : \tan\beta \cdot (\tan\gamma - \tan\alpha) : \tan\gamma \cdot (\tan\alpha - \tan\beta) \rangle \\ &= \langle \cot\beta - \cot\gamma : \cot\gamma - \cot\alpha : \cot\alpha - \cot\beta \rangle \\ &= \langle \Sigma_b - \Sigma_c : \Sigma_c - \Sigma_a : \Sigma_a - \Sigma_b \rangle \\ &= \langle b^2 - c^2 : c^2 - a^2 : a^2 - b^2 \rangle\end{aligned}$$

sein.

Spätestens hier sieht man, dass die Quadrik für gleichschenklige Dreiecke in zwei Geraden zerfällt. Das Dreieck ABC sei also *nicht gleichschenklig*.



Auf der KIEPERT-Hyperbel $\left\langle b^2-c^2 : c^2-a^2 : a^2-b^2 \right\rangle$ liegt auch der SPIEKER-Punkt $Sp=(b+c:c+a:a+b)$, wie man sofort sieht.
Die Bedeutung der KIEPERT-Hyperbel wird sichtbarer im Kapitel über Aufsatzdreiecke.

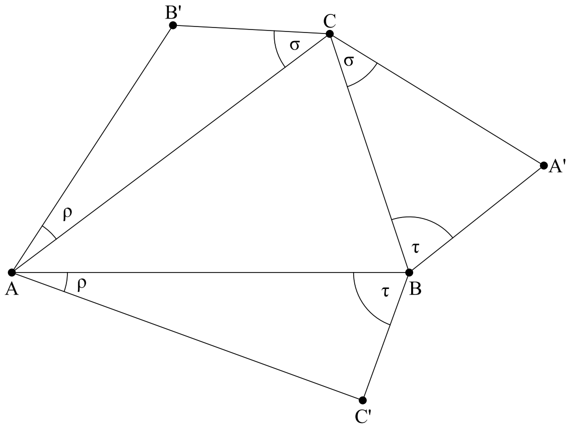
38.1 Die KIEPERT-Hyperbel und die BROCARD-Achse ΓM

Jeder nicht auf einer Dreiecksseite gelegene Punkt $(x:y:z)$ der KIEPERT-Hyperbel erfüllt $\frac{b^2-c^2}{x}+\frac{c^2-a^2}{y}+\frac{a^2-b^2}{z}=0$; sein isogonales Konjugat $\left(x^\# : y^\# : z^\#\right)=\left(\frac{a^2}{x}:\frac{b^2}{y}:\frac{c^2}{z}\right)$ erfüllt $\frac{b^2-c^2}{a^2}x^\# + \frac{c^2-a^2}{b^2}\cdot y^\# + \frac{a^2-b^2}{c^2}\cdot z^\# = 0$, liegt also auf einer Geraden.
Die KIEPERT-Hyperbel verläuft durch S und H. Das isogonale Konjugat der KIEPERT-Hyperbel ist demnach die Gerade durch Γ und M, also die BROCARD-Achse.
Das isotome Konjugat der KIEPERT-Hyperbel ist eine Gerade durch S und das isotome Konjugat von H.

39 Aufsatz-3- , 4- und 5-Ecke

39.1 Aufsatz-Dreiecke

Auf den Dreiecksseiten werden gemäß der Graphik Dreiecke platziert. Dann sind AA', BB' und CC' kopunktal. Zum Nachweis muss man etwas ausholen:



39.2 Die CONWAY-Formeln

Da jeder Punkt P die Darstellung $P=\left(PBC:PCA:PAB\right)$, hat, braucht man für die Berechnung von A' Flächeninhalte. Wegen $\frac{\sin(\sigma+\tau)}{a}=\frac{\sin\tau}{v}=\frac{\sin\sigma}{u}$ ist

$$\begin{aligned}
-2\cdot A'BC &= u\cdot a\cdot\sin\tau \\
2\cdot A'CA &= v\cdot b\cdot\sin(\sigma+\gamma)=v\cdot b\cdot\sin\sigma\cdot\cos\gamma+v\cdot b\cdot\sin\gamma\cdot\cos\sigma \\
&= u\cdot b\cdot\sin\tau\cdot\cos\gamma+u\cdot\sin\tau\cdot b\cdot\sin\gamma\cdot\cot\sigma \\
2\cdot A'AB &= c\cdot u\cdot\sin(\tau+\beta)=c\cdot u\cdot\sin\tau\cdot\cos\beta+c\cdot u\cdot\sin\beta\cdot\cos\tau
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
A' &= \left(A'BC:A'CA:A'AB\right) \\
&= \begin{pmatrix} -u\cdot a\cdot\sin\tau : u\cdot b\cdot\sin\tau\cdot\cos\gamma+u\cdot\sin\tau\cdot b\cdot\sin\gamma\cdot\cot\sigma : \\ c\cdot u\cdot\sin\tau\cdot\cos\beta+c\cdot u\cdot\sin\beta\cdot\cos\tau \end{pmatrix} \\
&= \left(-a : b\cdot\cos\gamma+b\cdot\sin\gamma\cdot\cot\sigma : c\cdot\cos\beta+c\cdot\sin\beta\cdot\cot\tau\right) \\
&= \left(-a^2 : \frac{\Sigma_c}{2}+2\cdot\Delta\cdot\cot\sigma : \frac{\Sigma_b}{2}+2\cdot\Delta\cdot\cot\tau\right)
\end{aligned}$$

Wegen $\Sigma_a=\boxed{4\cdot\Delta\cdot\cot\alpha=:\Sigma_\alpha}$ liegt die auf John Horton CONWAY (1937 - 2020) zurückgehende (hier etwas modifizierte) Abkürzung $\boxed{\Sigma_\varphi:=4\cdot\Delta\cdot\cot\varphi}$ nahe;

damit hat man mit $\Phi_a := \Sigma_a + \Sigma_\rho$, $\Phi_b := \Sigma_b + \Sigma_\tau$, $\Phi_c := \Sigma_c + \Sigma_\sigma$ die CONWAY-Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} A' &= \left(-2\cdot a^2 : \Sigma_c + \Sigma_\sigma : \Sigma_b + \Sigma_\tau\right) = \left(-2\cdot a^2 : \Phi_c : \Phi_b\right) \\ B' &= \left(\Sigma_c + \Sigma_\sigma : -2\cdot b^2 : \Sigma_a + \Sigma_\rho\right) = \left(\Phi_c : -2\cdot b^2 : \Phi_a\right) \\ C' &= \left(\Sigma_b + \Sigma_\tau : \Sigma_a + \Sigma_\rho : -2\cdot c^2\right) = \left(\Phi_b : \Phi_a : -2\cdot c^2\right) \end{aligned}}$$

Die Geraden

$$AA' = \left[0 : -\Phi_b : \Phi_c\right],\ BB' = \left[\Phi_a : 0 : -\Phi_c\right],\ CC' = \left[-\Phi_a : \Phi_b : 0\right]$$

sind kopunktal in

$$\boxed{J(\rho, \tau, \sigma) := \left(\frac{1}{\Phi_a} : \frac{1}{\Phi_b} : \frac{1}{\Phi_c}\right) = \left(\frac{a\cdot\sin\rho}{\sin(\alpha+\rho)} : \frac{b\cdot\sin\tau}{\sin(\beta+\tau)} : \frac{c\cdot\sin\sigma}{\sin(\gamma+\sigma)}\right)}.$$

Diese Kopunktalität wird nach Karl Friedrich Andreas JACOBI (1795 – 1855) benannt. Spezielle Werte von J sind altbekannt:

$$J(0°, 0°, 0°) = \left(\frac{a}{\sin\alpha} : \frac{b}{\sin\beta} : \frac{c}{\sin\gamma}\right) = S,$$

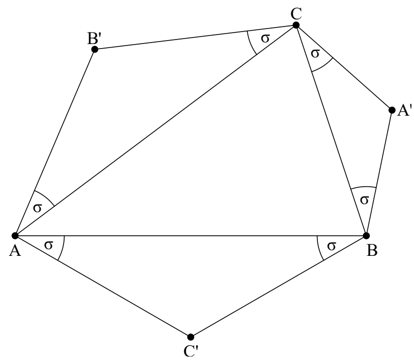
$$J(90°, 90°, 90°) = \left(\frac{a}{\cos\alpha} : \frac{b}{\cos\beta} : \frac{c}{\cos\gamma}\right) = (\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma) = H.$$

39.3 Gleichschenklige Aufsatzdreiecke, X13 und X14

Auf den Dreiecksseiten werden gemäß der Graphik gleichschenklige Dreiecke platziert.

AA‘, BB‘ und CC‘ sind kopunktal in

$$\boxed{\begin{aligned} J(\sigma) &:= \left(\frac{1}{\Sigma_a + \Sigma_\sigma} : \frac{1}{\Sigma_b + \Sigma_\sigma} : \frac{1}{\Sigma_c + \Sigma_\sigma}\right) \\ &= \left(\frac{a}{\sin(\alpha+\sigma)} : \frac{b}{\sin(\beta+\sigma)} : \frac{c}{\sin(\gamma+\sigma)}\right) \end{aligned}}$$



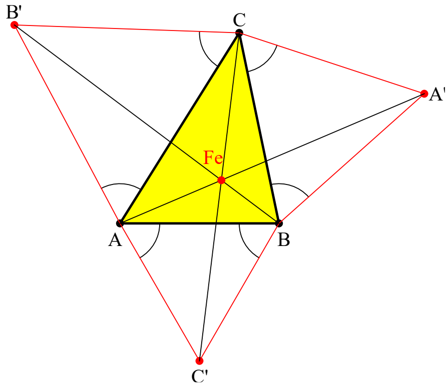
Für *alle* Werte von ω liegt $J(\sigma)$ auf der KIEPERT-Hyperbel wegen

$$(\Sigma_b - \Sigma_c)\cdot(\Sigma_a - \Sigma_\sigma) + (\Sigma_c - \Sigma_a)\cdot(\Sigma_b - \Sigma_\sigma) + (\Sigma_a - \Sigma_b)\cdot(\Sigma_c - \Sigma_\sigma) = 0.$$

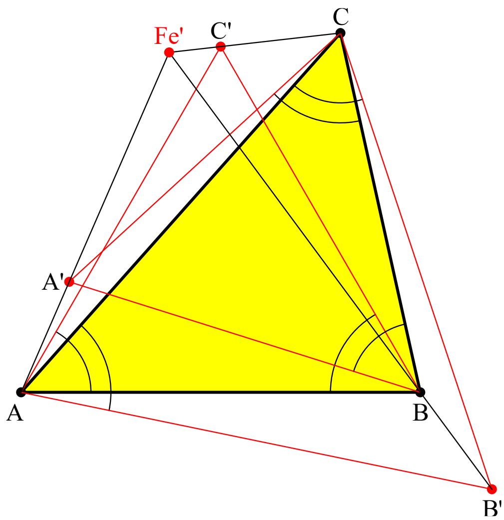
Die Kiepert-Hyperbel wird durch $J(\sigma)$ *parametrisiert*.

Es ist $J(0°) = J(180°) = S$ und $J(90°) = J(270°) = H$ sowie
$J(-\alpha) = A,\ J(-\beta) = B,\ J(-\gamma) = C$.

Ferner ist $\boxed{J(60°) = X13}$ der nach Pierre de FERMAT (1607 - 1665) benannte Punkt Fe, dessen Summe seiner Entfernungen zu den Dreiecks-Eckpunkten minimal ist (falls alle Dreieckswinkel kleiner sind als 120°).



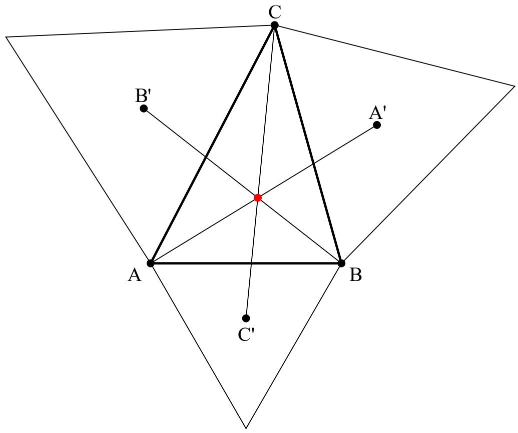
Man kann die gleichseitigen Dreiecke auch nach innen auftragen und kommt so zu
$Fe' = J(-60°) = X14$.



39.4 Gleichseitige Aufsatz-Dreiecke, NAPOLEON-Punkte X17 und X18

Errichtet man gleichseitige Dreiecke nach außen, so sind die Ecktransversalen durch deren Mittelpunkte kopunktal in dem nach NAPOLEON benannten Punkt

$$. \ J(30°) = \left(\frac{a}{\sin(\alpha+30°)} : \frac{b}{\sin(\beta+30°)} : \frac{c}{\sin(\gamma+30°)} \right) = X17 .$$



Errichtet man die gleichseitigen Dreiecke nach *innen*, gelangt man zu

$$J(-30°)=\left(\frac{a}{\sin(\alpha-30°)}:\frac{b}{\sin(\beta-30°)}:\frac{c}{\sin(\gamma 30°)}\right)=X18\ .$$

39.5 Punkte auf der Ferngeraden

Es ist zu erwarten, dass für zwei Werte von σ der Punkt

$$\begin{aligned}
J(\sigma)&=\left(\frac{a}{\sin(\alpha+\sigma)}:\frac{b}{\sin(\beta+\sigma)}:\frac{c}{\sin(\gamma+\sigma)}\right)\\
&=\left(\frac{1}{\frac{\sin(\alpha+\sigma)}{\sin\alpha}}:\frac{1}{\frac{\sin(\beta+\sigma)}{\sin\beta}}:\frac{1}{\frac{\sin(\gamma+\sigma)}{\sin\gamma}}\right)\\
&=\left(\frac{1}{\cos\sigma+\sin\sigma\cdot\cot\alpha}:\frac{1}{\cos\sigma+\sin\sigma\cdot\cot\beta}:\frac{1}{\cos\sigma+\sin\sigma\cdot\cot\gamma}\right)\\
&=\boxed{\left(\frac{1}{\cot\sigma+\cot\alpha}:\frac{1}{\cot\sigma+\cot\beta}:\frac{1}{\cot\sigma+\cot\gamma}\right)=J(\sigma)}
\end{aligned}$$

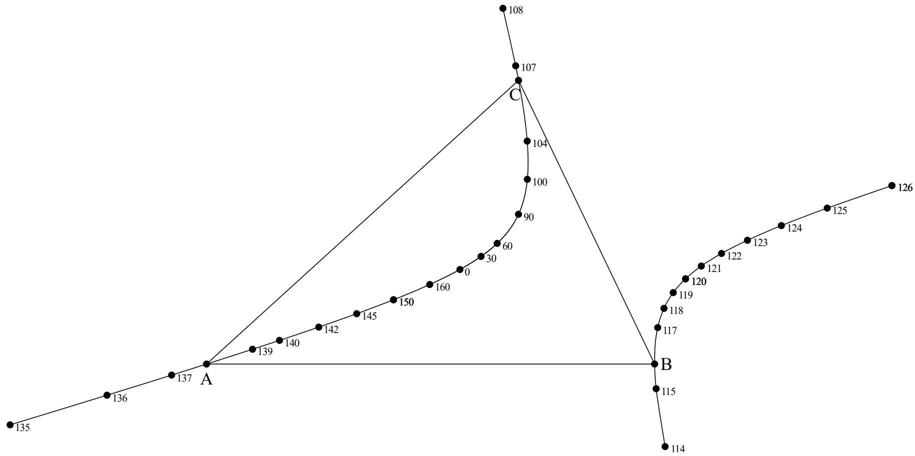
auf der Ferngeraden liegt. Das ist der Fall für

$$\begin{aligned}
0&=(\cot\sigma+\cot\beta)\cdot(\cot\sigma+\cot\gamma)+(\cot\sigma+\cot\gamma)\cdot(\cot\sigma+\cot\alpha)\\
&\quad+(\cot\sigma+\cot\alpha)\cdot(\cot\sigma+\cot\beta)\\
&=3\cdot\cot^2\sigma+2\cdot\cot\sigma\cdot\cot\omega+\cot\alpha\cdot\cot\beta+\cot\beta\cdot\cot\gamma+\cot\gamma\cdot\cot\alpha\\
&=3\cdot\cot^2\sigma+2\cdot\cot\sigma\cdot\cot\omega+1
\end{aligned}$$

mit dem BROCARD-Winkel ω, für den $\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$ gilt.

Dann ist $\cot\sigma = -\frac{\cot\omega}{3} \pm \frac{\sqrt{\cot^2\omega - 3}}{3}$.

Bei der folgenden Graphik gehören zur Ferngerade die zu diesem speziellen Dreieck gehörigen (gerundeten) Winkel 110° und 130°. Die zu den Punkten gehörigen Gradzahlen sind vermerkt.



39.6 Eine Ergänzung nach WALSER

Man kann bei gleichschenkligen Aufsatzdreiecken die Ausgangsfigur ergänzen: Nach einer Idee von Hans WALSER[17] (*1944) betrachte man

$$\begin{aligned} A'' &= CB' \cap BC' \\ &= \left[b\cdot\sin\omega : a\cdot\sin(\sigma+\gamma) : 0\right] \cap \left[c\cdot\sin\omega : 0 : a\cdot\sin(\sigma+\beta)\right] \\ &= \left(* : b\cdot\sin(\sigma+\beta) : c\cdot\sin(\sigma+\gamma)\right) \end{aligned}$$

und die zugehörigen Ecktransversalen

$$AA'' = \left[0 : -c\cdot\sin(\sigma+\gamma) : b\cdot\sin(\sigma+\beta)\right]$$

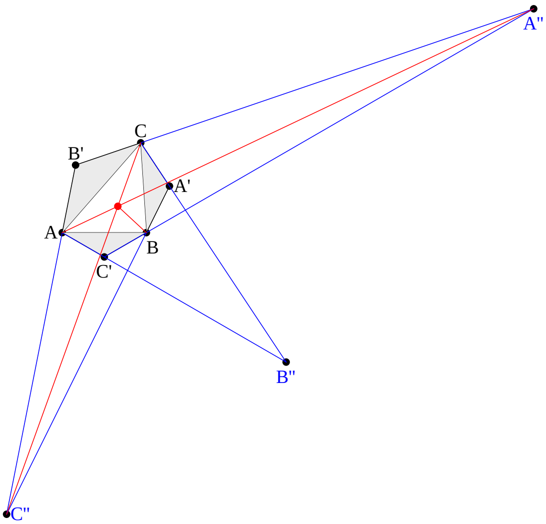
$$BB'' = \left[-c\cdot\sin(\sigma+\gamma) : 0 : a\cdot\sin(\sigma+\alpha)\right]$$

$$CC'' = \left[-b\cdot\sin(\sigma+\beta) : a\cdot\sin(\sigma+\alpha) : 0\right]$$

[17] https://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Seltsame_Gerade/Seltsame_Gerade.htm (25. 7. 2019)

Diese sind in $T(\sigma)=\left(a\cdot\sin(\sigma+\alpha):b\cdot\sin(\sigma+\beta):c\cdot\sin(\sigma+\gamma)\right)$ kopunktal[18] in; $T(\sigma)$ ist zu $J(\sigma)$ isogonal konjugiert.

Für die (zeichnerisch nicht konstruierbaren Fälle) $\sigma=0$ erhält man den GREBE/LEMOINE-Punkt Γ, für $\sigma=-90^\circ$ den Umkreis-Mittelpunkt M.



Die Punkte $T(\sigma)$ sind kollinear auf

$$\left[\frac{\sin(\beta-\gamma)}{a}:\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{b}:\frac{\sin(\alpha-\beta)}{c}\right]$$

$$=\left[\frac{b\cdot\cos\gamma-c\cdot\cos\beta}{a}:*:*\right]=\left[\frac{a\cdot b\cdot\cos\gamma-c\cdot a\cdot\cos\beta}{a^2}:*:*\right]$$

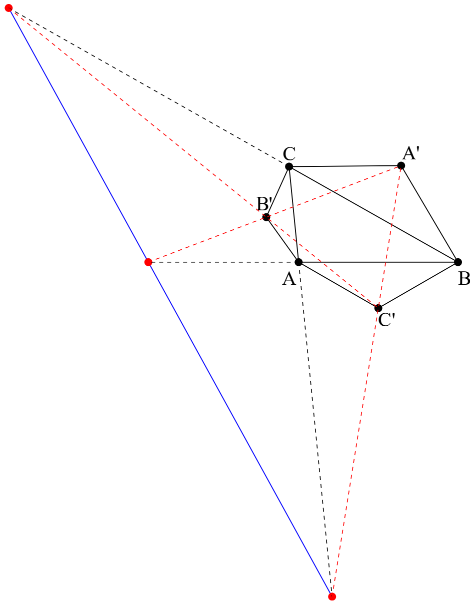
$$=\left[\frac{\Sigma_c-\Sigma_b}{a^2}:\frac{\Sigma_a-\Sigma_c}{b^2}:\frac{\Sigma_b-\Sigma_a}{c^2}\right]=\left[\frac{b^2-c^2}{a^2}:\frac{c^2-a^2}{b^2}:\frac{a^2-b^2}{c^2}\right]$$

der BROCARD-Achse durch M und Γ.

[18] Nicht zu verwechseln mit dem Mittenpunkt T, der keine Argumente hat

39.7 Eine weitere Ergänzung im gleichschenkligen Fall

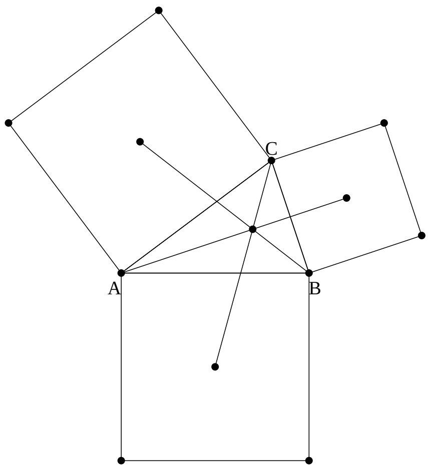
Schneidet man die Dreiecksseiten a, b, c mit den Verbindungsgeraden der Spitzen A‘, B‘, C‘ der aufgesetzten Dreiecke, so sind die Schnittpunkte kollinear, was man mit einem CAS nachweist.



39.8 Aufsatz-Quadrate, die VECTEN-Punkte

Insbesondere liegen auf der KIEPERT-Hyperbel auch die beiden zu $\sigma = \pm 45°$ gehörigen VECTEN-Punkte[19].

Man bekommt den äußeren VECTEN-punkt, wenn man Quadrate nach *außen* auf den Dreiecksseiten errichtet und die Quadratmitten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks verbindet; die Verbindungslinien sind kopunktal im äußeren VECTENpunkt

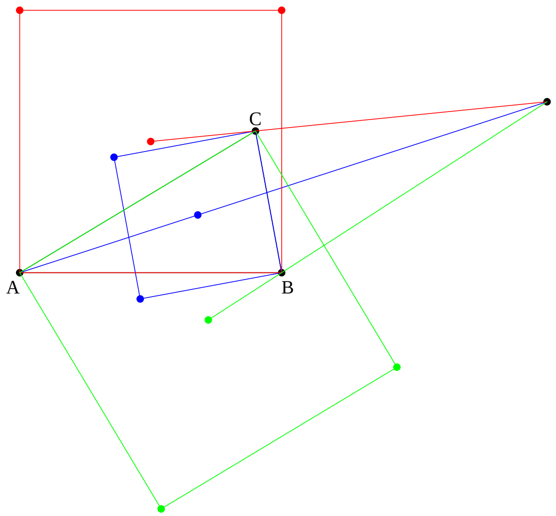


[19] Über den französischen Mathematiker VECTEN ist fast nichts bekannt, noch nicht einmal der Vorname.

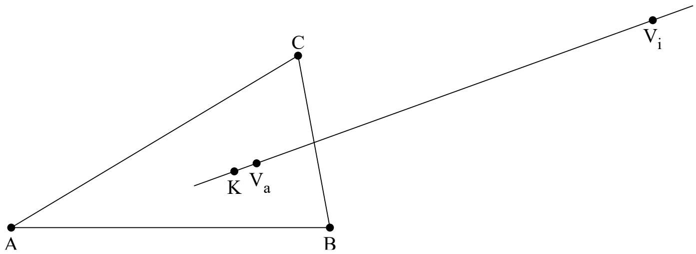
$$
\begin{aligned}
J(45°) &= \left(\frac{a}{\sin(\alpha+45°)} : \frac{b}{\sin(\beta+45°)} : \frac{c}{\sin(\gamma+45°)}\right) \\
&= \left(\frac{a}{\sin\alpha+\cos\alpha} : \frac{b}{\sin\beta+\cos\beta} : \frac{c}{\sin\gamma+\cos\gamma}\right) \\
&= \left(\frac{1}{b\cdot c\cdot\sin\alpha+b\cdot c\cdot\cos\alpha} : \frac{1}{c\cdot a\cdot\sin\beta+c\cdot a\cdot\cos\beta} : \frac{1}{a\cdot b\cdot\sin\gamma+a\cdot b\cdot\cos\gamma}\right) \\
&= \boxed{\left(\frac{1}{4\cdot\Delta+\Sigma_a} : \frac{1}{4\cdot\Delta+\Sigma_b} : \frac{1}{4\cdot\Delta+\Sigma_c}\right) =: V_a}
\end{aligned}
$$

Entsprechend bekommt man den inneren VECTENpunkt, wenn man Quadrate nach *innen* auf den Dreiecksseiten errichtet (im folgenden Bild verschiedenfarbig eingezeichnet) und die Quadratmitten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks verbindet; die Verbindungslinien sind kopunktal im inneren VECTENpunkt

$$
J(-45°) = \boxed{\left(\frac{1}{4\cdot\Delta-\Sigma_a} : \frac{1}{4\cdot\Delta-\Sigma_b} : \frac{1}{4\cdot\Delta-\Sigma_c}\right) =: V_i}\ .
$$



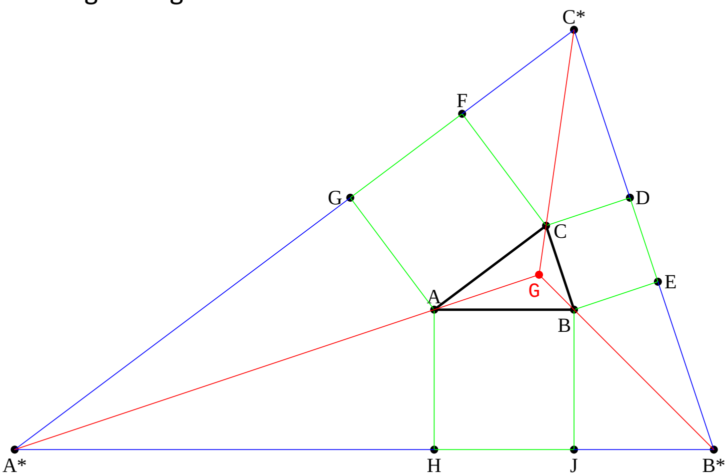
Mit Hilfe eines CAS weist man nach, dass die beiden VECTEN-punkte und das Zentrum K des 9-Punkte-Kreises kollinear sind.



Man lasse sich nicht dadurch verwirren, dass der äußere VECTENpunkt innerhalb und der innere VECTENpunkt außerhalb von ABC liegt.

39.9 Quadrate über den Dreiecksseiten: Noch einmal Γ

Die verallgemeinerte PYTHAGORAS-Figur bzw. die Figur zum äußeren VECTEN-punkt lädt zu Ergänzungen ein.



Man bekommt

$$D=\left(-2\cdot a^2:\Sigma_c+\Sigma_{90°}:\Sigma_b+\Sigma_{45°}\right)=\left(-2\cdot a^2:\Sigma_c:\Sigma_b+4\cdot\Delta\right);$$

$$E=\left(-2\cdot a^2:\Sigma_c+4\cdot\Delta:\Sigma_b\right)$$

$$F=\left(\Sigma_c:-2\cdot b^2:\Sigma_a+4\cdot\Delta\right);\ \ G=\left(\Sigma_c+4\cdot\Delta:-2\cdot b^2:\Sigma_a\right)$$

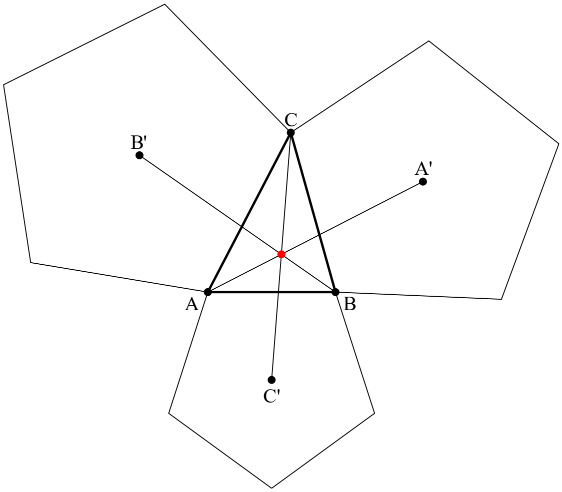
$$H=\left(\Sigma_b+4\cdot\Delta:\Sigma_a:-2\cdot c^2\right);\ \ J=\left(\Sigma_b:\Sigma_a+4\cdot\Delta:-2\cdot c^2\right)$$

und kann so A*, B* und C* berechnen, um so (mit Hilfe eines CAS) nachzuweisen, dass sich AA*, BB* und CC* im GREBE/LEMOINE-Punkt Γ schneiden.

39.10 Aufsatz-Fünfecke

Errichtet man über den Dreiecksseiten nach außen regelmäßige Fünfecke, so sind die Ecktransversalen zu den Mittelpunkten der Fünfecke kopunktal in

$$J(45°)=\left(\frac{a}{\sin(\alpha+54°)}:\frac{b}{\sin(\beta+54°)}:\frac{c}{\sin(\gamma+54°)}\right).$$



40 Fußpunkt-Dreiecke, die DARBOUX-Kubik und die NEUBERG-Kubik

40.1 Fußpunkte

Wegen $\infty(c^{\perp})=(a\cdot\cos\beta : b\cdot\cos\alpha : -c)=(\Sigma_b : \Sigma_a : -2\cdot c^2)$ ist die Senkrechte zu c durch $P=(u:v:w)$ gegeben durch

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ u & v & w \\ \Sigma_b & \Sigma_a & -2\cdot c^2 \end{vmatrix}=\left[-2\cdot v\cdot c^2-w\cdot\Sigma_a : w\cdot\Sigma_b+2\cdot u\cdot c^2 : *\right]$$; sie schneidet c in

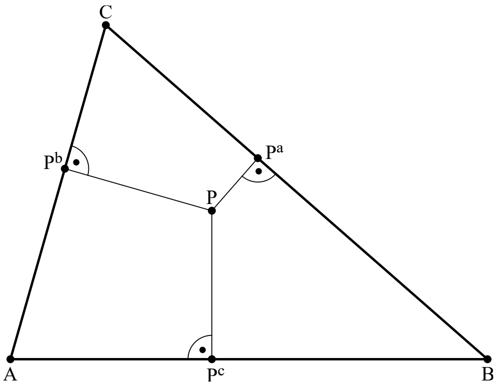
$$P^c=\left(w\cdot\Sigma_b+2\cdot u\cdot c^2 : w\cdot\Sigma_a+2\cdot v\cdot c^2 : 0\right)=\left(\Sigma_b+2\cdot u\cdot w^\# : \Sigma_a+2\cdot v\cdot w^\# : 0\right)$$

mit den Koordinaten des zu P isogonal konjugierten Punkts

$$P^\#=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)=:\left(u^\# : v^\# : w^\#\right).$$

Insgesamt ist

$$P^c = \left(\Sigma_b + 2\cdot u\cdot w^\# : \Sigma_a + 2\cdot v\cdot w^\# : 0\right)$$
$$P^a = \left(0 : \Sigma_c + 2\cdot v\cdot u^\# : \Sigma_b + 2\cdot w\cdot u^\#\right)$$
$$P^b = \left(\Sigma_c + 2\cdot u\cdot v^\# : 0 : \Sigma_a + 2\cdot w\cdot v^\#\right)$$

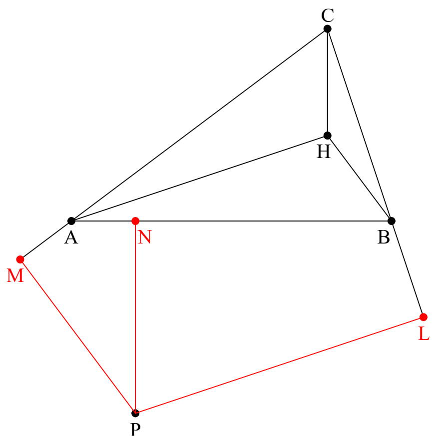


40.2 Ein zweiter Weg zum Umkreis: Die SIMSON / WALLACE-Gerade

Die drei Fußpunkte P^a, P^b und P^c sind genau dann kollinear, wenn P auf dem Umkreis liegt. Die Berechnung der zugehörigen Determinante überlasse man einem CAS. Im falle der Kollinearität wird die Gerade nach Robert SIMSON (1687–1768) bzw. nach William WALLACE (1768–1843) benannt.

40.3 Die Quadriken von BRADLEY & BRADLEY

Bradley und Bradley[20] haben den Sachverhalt der SIMSON / WALLACE-Gerade wie nebenstehend formuliert: Die durch P verlaufenden Parallelen zu AH, BH und CH mögen die Dreiecksseiten in L, M, N treffen. Dann sind L, M, N genau dann kollinear, wenn P auf dem Umkreis zu ABC liegt.



Mit dieser Umformulierung wird die Bedeutung des rechten Winkels relativiert.

Außerdem stellt sich nun die Frage, was sich ändert, wenn man den Höhenschnittpunkt H durch einen anderen festen Punkt $Q = (u : v : w)$ ersetzt.

[20] Bradley, C. J. / Bradley, J. T. (1996): Countless Simson Line Configurations. In: The Mathematical Gazette, Vol. 80, S. 314-321.

Die durch $P=(x:y:z)$ verlaufenden Parallelen zu

$$AQ=[0:-w:v],\ BQ=[-w:0:u],\ CQ=[-v:u:0]$$

sind

$$g_A=[D_A:D_A-w:D_A+v]$$
$$g_B=[D_B-w:D_B:D_B+u]$$
$$g_C=[D_C-v:D_C+u:D_C]$$

mit

$$D_A=\frac{w\cdot y-v\cdot z}{x+y+z},\ D_B=\frac{w\cdot x-u\cdot z}{x+y+z},\ D_C=\frac{v\cdot x-u\cdot y}{x+y+z}.$$

Dann ist

$$g_A\cap BC=(0:v+D_A:w-D_A)$$
$$g_B\cap CA=(u+D_B:0:w-D_B)$$
$$g_C\cap AB=(u+D_C:v-D_C:0)$$

mit Kollinearität für

$$(u+D_C)\cdot(v+D_A)\cdot(w-D_B)+(u+D_B)\cdot(v-D_C)\cdot(w-D_A)=0.$$

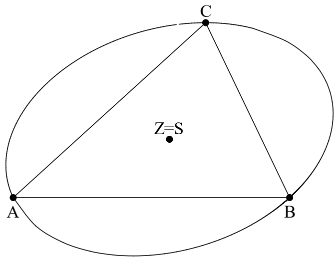
Berechnet man dieses Produkt mit CAS-Hilfe, ergibt sich keine Kubik, sondern eine durch A, B und C verlaufende Quadrik mit

$$\boxed{\frac{u\cdot(v+w)}{x}+\frac{v\cdot(w+u)}{y}+\frac{w\cdot(u+v)}{z}=0}.$$

Für $Q=H=\left(\frac{1}{\Sigma_a}:\frac{1}{\Sigma_b}:\frac{1}{\Sigma_c}\right)$ bekommt man wegen

$$u\cdot(v+w)=\frac{\Sigma_b+\Sigma_c}{\Sigma_a\cdot\Sigma_b\cdot\Sigma_c}=\frac{1}{\Sigma_a\cdot\Sigma_b\cdot\Sigma_c}\cdot a^2$$

die Quadrik $\left\langle a^2:b^2:c^2\right\rangle$, also den Umkreis.

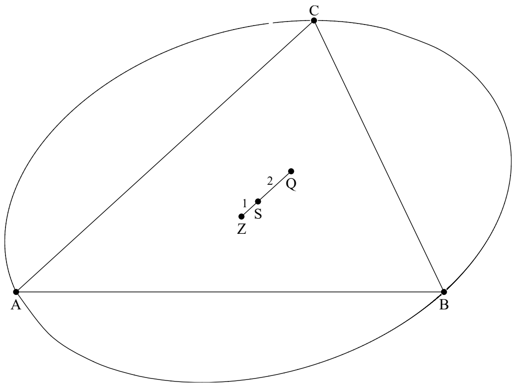


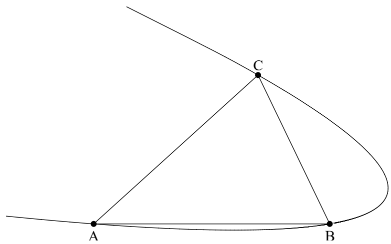
Für $Q = S = (1:1:1)$ bekommt man die Quadrik $\langle 1{:}1{:}1 \rangle$. Ein allgemeiner Punkt auf ihr hat die Form $\left(1 : y : \frac{-y}{1+y}\right)$; da kein reeller Schnittpunkt mit der Ferngeraden existiert, handelt es sich um eine Ellipse, deren Zentrum Z unten erläutert wird.

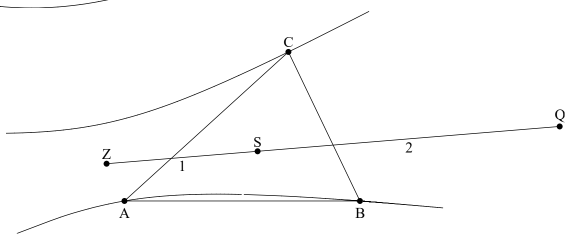
Der Punkt $Q = (u : v : w)$ liefert den allgemeinen Punkt der Quadrik $\left(1 : y : -\frac{w \cdot y \cdot (u+v)}{u \cdot y \cdot (v+w) + v \cdot (w+u)}\right)$; er liegt genau dann auf der Ferngeraden, wenn die Diskriminante $-u \cdot v \cdot w \cdot (u+v+w) \geq 0$ ist.

Ist etwa $u = 0$, so hat die Quadrik die Gestalt $x \cdot w \cdot (v \cdot z + v \cdot y) = 0$, zerfällt also in zwei Geraden. Daher bekommt man genau dann eine Parabel, wenn $Q = (u : v : w)$ auf der Ferngeraden liegt.

In der folgenden Graphik ist links eine Ellipse (mit dem unten erläuterten Mittelpunkt Z) und rechts eine (zu einem Punkt Q auf der Ferngeraden gehörige) Parabel zu sehen sowie darunter eine Hyperbel.







Man rechnet leicht nach, dass, wenn P auf der Q-Quadrik liegt, dass dann auch Q auf der P-Quadrik liegt.

Ist $\langle r:s:t\rangle$ eine beliebige ABC-Quadrik, so ist der zugehörige BRADLEY-Punkt gegeben durch $Q=(u:v:w)=\boxed{\left(\frac{1}{-r+s+t}:\frac{1}{r-s+t}:\frac{1}{r+s-t}\right)=Q}$ wegen

$$u\cdot(v+w)=\frac{2\cdot r}{(-r+s+t)\cdot(r-s+t)\cdot(r+s-t)} \text{ usw.}$$

40.4 Zum Mittelpunkt der BRADLEY-Quadrik

Auf der zum BRADLEY-Punkt $Q=(u:v:w)$ gehörigen Quadrik $\frac{u\cdot(v+w)}{x}+\frac{v\cdot(w+u)}{y}+\frac{w\cdot(u+v)}{z}=0$ liegen nicht nur A, B und C, sondern auch die Punkte $A'=(-u:u+w:u+v)$ usw. Der Mittelpunkt von A und A‘ ist $\boxed{Z=(v+w:u+w:u+v)=\eta(Q)}$. Man bekommt (aus Symmetriegründen) dasselbe Ergebnis für die Mittelpunkte von BB‘ und CC‘. Daher ist Z der Mittelpunkt der Quadrik. Im Parabelfall liegt Q auf der Ferngeraden und damit auch Z.

40.5 Die DARBOUX-Kubik

Es sei $P=(u:v:w)$ mit dem isogonal konjugierten Punkt $P^{\#}=(u^{\#}:v^{\#}:w^{\#})=\left(\frac{a^2}{u}:\frac{b^2}{v}:\frac{c^2}{w}\right)$.

Ist $P=H$ oder $P=M$, so sind AP^a, BP^b und CP^c kopunktal, aber das ist nicht nur für H und M der Fall.

Es sind AP^a, BP^b und CP^c kopunktal, falls P die Gleichung $\mathrm{Dar}(u,v,w)=0$ mit

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Dar}(u,v,w):=&\left(v\cdot w^{\#}+\frac{\Sigma_a}{2}\right)\cdot\left(w\cdot u^{\#}+\frac{\Sigma_b}{2}\right)\cdot\left(u\cdot v^{\#}+\frac{\Sigma_c}{2}\right)\\&-\left(w\cdot v^{\#}+\frac{\Sigma_a}{2}\right)\cdot\left(u\cdot w^{\#}+\frac{\Sigma_b}{2}\right)\cdot\left(v\cdot u^{\#}+\frac{\Sigma_c}{2}\right)\end{aligned}}$$

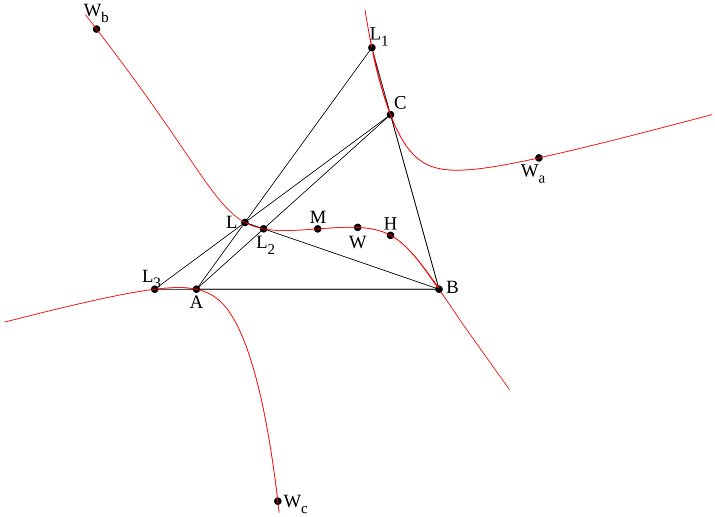
erfüllt. Dar beschreibt eine kubische Kurve, die nach Gaston DARBOUX (1842 – 1917) benannt wird.

Die Gleichung $\mathrm{Dar}(u, v, w) = 0$ schreibt sich mit den Koordinaten des LONGCHAMPS-Punktes $L = (\tau - 2\cdot\tan\alpha : \tau - 2\cdot\tan\beta : \tau - 2\cdot\tan\gamma) =: (\ell_1 : \ell_2 : \ell_3)$ nach etwas Rechnung auch als

$$\boxed{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ u & v & w \\ u^\# & v^\# & w^\# \end{vmatrix} = 0}.$$

Stets liegen P, $P^\#$ und L auf einer Geraden.

Man sieht sofort: Liegt P auf der Kurve, so liegt auch $P^\#$ auf der Kurve.
Man kann die DARBOUX-Kubik als *isogonale Kubik* bezeichnen.
Auf der DARBOUX-Kubik liegen zum Beispiel W, M und H sowie W_a, W_b und W_c sowie L und dessen Spurpunkte und viele weitere[21]. Die folgende Graphik zeigt die DARBOUX-Kubik.



Man hat den Eindruck, dass die Kurve zu M symmetrisch ist, was sich mit Hilfe eines CAS auch beweisen lässt. Daher liegen auch der BEVAN-Punkt V und seine Begleiter V_a, V_b und V_c auf der Kurve.

[21] https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr/Exemples/k004.html

40.6 Spiegelungen an den Dreiecksseiten

Will man $P=(u:v:w)$ an c spiegeln, so bekommt man für den gespiegelten Punkt $P^{(c)}$ die Beziehung

$$P^{(c)}=2\cdot P^c-P=\left(u\cdot w^\#+\Sigma_b : v\cdot w^\#+\Sigma_a : -c^2\right).$$

Analog ist

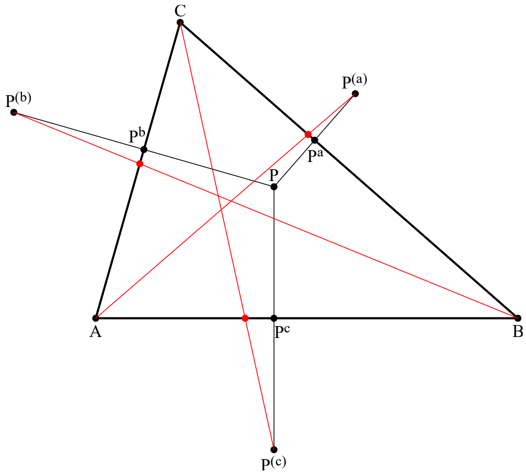
$$P^{(b)}=\left(u\cdot v^\#+\Sigma_c : -b^2 : w\cdot v^\#+\Sigma_a\right);\quad P^{(a)}=\left(-a^2 : v\cdot u^\#+\Sigma_c : w\cdot u^\#+\Sigma_b\right)$$

mit den (in der Graphik rot eingetragenen) Spurpunkten

$$P_3^{(c)}=\left(u\cdot w^\#+\Sigma_b : v\cdot w^\#+\Sigma_a : 0\right)$$

$$P_2^{(b)}=\left(u\cdot v^\#+\Sigma_c : 0 : w\cdot v^\#+\Sigma_a\right)$$

$$P_1^{(a)}=\left(0 : v\cdot u^\#+\Sigma_c : w\cdot u^\#+\Sigma_b\right).$$



40.7 Die Spiegelbilder von H und W

Da $H^{(a)}$ auf der Höhe h_a liegt, geht $AH^{(a)}$ durch H. Interessanter ist das Verhalten von W: Es ist

$$W^{(a)}=\left(-a : b\cdot(1+2\cdot\cos\gamma) : c\cdot(1+2\cdot\cos\beta)\right)$$

$$W^{(b)}=\left(a\cdot(1+2\cdot\cos\gamma) : -b : c\cdot(1+2\cdot\cos\alpha)\right)$$

$$W^{(c)}=\left(a\cdot(1+2\cdot\cos\beta) : b\cdot(1+2\cdot\cos\alpha) : -c\right)$$

und

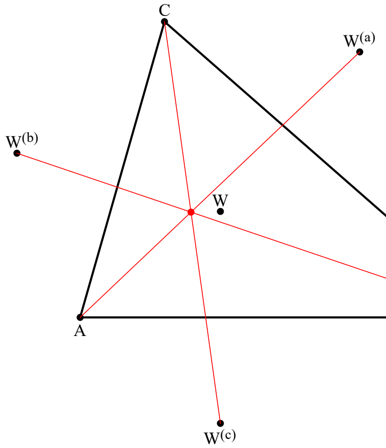
$$AW^{(a)}=\left[0 : -c\cdot(1+2\cdot\cos\beta) : b\cdot(1+2\cdot\cos\gamma)\right]$$

$$BW^{(b)}=\left[-c\cdot(1+2\cdot\cos\alpha) : 0 : a\cdot(1+2\cdot\cos\gamma)\right]$$

$$CW^{(c)}=\left[-b\cdot(1+2\cdot\cos\alpha) : a\cdot(1+2\cdot\cos\beta) : 0\right]$$

mit dem (in der folgenden Graphik rot gekennzeichneten) Schnittpunkt

$$\boxed{W^* = \left(\frac{a}{1+2\cdot\cos\alpha} : \frac{b}{1+2\cdot\cos\beta} : \frac{c}{1+2\cdot\cos\gamma} \right)}.$$



Nicht immer sind die Ecktransversalen durch die Spiegelpunkte kopunktal. Dies liefert Anlass zu einer weiteren interessanten Kurve:

40.8 Die NEUBERG-Kubik

Die Ecktransversalen $CP^{(c)}$, $BP^{(b)}$, $AP^{(a)}$ sind nach dem Satz von CEVA genau dann kopunktal, falls $P = (u : v : w)$ auf der Kurve mit $\mathrm{Neu}(u, v, w) = 0$ liegt; dabei ist

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Neu}(u, v, w) :=& \left(v\cdot w^{\#} + \Sigma_a\right)\cdot\left(w\cdot u^{\#} + \Sigma_b\right)\cdot\left(u\cdot v^{\#} + \Sigma_c\right) \\ &- \left(w\cdot v^{\#} + \Sigma_a\right)\cdot\left(u\cdot w^{\#} + \Sigma_b\right)\cdot\left(v\cdot u^{\#} + \Sigma_c\right)\end{aligned}}.$$

Nach etwas Rechnung schreibt sich die Gleichung der NEUBERG-Kubik auch als

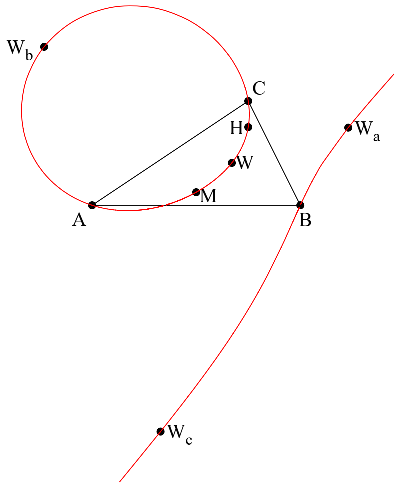
$$\boxed{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u & v & w \\ u^{\#} & v^{\#} & w^{\#} \end{vmatrix} = 0}$$

mit den Koordinaten des Fernpunkts Eu der EULER-Geraden

$$\mathrm{Eu} = \left(\tau - 3\cdot\tan\alpha : \tau - 3\cdot\tan\beta : \tau - 3\cdot\tan\gamma\right) =: \left(e_1 : e_2 : e_3\right) = X30$$

der EULER-Geraden HM. Stets ist die Gerade $PP^{\#}$ zu HM parallel.

Man sieht sofort: Liegt $P = (u : v : w)$ auf der Kurve, so liegt auch $P^{\#}$ auf der Kurve; diese ist also zu sich selnst isogonal konjugiert. Die zu Neu gehörige kubische Kurve ist nach Joseph Jean Baptiste NEUBERG (1840 - 1926) benannt. Auf ihr liegen W, W_a, W_b, W_c, H, M, A, B und C und viele weitere Punkte[22]. Die NEUBERG-Kubik besteht (wie die Hyperbel) aus zwei Teilen: einem „eingedellten Ei" und einer „eingedellten" Gerade.



Man rechnet leicht nach, dass auch die beiden imaginären Kreispunkte auf der NEUBERG-Kubik liegen; es handelt sich also um eine *Zirkularkurve*.
Da die Kubik mit der Ferngeraden drei (nicht unbedingt reelle) Schnittpunkte hat, gibt es neben den beiden imaginären Kreispunkten noch einen weiteren, der notwendigerweise reell ist und der zur „eingedellten" Gerade gehört.

40.9 Verallgemeinerung

Die Gleichungen der DARBOUX- und der NEUBERG-Kubik haben die Form $\begin{vmatrix} \kappa & \lambda & \mu \\ u & v & w \\ u^* & v^* & w^* \end{vmatrix} = 0$. Auf dieser Kurve liegen alle Fixpunkte der isogonalen Kon-

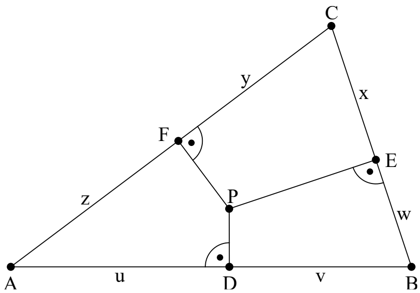
[22] https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr/Exemples/k001.html oder www.eckartschmidt.de/Neubg.pdf.

jugation, also A, B, C, W, W_a, W_b und W_c sowie $K=(\kappa:\lambda:\mu)$, ferner die Spurpunkte $K_1=(0:\lambda:\mu)$, $K_2=(\kappa:0:\mu)$, $K_3=(\kappa:\lambda:0)$ von K. Die Kubik ist entartet, falls K einer der Eckpunkte des Dreiecks ist.
Mit einem Punkt P liegt auch dessen isogonales Konjugat auf der Kurve; sie ist zu sich selbst isogonal konjugiert.

41 Kopunktalität von Loten

41.1 Das Kriterium

Die in den Punkten
$E=(0:x:w)$, $F=(y:0:z)$, $D=(v:u:0)$
errichteten Lote sind genau dann kopunktal, wenn
$AD^2+BE^2+CF^2=DB^2+EC^2+FA^2$ gilt[23].



Hieraus ergibt sich sofort ein anderer Beweis für die Kopunktalität der Mittelsenkrechten.
Ein Beweis des Lotkriteriums mit baryzentrischen Koordinaten verwendet, dass das Lot in D parallel zu $[-\tan\beta:\tan\alpha:0]=:[-t_2:t_1:0]$ ist und die Form $[v\cdot(t_2+t_3):-u\cdot(t_2+t_3):v\cdot t_1-u\cdot t_2]$ hat und weist nach, dass der Schnittpunkt zweier Lote auf dem dritten Lot liegt. Der Rechenaufwand ist nicht unerheblich.

41.2 Anwendung: Die LUCAS-Kubik

Die DARBOUX-Kubik besteht aus den Punkten P, für die AP^a, BP^b und CP^c kopunktal sind, bei denen also das Fußpunkt-Dreieck auch CEVA-Dreieck (eines anderen Punktes Q) sind.
Bei der LUCAS-Kubik ist es umgekehrt: Sie besteht aus allen Punkten P, deren CEVA-Dreieck auch Fußpunkt-Dreieck (eines anderen Punktes Q) sind.

---

[23] Ein Pythagoras benutzender Beweis findet sich etwa in Paul A. Clement (1958), The Concurrency of Perpendiculars, Am. Math. Monthly **65** (8), 601-605.

Das CEVA-Dreieck von $P=(u:v:w)$ besteht aus den Punkten $E=(0:v:w)$; $F=(u:0:w)$; $D=(u:v:0)$. Die in D, E, F errichteten Lote sind genau dann kopunktal, wenn $0=AD^2-DB^2+BE^2-EC^2+CF^2-FA^2$ gilt, wenn also

$$\begin{aligned}0&=\left(\frac{v\cdot c}{u+v}\right)^2-\left(\frac{u\cdot c}{u+v}\right)^2+\left(\frac{w\cdot a}{w+v}\right)^2-\left(\frac{v\cdot a}{w+v}\right)^2+\left(\frac{u\cdot b}{u+w}\right)^2-\left(\frac{w\cdot b}{u+w}\right)^2\\&=c^2\cdot\frac{v-u}{u+v}+a^2\cdot\frac{w-v}{v+w}+b^2\cdot\frac{u-w}{w+u}\end{aligned}$$

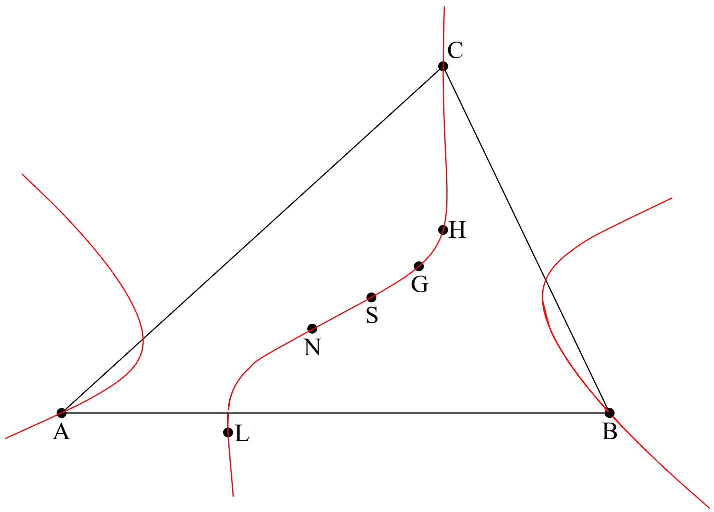
bzw.

$$\boxed{Luc(P)=\Sigma_a\cdot u\cdot\left(v^2-w^2\right)+\Sigma_b\cdot v\cdot\left(w^2-u^2\right)+\Sigma_c\cdot w\cdot\left(u^2-v^2\right)=0}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{vmatrix}1/u & 1/v & 1/w\\ \Sigma_a & \Sigma_b & \Sigma_c\\ u & v & w\end{vmatrix}=0}$$

gilt.

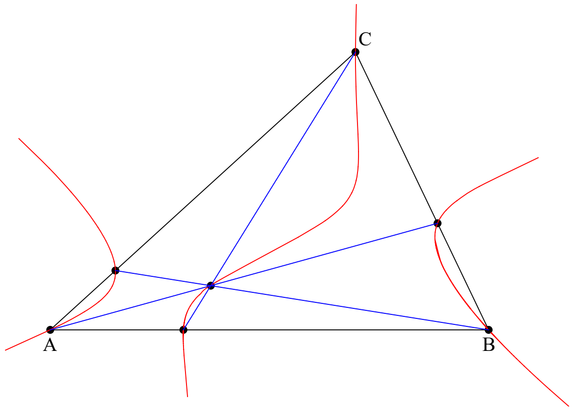


Man sieht sofort, dass A, B, C und S auf der Kurve liegen, ferner tun es u.a. auch H, G, N, L. Liegt P auf der Kurve, so tut es auch sein isotomes Konjugat. Man kann die LUCAS-Kubik als *isotome Kubik* bezeichnen.

Die Kurve schneidet BC für $u=0$, was auf die Punkte B und C sowie auf $\Sigma_b \cdot w = \Sigma_c \cdot v = 0$ und damit auf

$$\left(0:\Sigma_b:\Sigma_c\right)=\left(0:c\cdot\cos\beta:b\cdot\cos\gamma\right)=\left(0:\cot\beta:\cot\gamma\right),$$

dem Spurpunkt von $\eta^{-1}\left(\Gamma\right)=\left(\cot\alpha:\cot\beta:\cot\gamma\right)$, dem isotomen Konjugat von H, führt.



41.3 Verallgemeinerung

Die Gleichung der LUCAS-Kubik hat die Form $\begin{vmatrix} \kappa & \lambda & \mu \\ u & v & w \\ 1/u & 1/v & 1/w \end{vmatrix}=0$. Auf dieser Kurve liegen alle Fixpunkte der isotomen Konjugation sowie $K=\left(\kappa:\lambda:\mu\right)$, ferner die Spurpunkte $K_1=\left(0:\lambda:\mu\right)$, $K_2=\left(\kappa:0:\mu\right)$, $K_3=\left(\kappa:\lambda:0\right)$ von K. Mit einem Punkt P liegt auch dessen isotomes Konjugat auf der Kurve; sie ist zu sich selbst isotom konjugiert.

42 Der Abstand zwischen zwei Punkten

42.1 Erste Abstandsformeln

Für die Abstandsberechnung kann man das cartesische Koordinatensystem so wählen, dass $A=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$; $C=b\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ ist. Mit $p:=p_1+p_2+p_3$ gilt dann

$$P=(p_1:p_2:p_3)=\frac{p_1\cdot A+p_2\cdot B+p_3\cdot C}{p}=\frac{1}{p}\cdot\begin{pmatrix}p_2\cdot c+p_3\cdot b\cdot\cos\alpha\\ p_3\cdot b\cdot\sin\alpha\end{pmatrix}.$$

Nun lässt sich das Quadrat des Abstands zwischen $P=(p_1:p_2:p_3)$ und $Q=(q_1:q_2:q_3)$ mit $q:=q_1+q_2+q_3$ und

$\boxed{D=(d_1\,;\,d_2\,;\,d_3):=\left(\frac{p_1}{p}-\frac{q_1}{q}\,;\,\frac{p_2}{p}-\frac{q_2}{q}\,;\,\frac{p_3}{p}-\frac{q_3}{q}\right)}$ berechnen zu

$$PQ^2=\begin{pmatrix}\left(\frac{p_2}{p}-\frac{q_2}{q}\right)\cdot c+\left(\frac{p_3}{p}-\frac{q_3}{q}\right)\cdot b\cdot\cos\alpha\\ \left(\frac{p_3}{p}-\frac{q_3}{q}\right)\cdot b\cdot\sin\alpha\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}d_2\cdot c+d_3\cdot b\cdot\cos\alpha\\ d_3\cdot b\cdot\sin\alpha\end{pmatrix}^2$$

$$=d_2^2\cdot c^2+2\cdot d_2\cdot d_3\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha+d_3^2\cdot b^2$$

Man beachte, dass die Koordinaten von D nicht mehr homogen sind! Daher werden sie nicht durch „:“, sondern durch „;“ getrennt.

Der Formel fehlt es noch an Symmetrie. Wegen $2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$ und wegen $d_1+d_2+d_3=0$ folgt

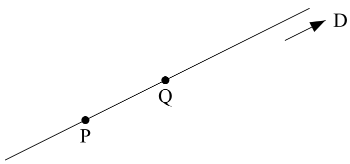
$$\boxed{PQ^2=-d_1\cdot d_2\cdot c^2-d_2\cdot d_3\cdot a^2-d_3\cdot d_1\cdot b^2}$$

und mit $P^0:=\left(\frac{p_1}{p_1+p_2+p_3}:\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}:\frac{p_3}{p_1+p_2+p_3}\right)$ schließlich

$$\boxed{PQ^2=-\mathrm{Um}\left(P^0-Q^0\right)}\ \text{ mit }\ \boxed{\mathrm{Um}\big((x:y:z)\big):=a^2\cdot y\cdot z+b^2\cdot z\cdot x+c^2\cdot x\cdot y}\,.$$

Der formal gebildete Punkt $D=P^0-Q^0$ liegt auf der Ferngeraden. Dort ist Um negativ, was das Minuszeichen in der Abstandsformel erklärt.

Da $D=P^0-Q^0$, P und Q kollinear sind, ist D der zur Geraden PQ gehörige Fernpunkt.



Man beachte, dass $\mathrm{Um}\big((\lambda\cdot u\,;\,\lambda\cdot v\,;\,\lambda\cdot w)\big)=\lambda^2\cdot\mathrm{Um}\big((u\,;\,v\,;\,w)\big)$ gilt. Beispiele:

Für $P=A$ und $Q=B$ ist $AB^2=-\mathrm{Um}\big((1\,;\,-1\,;\,0)\big)=c^2$.

Für $P=A$ und $Q=C'=(1:1:0)$ ist $AC'^2=-\mathrm{Um}\left(\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\,;0\right)\right)=\frac{c^2}{4}$.

Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned}
PQ^2 &= -\mathrm{Um}\left(P^0-Q^0\right)\\
&= -d_1\cdot d_2\cdot c^2-d_2\cdot d_3\cdot a^2-d_3\cdot d_1\cdot b^2\\
&= -\left(\frac{p_1}{p}-\frac{q_1}{q}\right)\cdot\left(\frac{p_2}{p}-\frac{q_2}{q}\right)\cdot c^2-\ldots\\
&= -\frac{p_1}{p}\cdot\frac{p_2}{p}\cdot c^2-\frac{q_1}{q}\cdot\frac{q_2}{q}\cdot c^2-\ldots+\frac{p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2}{p\cdot q}\cdot c^2+\ldots\\
&= \boxed{-\frac{\mathrm{Um}(P)}{p^2}-\frac{\mathrm{Um}(Q)}{q^2}+\frac{p_1\cdot q_2+q_1\cdot p_2}{p\cdot q}\cdot c^2+\ldots=PQ^2}
\end{aligned}$$

Es bietet sich die Abkürzung

$$\boxed{P\circ Q:=\frac{(p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1)\cdot c^2+(p_2\cdot q_3+p_3\cdot q_2)\cdot a^2+(p_3\cdot q_1+p_1\cdot q_3)\cdot b^2}{2\cdot p\cdot q}}$$

an; damit ist $\boxed{P\circ P=\frac{\mathrm{Um}(P)}{p^2}=\mathrm{Um}\left(P^0\right)}$ und

$$\boxed{PQ^2=-P\circ P-Q\circ Q+2\cdot P\circ Q=-\mathrm{Um}\left(P^0\right)-\mathrm{Um}\left(Q^0\right)+2\cdot P\circ Q}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Um}(A)=\mathrm{Um}(B)=\mathrm{Um}(C)=0$, wie es auch sein muss, da A, B und C auf dem Umkreis liegen.

Für $P=(p_1:p_2:p_3)$ mit $p:=p_1+p_2+p_3$ ist

$$PA^2=-\mathrm{Um}\left(P^0\right)+\frac{b^2\cdot p_3+c^2\cdot p_2}{p}$$

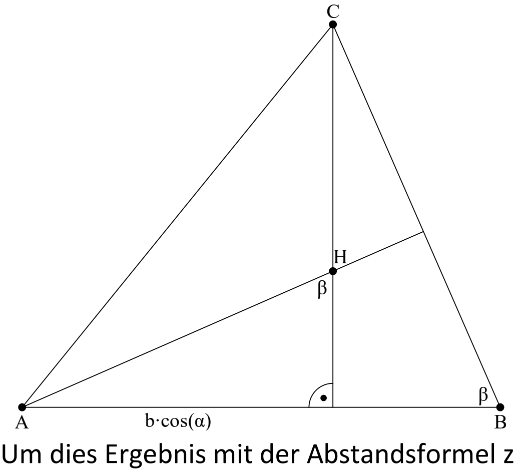
$$PB^2=-\mathrm{Um}\left(P^0\right)+\frac{c^2\cdot p_1+a^2\cdot p_3}{p}$$

$$PC^2=-\mathrm{Um}\left(P^0\right)+\frac{a^2\cdot p_2+b^2\cdot p_1}{p}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
PA^2 &= -\mathrm{Um}\left(P^0\right) + \frac{b^2\cdot p_3 + c^2\cdot p_2}{p} \\
&= \frac{-a^2\cdot p_2\cdot p_3 - b^2\cdot p_3\cdot p_1 - c^2\cdot p_1\cdot p_2 + b^2\cdot p_3\cdot\left(p_1+p_2+p_3\right) + c^2\cdot p_2\cdot\left(p_1+p_2+p_3\right)}{p^2} \\
&= \frac{-a^2\cdot p_2\cdot p_3 + b^2\cdot p_3\cdot\left(p_2+p_3\right) + c^2\cdot p_2\cdot\left(p_2+p_3\right)}{p^2} \\
&= \frac{\Sigma_a\cdot p_2\cdot p_3 + b^2\cdot p_3^2 + c^2\cdot p_2^2}{p^2} \\
&= \frac{2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha\cdot p_2\cdot p_3 + \left(b\cdot p_3 + c\cdot p_2\right)^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot p_2\cdot p_3}{p^2} \\
&= \frac{\left(b\cdot p_3 + c\cdot p_2\right)^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot p_2\cdot p_3\cdot\left(1-\cos\alpha\right)}{p^2} \\
&= \frac{\left(b\cdot p_3 + c\cdot p_2\right)^2 - 4\cdot b\cdot c\cdot p_2\cdot p_3\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{p^2}
\end{aligned}$$

42.2 Anwendung: Zum Satz von Segner und ein Trigo-Lemma



Ist H der Höhenschnitt, so ist

$\sin\beta = \frac{b\cdot\cos\alpha}{AH}$, also

$AH = \frac{b\cdot\cos\alpha}{\sin\beta} = 2\cdot R\cdot\cos\alpha$ und

damit

$$\frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{BH}{\cos\beta} = \frac{CH}{\cos\gamma} = 2\cdot R$$

nach Johann Andreas Segner (1704–1777).

Um dies Ergebnis mit der Abstandsformel zu bekommen, ist ein trigonometrisches Lemma hilfreich, das auch für sich interessant ist. Es ist

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 1},$$

denn wegen $\cos\alpha = \sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\beta\cdot\cos\gamma$ schreibt sich die linke Seite als

$$\begin{aligned}&\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma-\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\\&=\left(1-\cos^2\beta\right)\cdot\left(1-\cos^2\gamma\right)-\cos^2\beta\cdot\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\\&=1\end{aligned}$$

Mit $\tau:=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\beta$ ist

$$\begin{aligned}FA^2&=\frac{\Sigma_a\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma+b^2\cdot\tan^2\gamma+c^2\cdot\tan^2\beta}{\tau^2}\\&=\frac{2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}{\tau\cdot\tan\alpha}+\frac{b^2}{\tan^2\alpha\cdot\tan^2\beta}+\frac{c^2}{\tan^2\alpha\cdot\tan^2\gamma}\\&=\frac{4\cdot R^2}{\tan^2\alpha}\cdot\left(2\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)\\&=\frac{4\cdot R^2}{\tan^2\alpha}\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right)\\&=4\cdot R^2\cdot\cos^2\alpha\end{aligned}$$

Der Weg über die Abstandsformel ist unstrittig aufwändiger als der erste elementar-geometrische Weg, hat allerdings zu dem oben angegebenen trigonometrischen Lemma geführt.

42.3 Ein zweiter Weg zum Umkreismittelpunkt

Die bisherigen Abstandsformeln liefern *einen anderen Weg zum Umkreismittelpunkt*:

Soll $AP^2=BP^2=CP^2$ sein, muss $b^2\cdot p_3+c^2\cdot p_2=c^2\cdot p_1+a^2\cdot p_3=a^2\cdot p_2+b^2\cdot p_1$ gelten, was nach kurzer Rechnung zu

$(p_1:p_2:p_3)=(\tan\beta+\tan\gamma:\tan\gamma+\tan\alpha:\tan\alpha+\tan\beta)=M$ führt.

42.4 Zwei weitere Abstandsformeln

Die Abstands-Formel lässt sich noch umformen. Wegen $d_1+d_2+d_3=0$ ist

$$-2\cdot d_1\cdot d_2=d_1^2+d_2^3-\left(d_1+d_2\right)^2=d_1^2+d_2^3-d_3^2,$$

und man erhält die Beziehung

$$\begin{aligned}2\cdot PQ^2&=\left(d_1^2+d_2^2-d_3^2\right)\cdot c^2+\left(-d_1^2+d_2^2-d_3^2\right)\cdot a^2+\left(d_1^2-d_2^2-d_3^2\right)\cdot b^2\\&=\boxed{d_1^2\cdot\Sigma_a+d_2^2\cdot\Sigma_b+d_3^2\cdot\Sigma_c=2\cdot PQ^2}\end{aligned}$$

Wegen

$$PA^2 = -Um\left(P^0\right) + \frac{b^2 \cdot p_3 + c^2 \cdot p_2}{p}$$

$$PB^2 = -Um\left(P^0\right) + \frac{c^2 \cdot p_1 + a^2 \cdot p_3}{p}$$

$$PC^2 = -Um\left(P^0\right) + \frac{a^2 \cdot p_2 + b^2 \cdot p_1}{p}$$

ist

$$\begin{aligned}
PQ^2 &= -\frac{Um(P)}{p^2} - \frac{Um(Q)}{q^2} \\
&\quad + \frac{p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2}{p \cdot q} \cdot c^2 + \frac{p_2 \cdot q_3 + q_2 \cdot p_3}{p \cdot q} \cdot a^2 + \frac{p_3 \cdot q_1 + q_3 \cdot p_1}{p \cdot q} \cdot b^2 \\
&= -\frac{Um(P)}{p^2} - \frac{Um(Q)}{q^2} \\
&\quad + \frac{q_1}{p \cdot q} \cdot \underbrace{\left(p_3 \cdot b^2 + p_2 \cdot c^2\right)}_{p \cdot \left(PA^2 + Um\left(P^0\right)\right)} + \frac{q_2}{p \cdot q} \cdot \underbrace{\left(p_1 \cdot c^2 + p_3 \cdot a^2\right)}_{p \cdot \left(PB^2 + Um\left(P^0\right)\right)} + \frac{q_3}{p \cdot q} \cdot \underbrace{\left(p_2 \cdot a^2 + p_1 \cdot b^2\right)}_{p \cdot \left(PC^2 + Um\left(P^0\right)\right)} \\
&= -Um\left(P^0\right) - Um\left(Q^0\right) \\
&\quad + \frac{q_1}{q} \cdot \left(PA^2 + Um\left(P^0\right)\right) + \frac{q_2}{q} \cdot \left(PB^2 + Um\left(P^0\right)\right) + \frac{q_3}{q} \cdot \left(PC^2 + Um\left(P^0\right)\right) \\
&= \boxed{-Um\left(Q^0\right) + \frac{q_1}{q} \cdot PA^2 + \frac{q_2}{q} \cdot PB^2 + \frac{q_3}{q} \cdot PC^2 = PQ^2}
\end{aligned}$$

42.5 Anwendung: Abstand zwischen den Ankreismittelpunkten

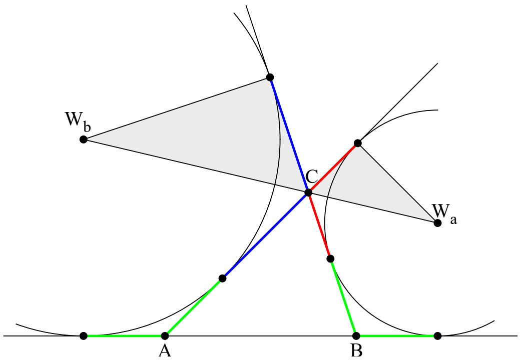
Wegen

$$
\begin{aligned}
\left(W_bW_c\right)^2 &= -\frac{Um\left(W_b\right)}{\sigma_b^2}-\frac{Um\left(W_c\right)}{\sigma_c^2} \\
&\quad +\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{\sigma_b\cdot\sigma_c}\cdot c^2+\frac{p_1\cdot q_3+p_3\cdot q_1}{\sigma_b\cdot\sigma_c}\cdot b^2+\frac{p_2\cdot q_3+p_3\cdot q_2}{\sigma_b\cdot\sigma_c}\cdot a^2 \\
&= \frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma_b}+\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma_c}+\frac{a\cdot b-b\cdot a}{\sigma_b\cdot\sigma_c}\cdot c^2+\frac{-a\cdot c+c\cdot a}{\sigma_b\cdot\sigma_c}\cdot b^2+\frac{b\cdot c+c\cdot b}{\sigma_b\cdot\sigma_c}\cdot a^2 \\
&= \frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma_b\cdot\sigma_c}\cdot\left(\sigma_b+\sigma_c+2\cdot a\right)=\frac{a\cdot b\cdot c}{-\Sigma_a+2\cdot b\cdot c}\cdot 4\cdot a=\frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot b\cdot c\cdot\left(1-\cos\alpha\right)}\cdot 4\cdot a \\
&= \frac{2\cdot a^2}{2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}
$$

ist $\boxed{W_bW_c=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

Das hätte man auch rein-geometrisch sehen können:

Die blauen Strecken haben alle die Länge $s_a:=\frac{-a+b+c}{2}$, die roten Strecken haben alle die Länge $s_b:=\frac{a-b+c}{2}$, die grünen Strecken haben alle die Länge $s_c:=\frac{a+b-c}{2}$.



In dem getönten Dreieck, das CW_a als Hypotenuse hat, ist $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{s_b}{CW_a}$, also

ist $CW_a=\frac{s_b}{\sin\frac{\gamma}{2}}$; analog gilt $CW_b=\frac{s_a}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ und damit

$W_aW_b=\frac{s_a+s_b}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\boxed{\frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}=W_aW_b}$. Analog ist $\boxed{W_bW_c=\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

Wegen $c=2\cdot R\cdot\sin\gamma=2\cdot R\cdot 2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$ gilt auch

$$\boxed{W_aW_b=4\cdot R\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Diese Formeln stimmen mit den vorherigen überein wegen

$$4\cdot b\cdot c\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}=2\cdot b\cdot c\cdot\left(1-\cos\alpha\right)=2\cdot b\cdot c-b^2-c^2+a^2=a^2-\left(b-c\right)^2=\sigma_b\cdot\sigma_c\,.$$

42.6 Anwendung: Abstand zwischen In- und Ankreismittelpunkt

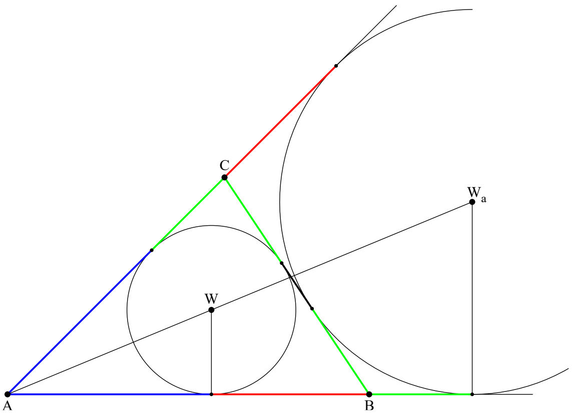
Wegen

$$\begin{aligned}\left(WW_a\right)^2&=-\frac{Um\left(W\right)}{\sigma^2}-\frac{Um\left(W_a\right)}{\sigma_a^2}+\frac{a\cdot b-a\cdot b}{\sigma\cdot\sigma_a}\cdot c^2+\frac{2\cdot b\cdot c}{\sigma\cdot\sigma_a}\cdot a^2+\frac{a\cdot c-a\cdot c}{\sigma\cdot\sigma_a}\cdot b^2\\&=-\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma}+\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma_a}+\frac{2\cdot a\cdot b\cdot c}{\sigma\cdot\sigma_a}\cdot a=\frac{a\cdot b\cdot c}{\Sigma_a+2\cdot b\cdot c}\cdot\left(-\sigma_a+\sigma+2\cdot a\right)\\&=\frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot b\cdot c\cdot\left(1+\cos\alpha\right)}\cdot 4\cdot a=\frac{2\cdot a^2}{2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

ist $\boxed{WW_a=\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$.

Der elementar-geometrische Weg verläuft wie folgt:

Die blauen Strecken haben alle die Länge $s_a := \frac{-a+b+c}{2}$, die roten Strecken alle die Länge $s_b := \frac{a-b+c}{2}$, die grünen Strecken alle die Länge $s_c := \frac{a+b-c}{2}$.



Im Dreieck mit AW als Hypotenuse ist $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma_a}{AW}$, im Dreieck mit AW_a als Hypotenuse ist $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma}{AW_a}$ mit $\sigma = \frac{a+b+c}{2}$.

Dann ist $WW_a = AW_a - AW = \frac{\sigma}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sigma_a}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \boxed{\frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} = WW_a}$.

Wegen $c = 2\cdot R\cdot\sin\gamma = 2\cdot R\cdot 2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$ gilt auch

$$\boxed{WW_a = 4\cdot R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

42.7 Anwendung: Abstand zwischen In- und Umkreismittelpunkt

Für $M = \left(a^2\cdot\Sigma_a : b^2\cdot\Sigma_b : c^2\cdot\Sigma_c\right) =: \left(m_1 : m_2 : m_3\right)$ mit

$$m = a^2\cdot\Sigma_a + b^2\cdot\Sigma_b + c^2\cdot\Sigma_c = 2\cdot\left(a^2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha + b^2\cdot c\cdot a\cdot\cos\beta + c^2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma\right)$$

$$= 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\left(a\cdot\cos\alpha + b\cdot\cos\beta + c\cdot\cos\gamma\right) = \boxed{2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\frac{2\cdot\Delta}{R} = m}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Um}(M) &= a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot\Sigma_b\cdot\Sigma_c+\ldots = a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot(\Sigma_b\cdot\Sigma_c+\ldots)\\ &= a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot 4\cdot(c\cdot a\cdot\cos\beta\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma+\ldots)\\ &= a^3\cdot b^3\cdot c^3\cdot 4\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\left(\frac{a}{\cos\alpha}+\ldots\right)\\ &= a^3\cdot b^3\cdot c^3\cdot 4\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot 2\cdot R\cdot\tau\\ &= 8\cdot R\cdot a^3\cdot b^3\cdot c^3\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = 8\cdot R\cdot a^3\cdot b^3\cdot c^3\cdot\frac{a}{2\cdot R}\cdot\frac{b}{2\cdot R}\cdot\frac{c}{2\cdot R}\\ &= \frac{a^4\cdot b^4\cdot c^4}{R^2} = \boxed{a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot 16\cdot\Delta^2 = \mathrm{Um}(M)}\end{aligned}$$

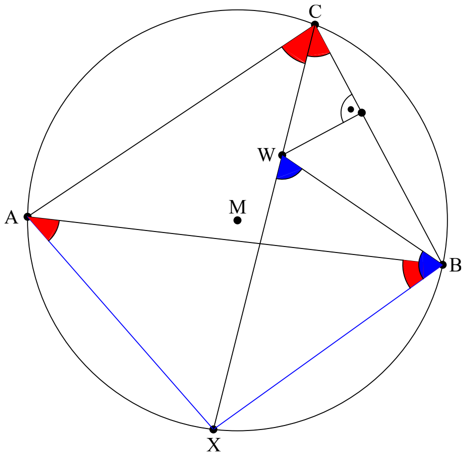
sowie für $W=(a:b:c)$ mit $w=\sigma$ und

$$\mathrm{Um}(W) = a^2\cdot b\cdot c+b^2\cdot c\cdot a+c^2\cdot a\cdot b = a\cdot b\cdot c\cdot\sigma$$

ist der Abstand zwischen M und W gegeben durch

$$\begin{aligned}WM^2 &= -\frac{\mathrm{Um}(W)}{w^2}-\frac{\mathrm{Um}(M)}{m^2}+\frac{a\cdot m_2+b\cdot m_1}{w\cdot m}\cdot c^2+\frac{a\cdot m_3+c\cdot m_1}{w\cdot m}\cdot b^2+\ldots\\ &= -\frac{a\cdot b\cdot c\cdot\sigma}{\sigma^2}-\frac{a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot 16\cdot\Delta^2}{16\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot\frac{\Delta^2}{R^2}}+\frac{a\cdot b\cdot(a+b)\cdot m_3+b\cdot c\cdot(b+c)\cdot m_1+\ldots}{\sigma\cdot 4\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\frac{\Delta}{R}}\\ &= -\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma}-R^2+R\cdot\frac{a\cdot b\cdot(a+b)\cdot c^2\cdot\Sigma_c+b\cdot c\cdot(b+c)\cdot a^2\cdot\Sigma_a+\ldots}{\sigma\cdot 4\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\Delta}\\ &= -\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma}-R^2+R\cdot\frac{(a+b)\cdot c\cdot\Sigma_c+(b+c)\cdot a\cdot\Sigma_a+(c+a)\cdot b\cdot\Sigma_b}{\sigma\cdot 4\cdot\Delta}\\ &= -\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma}-R^2+R\cdot\frac{a\cdot c\cdot(\Sigma_c+\Sigma_a)+\ldots}{\sigma\cdot 4\cdot\Delta}\\ &= -\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma}-R^2+2\cdot R\cdot\frac{a\cdot c\cdot b^2+a\cdot b\cdot c^2+b\cdot c\cdot a^2}{\sigma\cdot 4\cdot\Delta}\\ &= -\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma}-R^2+R\cdot\frac{a\cdot b\cdot c}{2\cdot\Delta} = -\frac{a\cdot b\cdot c}{\sigma}-R^2+R\cdot 2\cdot R = R^2-\frac{4\cdot\Delta\cdot R}{\sigma}\\ &= \boxed{R^2-2\cdot\rho\cdot R = WM^2}\end{aligned}$$

Das hatte auf anderem Weg schon EULER gefunden. Insbesondere das letzte Beispiel zeigt, dass man Abstände zwar mit baryzentrischen Koordinaten ausrechnen *kann*, es jedoch nicht unbedingt tun *sollte*. Ein synthetischer Beweis ist etwa der folgende[24]:



Es ist $CW = \frac{\rho}{\sin\frac{\gamma}{2}}$.

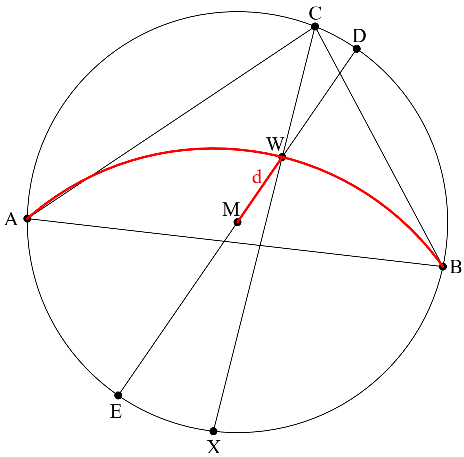
Die Gerade CW trifft den Umkreis wieder in X.

Das Dreieck ABX ist gleichschenklig, und wegen $\sin\gamma = \frac{c}{2\cdot R}$ ist

$$XA = XB = \frac{c/2}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{R\cdot\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma}{2}} = 2\cdot R\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

Der blaue Winkel bei W hat die Größe $180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta+\gamma}{2}$ und damit dieselbe Größe wie der blaue Winkel bei B.

Daher ist $XW = XA = XB$, und A, B und W liegen auf einem Kreis um X.



Nach dem Sehnensatz ist $EW\cdot WD = XW\cdot WC$ bzw.

$$(R+d)\cdot(R-d) = 2\cdot R\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\rho}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$= 2\cdot R\cdot\rho$$

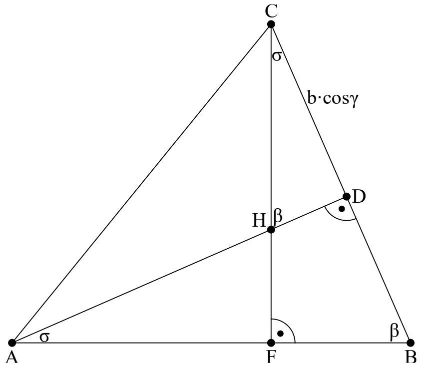
bzw. $\boxed{d^2 = R^2 - 2\cdot R\cdot\rho}$.

---

[24] angeregt durch Yiu 2005, Elegant Geometric Constructions, in: Forum Geometricorum **5**, 75–96. Weitere synthetische Beweise finden sich in Müller-Sommer 2022: Entdeckungen im Umfeld der Abstandsformel von EULER und CHAPPLE, in: Der Mathematikunterricht **68** (4), 17-31.

42.8 Abstände auf Höhen

Hier schlagen wir gleich einen geometrischen Weg ein:



$\sin\sigma = \frac{HF}{AH} = \frac{HD}{CH}$, also $\boxed{AH \cdot HD = CH \cdot HF}$.

Die Frage ist, wie groß dieses Produkt ist.

Wegen $\sin\beta = \frac{b \cdot \cos\gamma}{CH}$ ist

$$CH = \frac{b \cdot \cos\gamma}{\sin\beta} = \boxed{2 \cdot R \cdot \cos\gamma = CH}.$$

Ferner ist $CF = b \cdot \sin\alpha$, also

$$\frac{CH}{CF} = \frac{b \cdot \cos\gamma}{b \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{-\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = 1 - \cot\alpha \cdot \cot\beta.$$

Andererseits ist $\frac{CH}{CF} = \frac{CF - HF}{CF} = 1 - \frac{HF}{CF}$ und somit $\frac{HF}{CF} = \cot\alpha \cdot \cot\beta$, also

$$\begin{aligned} HF &= CF \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta = b \cdot \sin\alpha \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta \\ &= 2 \cdot R \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta \\ &= \boxed{2 \cdot R \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = HF} \end{aligned}$$

und damit $\boxed{CH \cdot HF = (2 \cdot R)^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}$.

42.9 Besonderheiten bei der Abstandsmessung. Isotropie

Auf der Geraden durch $A = (1:0:0)$ und den imaginären Kreispunkt $K^+ = \left(-a : b \cdot e^{-i\cdot\gamma} : c \cdot e^{i\cdot\beta}\right)$ liegt $A' = \left(0 : \frac{b}{a} \cdot e^{-i\cdot\gamma} : \frac{c}{a} \cdot e^{i\cdot\beta}\right)$ (mit normierten Koordinaten). Für den Abstand zwischen A und A‘ braucht man

$d_1 = -1;\ d_2 = \frac{b}{a} \cdot e^{-i\cdot\gamma};\ d_3 = \frac{c}{a} \cdot e^{i\cdot\beta}$ und erhält wegen

$$\begin{aligned} e^{i\cdot\alpha} \cdot e^{i\cdot\beta} &= (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta) \\ &= \cos a \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta + i \cdot [\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha] \\ &= -\cos\gamma + i \cdot \sin\gamma \\ &= -e^{-i\cdot\gamma} \end{aligned}$$

das überraschende Resultat:

$$AA'^2 = -d_1 \cdot d_2 \cdot c^2 - d_2 \cdot d_3 \cdot a^2 - d_3 \cdot d_1 \cdot b^2 = c^2 \cdot \frac{b}{a} \cdot e^{-i\cdot\gamma} + b^2 \cdot \frac{c}{a} \cdot e^{i\cdot\beta} - b \cdot c \cdot e^{i\cdot(\beta-\gamma)}$$

$$= \frac{c \cdot b}{a} \cdot e^{-i\cdot\gamma} \cdot \left[c + b \cdot e^{i\cdot(\beta+\gamma)} - a \cdot e^{i\cdot\beta}\right] = \frac{c \cdot b}{a} \cdot e^{-i\cdot\gamma} \cdot \left[c - b \cdot e^{-i\cdot\alpha} - a \cdot e^{i\cdot\beta}\right]$$

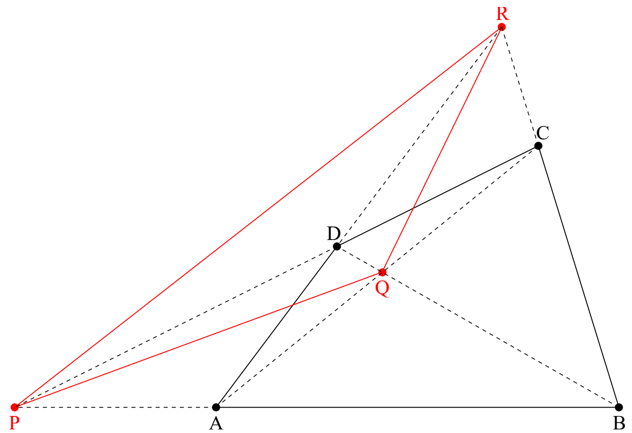
$$= \frac{c \cdot b}{a} \cdot e^{-i\cdot\gamma} \cdot \left[c - b \cdot (\cos\alpha - i \cdot \sin\alpha) - a \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta)\right] = 0$$

Es gilt sogar: Jede Gerade durch einen der imaginären Kreispunkte ist *isotrop*: Der Abstand zweier Punkte auf einer solchen Geraden[25] verschwindet.

43 Vierecke und deren NEWTON-Gerade

43.1 Rückführung auf ein Dreieck

ABCD sei ein Viereck, bei dem keine zwei Gegenseiten zueinander parallel sind.
AB und CD schneiden sich in P,
AC und BD schneiden sich in Q,
AD und BC schneiden sich in R.



Man nehme nun PQR als Bezugsdreieck. Ist $D = (u : v : w)$, so ist

$$A = (u : v : -w);\ B = (u : -v : w);\ C = (-u : v : w).$$

Ferner ist $AB = [0 : w : v]$ und $CD = [0 : w : -v]$, also $P = (1 : 0 : 0)$

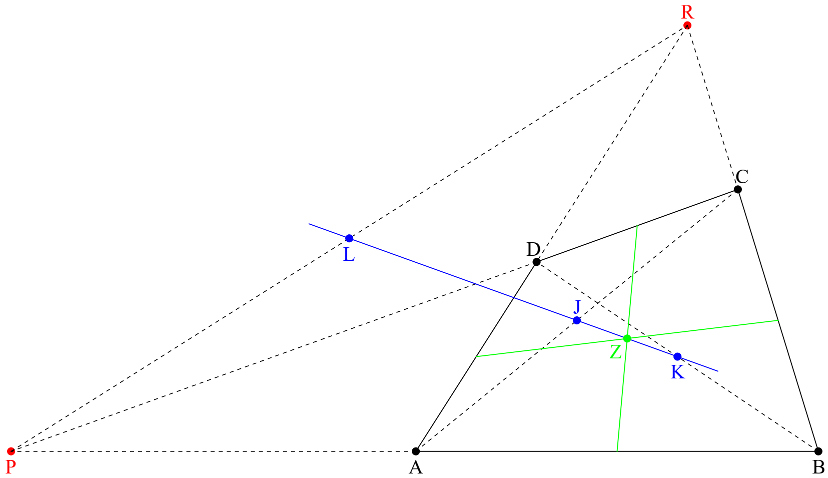
sowie $AC = [w : 0 : u]$ und $BD = [-w : 0 : u]$, also $Q = (0 : 1 : 0)$

sowie $AD = [v : -u : 0]$ und $BC = [v : u : 0]$, also $R = (0 : 0 : 1)$.

[25] F. Klein: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Nachdruck 1968, Berlin: Springer, S. 131 ff.

43.2 Die Newton-Gerade eines Vierecks

ABCD sei ein Viereck, bei dem keine zwei Gegenseiten zueinander parallel sind.



Der Mittelpunkt von AC ist $J=\left(u^2-u\cdot w : -v^2 : w^2-u\cdot w\right)$; der Mittelpunkt von BD ist $K=\left(u^2+u\cdot w : -v^2 : w^2+u\cdot w\right)$. Der Mittelpunkt von PR ist $L=\left(1:0:1\right)$.

Die drei Mittelpunkte J, K, L liegen auf der nach Isaac Newton benannten Geraden[26] $\left[v^2 : u^2-w^2 : -v^2\right]$.

Der (grüne) Mittelpunkt

$$Z=\frac{J+K}{2}=\frac{\frac{A+C}{2}+\frac{B+D}{2}}{2}=\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{C+D}{2}}{2}=\frac{\frac{A+D}{2}+\frac{B+C}{2}}{2}$$

ist trivialerweise auch Schnittpunkt der Verbindungsgeraden gegenüber liegender Seitenmittelpunkte.

[26] Mehrere synthetische Beweise finden sich in J.-L. Ayme: Méthodes & techniques en géométrie à propos de la droite de Newton. 2003 Paris: Ellipses Èdition.