

# Cartesische Ovale

## als Verallgemeinerungen der Kegelschnitte

### Inhalt

1. Worum geht es? .....	3
2. Erste Überlegungen .....	3
3. Erinnerung an den Apollonius-Kreis .....	4
4. Konstruktion der Mittelpunkts-Kegelschnitte .....	4
5. Die Parameter $\mu=PK/PF$ und $w=p/f$ .....	5
6. Ellipsen ( $\mu < 1 < w$ ) .....	6
Berührung des Apollonius-Kreises und Tangenten .....	7
Parametrisierung .....	7
Der Inversionskreis um G führt zum dritten Brennpunkt .....	8
Auch der Inversionskreis um F führt zum dritten Brennpunkt .....	9
Der Inversionskreis um H .....	10
Eine optische Anwendung .....	11
Schnittpunkte mit der Achse GF .....	13
„Unendlich ferne“ Kreispunkte .....	13
Von $\alpha$ zu $180^\circ + \alpha$ .....	13
Weitere Punkte .....	14
7. Ellipsen ( $1 < \mu < w$ ) .....	15
Schnittstellen mit der Achse GF .....	15
Parametrisierung .....	15
Der Inversionskreis um F .....	16
Der dritte Brennpunkt .....	17
Der Inversionskreis um H .....	18
Von $\alpha$ zu $180^\circ + \alpha$ .....	19
Weitere Punkte .....	19
8. Ellipsen ( $1 < w < \mu$ ) .....	19
9. Ellipsen ( $1 < w = \mu$ ): Limaçon .....	20
Schnittstellen mit der Achse GF .....	20
Die Limaçon als anallagmatische Kurve .....	20
G als dritter Brennpunkt .....	21
10. Hyperbeln ( $\mu < w < 1$ ) .....	22
Dritter Brennpunkt .....	22

Schnittstellen mit der Achse GF .....	23
Der Inversionskreis um G .....	23
Der Inversionskreis um F .....	23
Der Inversionskreis um H .....	24
11. Hyperbeln ( $w < \mu < 1$ ).....	24
Der Inversionskreis um G und der dritte Brennpunkt.....	25
Der Inversionskreis um F .....	25
Der Inversionskreis um H .....	26
Schnittstellen mit der Achse GF .....	26
12. Hyperbeln ( $w < 1 < \mu$ ).....	26
13. Hyperbeln ( $\mu = w < 1$ ): Limaçon .....	27
Auch diese Limaçon ist anallagmatisch .....	27
14. Zusammenfassung des Bisherigen .....	27
$\mu < 1 < w$ .....	27
$1 < \mu < w$ .....	28
$1 < w = \mu$ (Limaçon).....	30
$\mu < w < 1$ .....	30
$w < \mu < 1$ .....	31
$w = \mu < 1$ (Limaçon).....	32
15. Punkte, die zu zwei Kreisen ein festes Abstandsverhältnis $\mu$ haben.....	33
Disjunkter Fall, $\mu = 1$ .....	33
Disjunkter Fall, $\mu \neq 1$ .....	34
Inklusiver Fall, $\mu = 1$ .....	37
Inklusiver Fall, $\mu \neq 1$ .....	37

## 1. Worum geht es?

Cartesische Ovale sind Verallgemeinerungen der Kegelschnitte.

Die Punkte einer Parabel haben zu einem Brennpunkt und zu einer Leitgerade gleichen Abstand.

Die Punkte einer Ellipse oder einer Hyperbel haben zu einem Brennpunkt und zu einer Leitgeraden ein konstantes Abstandsverhältnis.

Ellipse und Hyperbel lassen sich bekanntlich auch dadurch charakterisieren, dass ihre Punkte zu einem Brennpunkt und einem Leitkreis gleichen Abstand haben.

Die Punkte der cartesischen Ovale haben zu einem Brennpunkt und einem Leitkreis ein konstantes Abstandsverhältnis. Cartesische Ovale lassen sich auch dadurch charakterisieren, dass ihre Punkte zu zwei Kreisen ein konstantes Abstandsverhältnis haben.

Cartesische Ovale haben drei Brennpunkte (von denen zwei zusammenfallen können). Sie sind darüber hinaus anallagmatisch, d.h. sie gehen bei einer Kreis-Inversion in sich über, und das sogar in mehrfachem Sinne.

Sind zwei Brennpunkte G und F gegeben und bezeichnet XY den (vorzeichenlosen) Abstand zwischen den Punkten X und Y, so bestehen cartesische Ovale aus allen Punkten P mit  $\alpha \cdot GP \pm \beta \cdot FP = \gamma \cdot GF$  oder  $\alpha \cdot GP - \beta \cdot FP = \pm \gamma \cdot GF$ ; sie treten also (im Gegensatz zu Kegelschnitten) stets paarweise auf.

DESCARTES war auf die Ovale durch ein Linsenproblem gekommen; dieser Weg wird hier nicht verfolgt. Allerdings wird (in Abschnitt 6) gezeigt, dass es zwei Punkte G und H gibt, so dass alle von G ausgehenden Lichtstrahlen sich nach Durchgang durch ein (passendes) cartesisches Oval sich in H versammeln.

## 2. Erste Überlegungen

Die sich ergebenden Ovale mit  $\alpha \cdot GP \pm \beta \cdot FP = a = \gamma \cdot GF$  oder  $\alpha \cdot GP - \beta \cdot FP = \pm \gamma \cdot GF$  sind symmetrisch

zur durch  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$  gegebenen Achse.

Für  $\gamma = \alpha$  ist  $GP \pm \frac{\beta}{\alpha} \cdot FP = GF$  bzw.  $GP - \frac{\beta}{\alpha} \cdot FP = \pm GF$ , und diese Gleichung wird durch  $P=F$  erfüllt, so dass F auf der Kurve liegt. Für  $\gamma = \beta$  liegt G auf der Kurve.

Ist  $\alpha \cdot GP + \alpha \cdot FP = \gamma \cdot GF$ , bekommt man für  $\gamma > \alpha$  eine Ellipse.

Ist  $\alpha \cdot GP - \alpha \cdot FP = \pm \gamma \cdot GF$ , bekommt man für  $\gamma < \alpha$  eine Hyperbel.

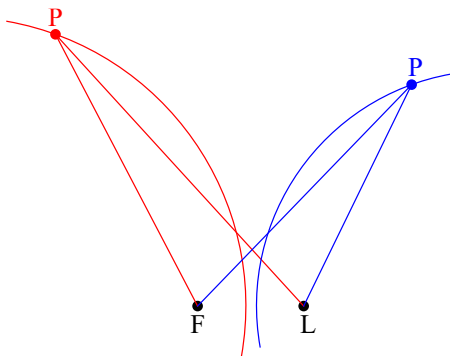
Die Kegelschnitt-Fälle seien daher ausgeschlossen.

Ist  $\alpha = \beta = \gamma$ , so bekommt man nur Punkte auf der Achse durch G und F; dieser Fall sei daher ebenfalls ausgeschlossen.

Noch eine Bemerkung zur **Nomenklatur**: Da die cartesischen Ovale paarweise auftreten, besteht die Kurve aus jeweils zwei Ovalen, von denen eines zu einem Punkt verkümmert oder auch nicht mehr reell sein kann.

### 3. Erinnerung an den Apollonius-Kreis

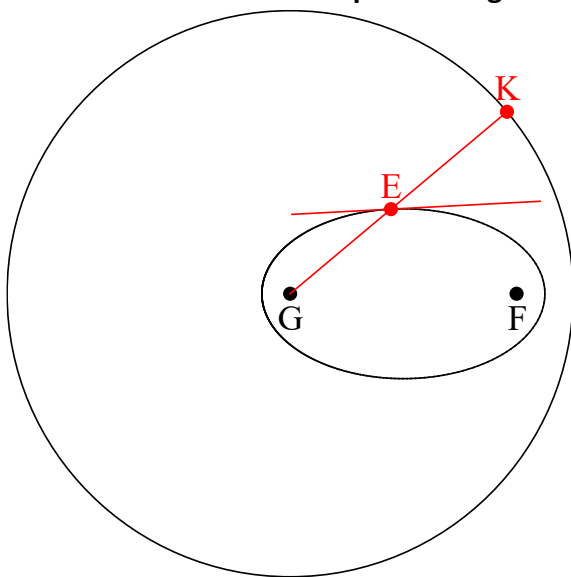
Ersetzt man „gleicher Abstand zu zwei Punkten“ durch „gleiches Abstandsverhältnis zu zwei Punkten“, muss man von einer Mittelsenkrechten zum Apollonius-Kreis übergehen:



Die **Mittelsenkrechte** zu FL besteht aus allen Punkten P mit  $\frac{PL}{PF} = 1$ .

Der **Apollonius-Kreis** zu FL besteht aus allen Punkten P, deren Abstandsverhältnis  $\frac{PL}{PF}$  einen konstanten Wert  $\mu$  hat. Im Bild links hat der rote Kreis  $\mu = 1,2$  und der blaue  $\mu = 0,8$ .

### 4. Konstruktion der Mittelpunkts-Kegelschnitte



Eine **Ellipse** besteht aus allen Punkten E, die zu einem Kreis um  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit Radius  $\rho$  und einem Brennpunkt  $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ , der **innerhalb** des Kreises liegt, den gleichen Abstand haben.

Ist  $\rho = w \cdot f$ , so ist  $w > 1$ .

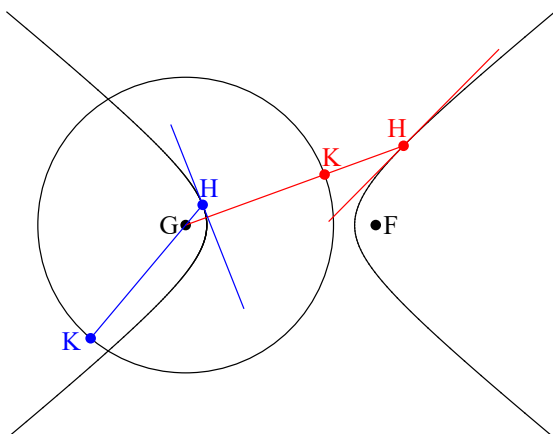
Mit „Abstand zum Kreis“ ist der *minimale* Abstand gemeint.

Das führt zur Konstruktion: K wandere auf dem Kreis. Ist E der Schnittpunkt von GK und der Mittelsenkrechten zu FK, so hat E den gleichen Abstand zu K und zu F.

Es ist  $EF = EK = \rho - EG$  und damit

$EF + EG = \rho = w \cdot f$  mit  $w > 1$ , und das ist die übliche Ellipsen-Eigenschaft.

Die Mittelsenkrechte zu FK ist Tangente in E.



Liegt F **außerhalb** des Kreises und überträgt man die Konstruktionsvorschrift der Ellipsen, bekommt man eine **Hyperbel**.

Ist  $\rho = w \cdot f$ , so ist nun  $w < 1$ .

Für Hyperbelpunkte H auf dem rechten Ast ist  $HF = HK = HG - \rho$ , und für Hyperbelpunkte H auf dem linken Ast ist  $HF = HK = HG + \rho$  und daher

$FH - GH = \pm \rho = \pm w \cdot f$  mit  $w < 1$ . Das ist die übliche Hyperbel-Eigenschaft.

Die Übertragung der Konstruktionsvorschrift führt dazu, dass auf dem linken Ast ist der

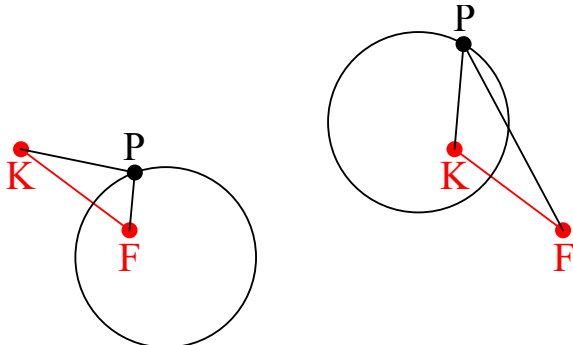
„Abstand zum Kreis“ der *maximale* Abstand ist.

Die Mittelsenkrechte zu FK ist Tangente in H.

Im Folgenden wird bei der Konstruktion die Mittelsenkrechte durch einen Apollonius-Kreis ersetzt.

Vorab noch eine Erinnerung an die beiden wesentlichen Parameter:

**5. Die Parameter  $\mu = PK/PF$  und  $w = \rho/f$**



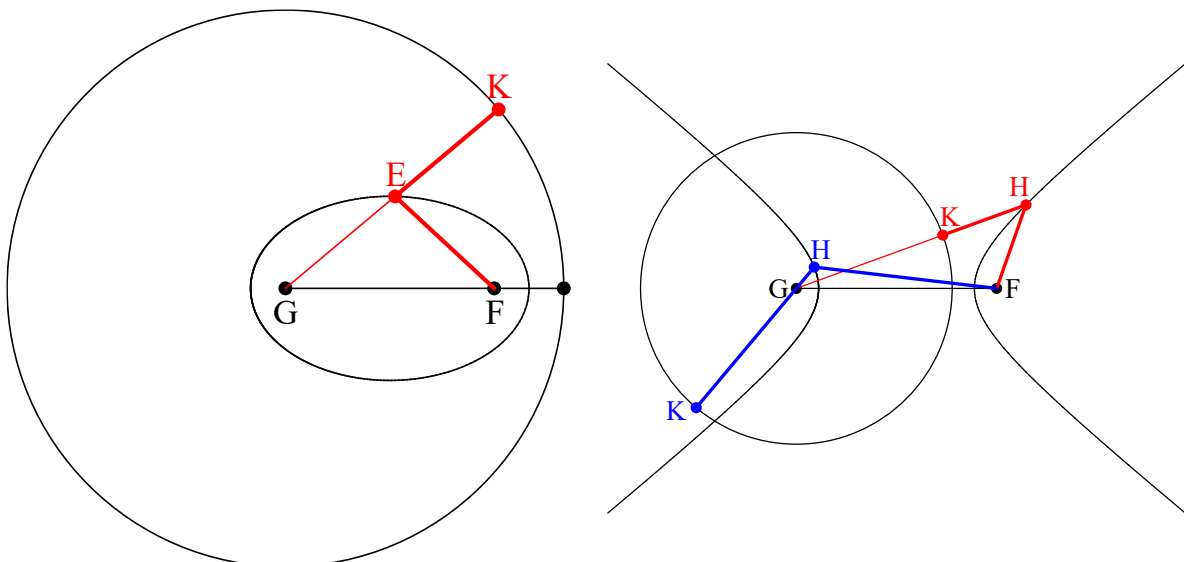
Der Apollonius-Kreis zu F und K besteht aus allen

Punkten P mit  $\frac{PK}{PF} = \mu \neq 1$ .

Links ist  $\mu = 2$ , rechts ist  $\mu = \frac{1}{2}$ .

Alle Punkte, die zu einem Brennpunkt F und zu einem Leitkreis um G mit dem Radius  $\rho$  gleichen Abstand haben, bilden eine Ellipse, wenn F innerhalb des Leitkreises liegt, und eine Hyperbel, falls F außerhalb des Leitkreises liegt.

Ist  $\rho = w \cdot f$ , so ist  $w > 1$  für Ellipsen und  $w < 1$  für Hyperbeln.

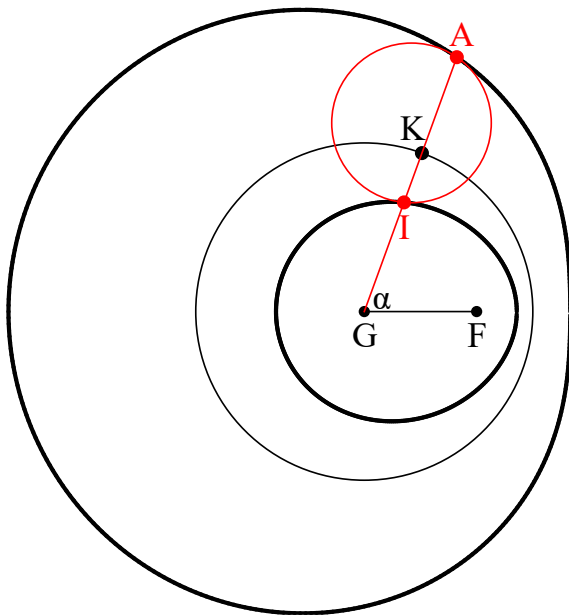


Links ist  $EK = EF$ , rechts ist  $HK = HF$  sowohl für die roten Punkte als auch für die blauen Punkte.

Im Folgenden werden die von Ellipsen ( $w > 1$ ) herrührenden Fälle für verschiedene Werte von  $\mu$  ( $\mu < 1 < w$ ,  $1 < \mu < w$ ,  $1 < w < \mu$ ) sowie anschließend die von Hyperbeln ( $w < 1$ ) herrührenden Fälle gesondert betrachtet. Der erste Fall (Ellipsen mit  $\mu < 1$ ) wird ausführlicher behandelt; da die Methoden auch für die weiteren Fälle zum Ziel führen, werden dann nur die Ergebnisse angegeben.

### 6. Ellipsen ( $\mu < 1 < w$ )

Wir haben einen Kreis um  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit dem Radius  $\rho$ , und auf diesem Leitkreis wandert der Punkt K.



Bei der *Ellipse* liegt der Brennpunkt  $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$

*innerhalb* des (schwarzen) Leitkreises um G mit dem Radius  $\rho = w \cdot f$  ( $w > 1$ ).

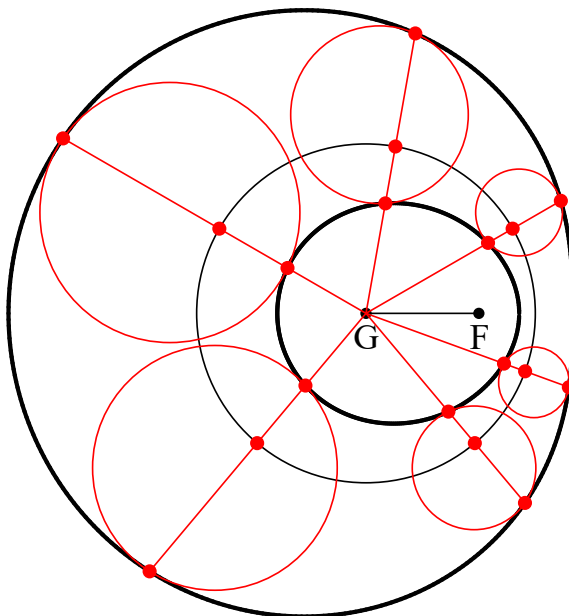
Man bekommt Ellipsenpunkte als Schnittpunkte von GK mit der Mittelsenkrechten zu KF. In der Verallgemeinerung bekommt man Kurvenpunkte als Schnittpunkte von GK mit dem (roten) Apollonius-Kreis zu F und K mit  $\frac{PK}{PF} = \mu$ . Da GK den Apollonius-Kreis zweimal schneidet, sind für jeden Kreispunkt K zwei Kurvenpunkte I und A zu erwarten.

Es ist  $\mu = \frac{KI}{FI} = \frac{\rho - GI}{FI}$  bzw.  $\boxed{GI + \mu \cdot FI = w \cdot f}$  und

$\mu = \frac{KA}{FA} = \frac{GA - \rho}{FA}$  bzw.  $\boxed{GA - \mu \cdot FA = w \cdot f}$ .

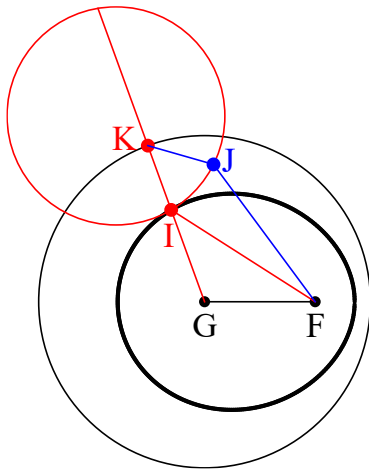
Durch  $\boxed{GP \pm \mu \cdot FP = w \cdot f}$  werden alle Punkte P auf den Ovalen beschrieben.

Wegen  $\mu = \frac{FI}{KI} = \frac{FA}{KA}$  ist  $\frac{FI}{FA} = \frac{KI}{KA}$ , daher halbiert FK den Winkel IFA.



Man hat für jeden Punkt K auf dem (dünnen schwarzen) Leitkreis um G die vom äußeren Oval ausgehend die Reihenfolge AKIG. Die obigen eingekastelten Formeln sind daher allgemein gültig.

**Berührung des Apollonius-Kreises und Tangenten**



Offenbar **berührt** der Apollonius-Kreis die Ovale in I und in A. Warum ist das so?

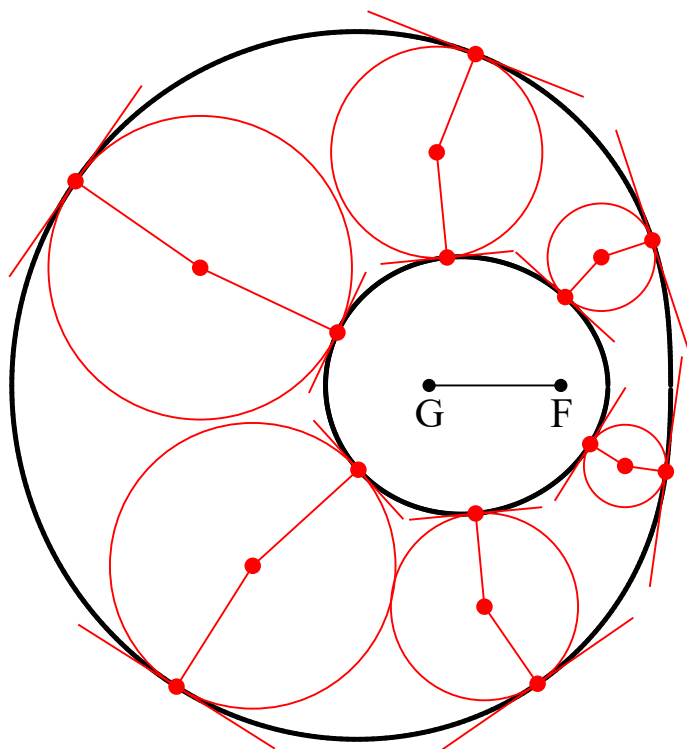
Ist J ein weiterer Punkt mit  $\mu = \frac{FI}{KI} = \frac{FJ}{KJ}$ , so ist der Abstand von J

zum Leitkreis kleiner als IK, daher kann J nicht auf dem Oval liegen.

Oval und Apollonius-Kreis haben daher nur einen Punkt gemeinsam.

Analog argumentiert man für A.

Aus der Berühreigenschaft folgt die **Tangenten**konstruktion. Markiert sind jeweils die Mittelpunkte der Apollonius-Kreise.



**Parametrisierung**

Wendet man in den Dreiecken GFA und GFI den Cosinussatz an, bekommt man eine Parametrisierung der Ovale:

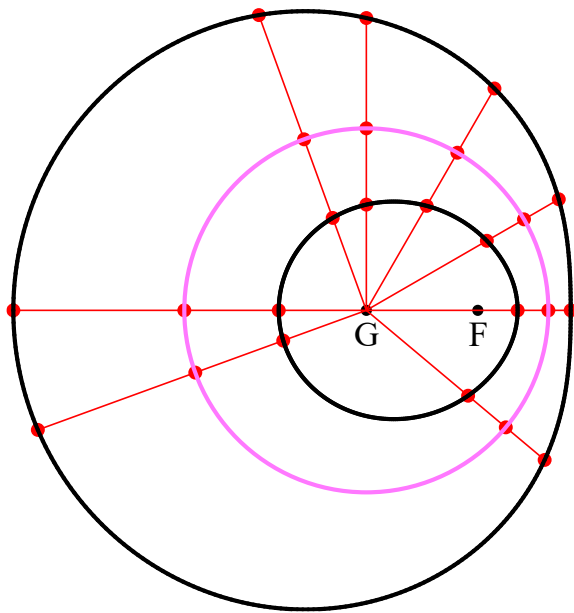
Für jeden Punkt P auf den Ovalen gilt  $FP^2 = f^2 + GP^2 - 2 \cdot f \cdot GP \cdot \cos \alpha$  und andererseits

$$FP = \pm \frac{1}{\mu} \cdot (\rho - GP), \text{ also } \boxed{GP^2 - 2 \cdot GP \cdot \frac{w - \mu^2 \cdot \cos \alpha}{1 - \mu^2} \cdot f + \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot f^2 = 0} \quad (*)$$

Die Diskriminante

$$\left( \frac{w - \mu^2 \cdot \cos \alpha}{1 - \mu^2} \right)^2 \cdot f^2 + \frac{(\mu^2 - w^2)}{1 - \mu^2} \cdot f^2 = f^2 \cdot \mu^2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cdot (1 - \mu^2) + (w - \cos \alpha)^2}{(1 - \mu^2)^2}$$

dieser quadratischen Gleichung ist wegen  $\mu < 1$  stets positiv, es gibt daher für jeden Wert von  $\alpha$  zwei Lösungen.



Insbesondere ist  $GA \cdot GI = \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot f^2$  eine

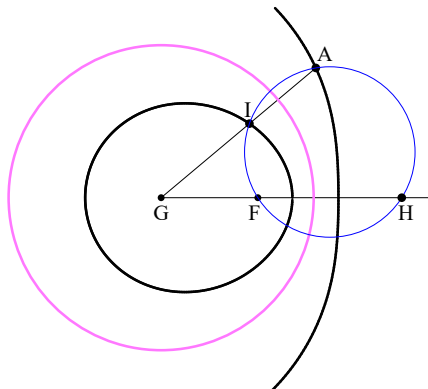
wegen  $w > 1$  und wegen  $0 < \mu < 1$  positive Konstante.

Die (von  $\alpha$  abhängigen Punkte) A und I gehen somit durch **Inversion am** (violett) **Kreis** um G

mit dem Radius  $r_G = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}$  auseinander

hervor: das innere Oval ist Bild des äußeren Ovals bei der Kreis-Inversion und umgekehrt. Eine Kurve, die bei Kreis-Inversion auf sich selbst abgebildet wird, heißt **anallagmatisch**<sup>1</sup>.

**Der Inversionskreis um G führt zum dritten Brennpunkt**



Invertiert man auch F am (violett) Kreis um G mit dem Radius  $r_G = \sqrt{GI \cdot GA}$ , so gelangt man zum Punkt H.

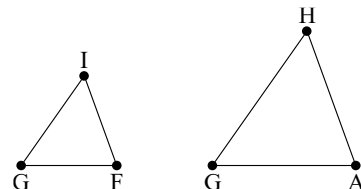
Der blaue Kreis ist der Umkreis von A, I und F. Aufgrund des Sehnen-/Sekantensatzes ist  $GI \cdot GA = GF \cdot GH$ .

Nun kommt eine **schöne Beobachtung**<sup>2</sup>: Wegen  $GA \cdot GI = GF \cdot GH$  ist  $\frac{GI}{GF} = \frac{GH}{GA}$ . Diese Beziehung liefert

zueinander ähnliche Dreiecke. Man hat wegen  $\frac{GI}{GH} = \frac{GF}{GA}$  noch zwei weitere zueinander ähnliche Dreiecke.

Aus  $GI + \mu \cdot FI = w \cdot GF$  folgt die Relation  $GH + \mu \cdot HA = w \cdot GA$

bzw.  $GA - \frac{\mu}{w} \cdot HA = \frac{1}{w} \cdot GH$ .



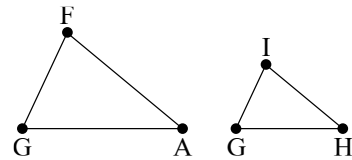
<sup>1</sup> ἀλλαγμ, der Wandel. Allgemeine Eigenschaften anallagmatischer Kurven finden sich etwa in K. Fladt (1962): Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven. Frankfurt/M: Akademische Verlagsgesellschaft.

<sup>2</sup> nach H. Schmidt (1949): Ausgewählte höhere Kurven. Wiesbaden: Kesselringsche Verlagsbuchhandlung. Leider beschränkt sich dieses Buch auf den in Rede stehenden Fall.



Aus  $GA - \mu \cdot FA = w \cdot GF$  folgt die Relation  $GH - \mu \cdot HI = w \cdot GI$

bzw.  $GI + \frac{\mu}{w} \cdot HI = \frac{1}{w} \cdot GH$ .



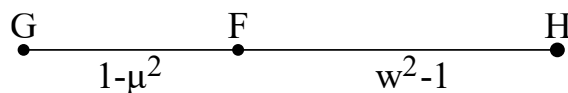
Nennt man G und F **Brennpunkte**, so ist auch H ein Brennpunkt.

Wegen  $GA \cdot GI = GF^2 \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} = GF \cdot GH$  ist  $GH = GF \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}$ . Daher ist

$FH = GH - GF = GF \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} - GF = \frac{w^2 - 1}{1 - \mu^2} \cdot GF$  und

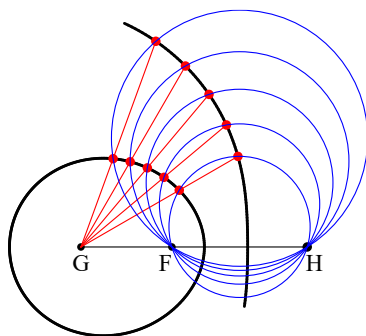
$GH - w^2 \cdot GF = \left( \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} - w^2 \right) \cdot GF = \frac{w^2 - \mu^2 - w^2 \cdot (1 - \mu^2)}{1 - \mu^2} \cdot GF = \frac{(w^2 - 1) \cdot \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot GF = \mu^2 \cdot FH$ , was zu den

folgenden Streckenverhältnissen führt:



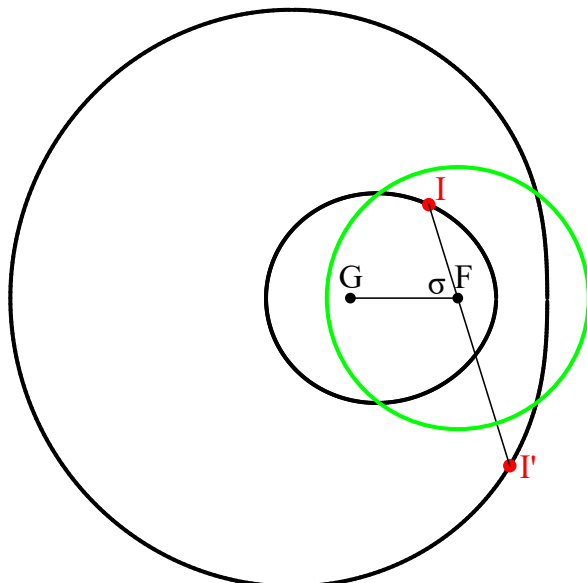
Wegen  $F \cdot (w^2 - \mu^2) = (w^2 - 1) \cdot G + (1 - \mu^2) \cdot H$  ist

$$H = \frac{(1 - w^2) \cdot G + (w^2 - \mu^2) \cdot F}{1 - \mu^2}$$



Die Kreise durch F und H schneiden GI in A bzw. schneiden GA in I.

**Auch der Inversionskreis um F führt zum dritten Brennpunkt**



Zu jedem Punkt I des inneren Ovals schneidet FI das äußere Oval in I'. Wegen

$$GI^2 = f^2 + FI^2 - 2 \cdot f \cdot FI \cdot \cos \sigma$$

$$GI'^2 = f^2 + FI'^2 + 2 \cdot f \cdot FI' \cdot \cos \sigma$$

und wegen

$$GI + \mu \cdot FI = w \cdot f; \quad GI' - \mu \cdot FI' = w \cdot f$$

ist

$$FI^2 + 2 \cdot f \cdot FI \cdot \frac{w \cdot \mu - \cos \sigma}{1 - \mu^2} + f^2 \cdot \frac{1 - w^2}{1 - \mu^2} = 0$$

$$FI'^2 - 2 \cdot f \cdot FI' \cdot \frac{w \cdot \mu - \cos \sigma}{1 - \mu^2} + f^2 \cdot \frac{1 - w^2}{1 - \mu^2} = 0$$

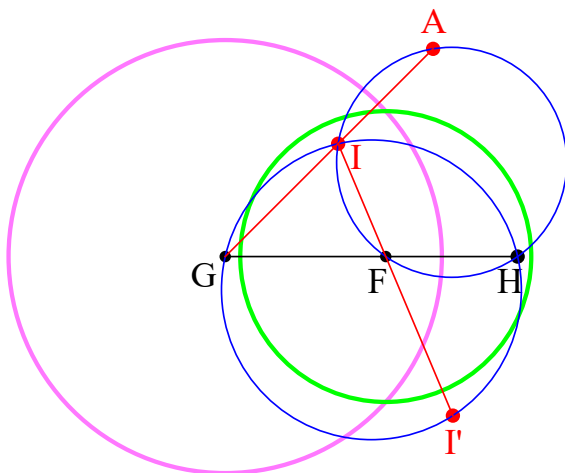
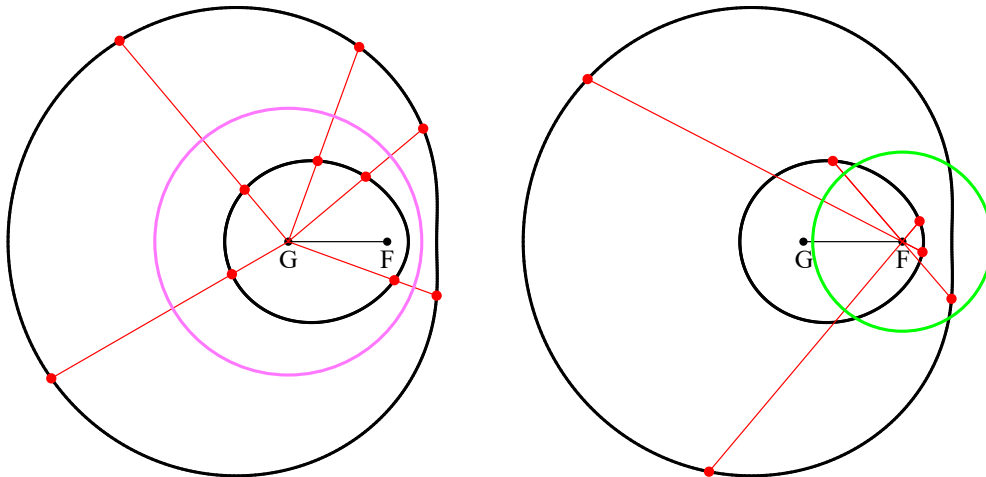
FI und -FI' erfüllen dieselbe Gleichung, und es

ist  $FI \cdot FI' = f^2 \cdot \frac{w^2 - 1}{1 - \mu^2}$ .

I' geht daher aus I durch Inversion am (grünen)Kreis um F mit Radius  $r_F = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - 1}{1 - \mu^2}}$  und

anschließender Spiegelung an F hervor. Die Kurve ist somit in doppeltem Sinne anallagmatisch.

Bei beiden Inversionen wird das innere Oval auf das äußere abgebildet und umgekehrt:



Man bekam den dritten Brennpunkt H durch Inversion von F am (violetten) Kreis um G mit

$$GH = \frac{GI \cdot GA}{GF} = f \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}.$$

Invertiert man G am (grünen) Kreis um F mit

$$FI \cdot FI' = FG \cdot FH', \text{ so ist } FH' = \frac{FI \cdot FI'}{FG} = f \cdot \frac{w^2 - 1}{1 - \mu^2}.$$

Oben wurde  $FH = \frac{w^2 - 1}{1 - \mu^2} \cdot f$  berechnet, so dass

$H = H'$  ist.

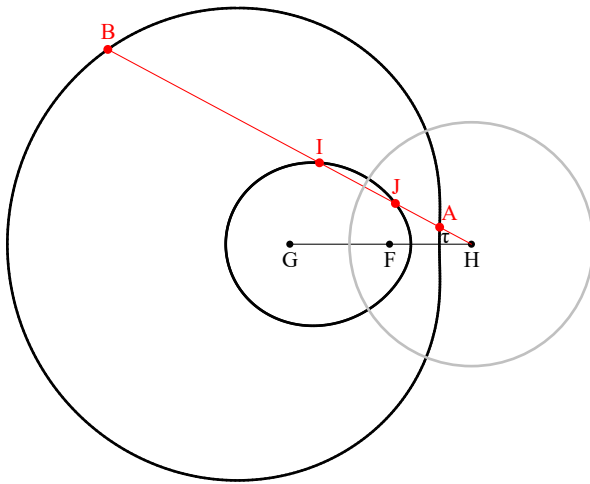
### Der Inversionskreis um H

Ist I auf dem inneren Oval, so schneidet IH das innere Oval wieder in J, und IH und JH erfüllen beide

die Gleichung  $IH^2 + 2 \cdot GH \cdot \frac{\mu - w^2 \cdot \cos \tau}{w^2 - \mu^2} \cdot HI + \frac{w^2 - 1}{w^2 - \mu^2} \cdot GH^2 = 0$ , so dass  $IH \cdot JH = \frac{w^2 - 1}{w^2 - \mu^2} \cdot GH^2 = 0$  gilt.

HI schneidet das äußere Oval in A und B; beide Punkte erfüllen die Gleichung

$$HA^2 + 2 \cdot HA \cdot GH \cdot \frac{\mu + w^2 \cdot \cos \tau}{\mu^2 - w^2} + GH^2 \cdot \frac{1 - w^2}{\mu^2 - w^2} = 0, \text{ so dass } HA \cdot HB = GH^2 \cdot \frac{w^2 - 1}{w^2 - \mu^2} \text{ gilt.}$$



I und J sowie A und B gehen daher durch eine Spiegelung am (grauen) Kreis um H mit dem Radius

$$r_H = GH \cdot \sqrt{\frac{w^2 - 1}{w^2 - \mu^2}}$$

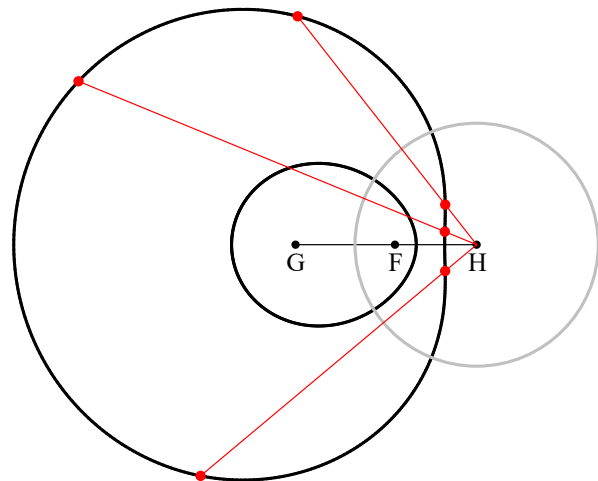
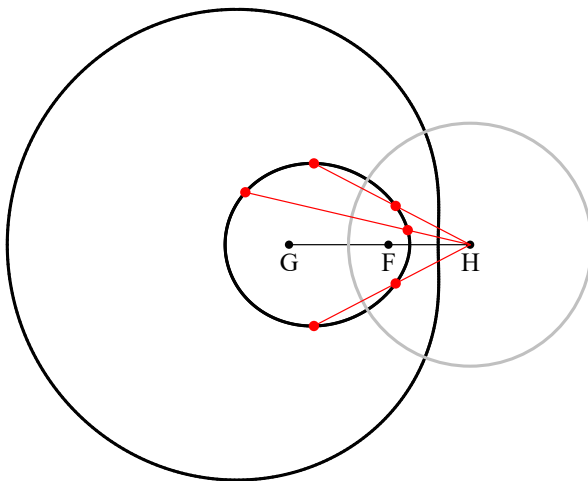
$$= f \cdot \frac{\sqrt{w^2 - \mu^2} \cdot \sqrt{w^2 - 1}}{1 - \mu^2} = r_H$$

hervor.

Damit haben die beiden Ovale drei verschiedene Inversionskreise, sind also sogar in **dreifachem Sinne anallagmatisch**.

Die Radien der Inversionskreise hängen zusammen, denn es ist  $r_G \cdot r_F = f \cdot r_H$ .

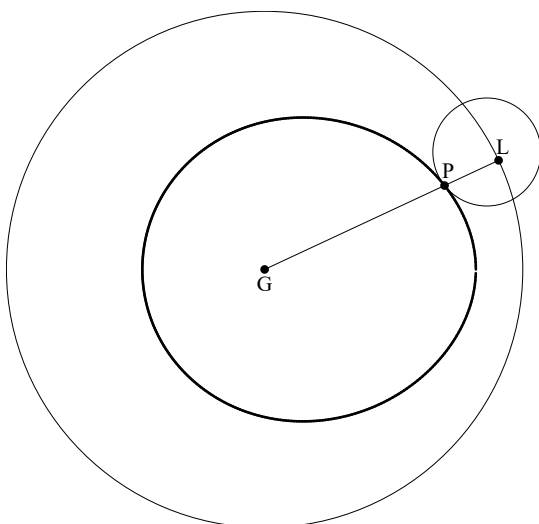
Bei der Inversion bzgl. des Kreises um H wird das innere Oval auf das innere abgebildet und das äußere Oval auf das äußere:



**Eine optische Anwendung**

Für  $\mu < 1 < w$  wird jeder Punkt P des inneren Ovals durch  $PG + \mu \cdot PF = w \cdot GF$  beschrieben. Mit dem

dritten Brennpunkt  $H = \frac{(1 - w^2) \cdot G + (w^2 - \mu^2) \cdot F}{1 - \mu^2}$  ist  $w \cdot GP + \mu \cdot HP = GH$ .



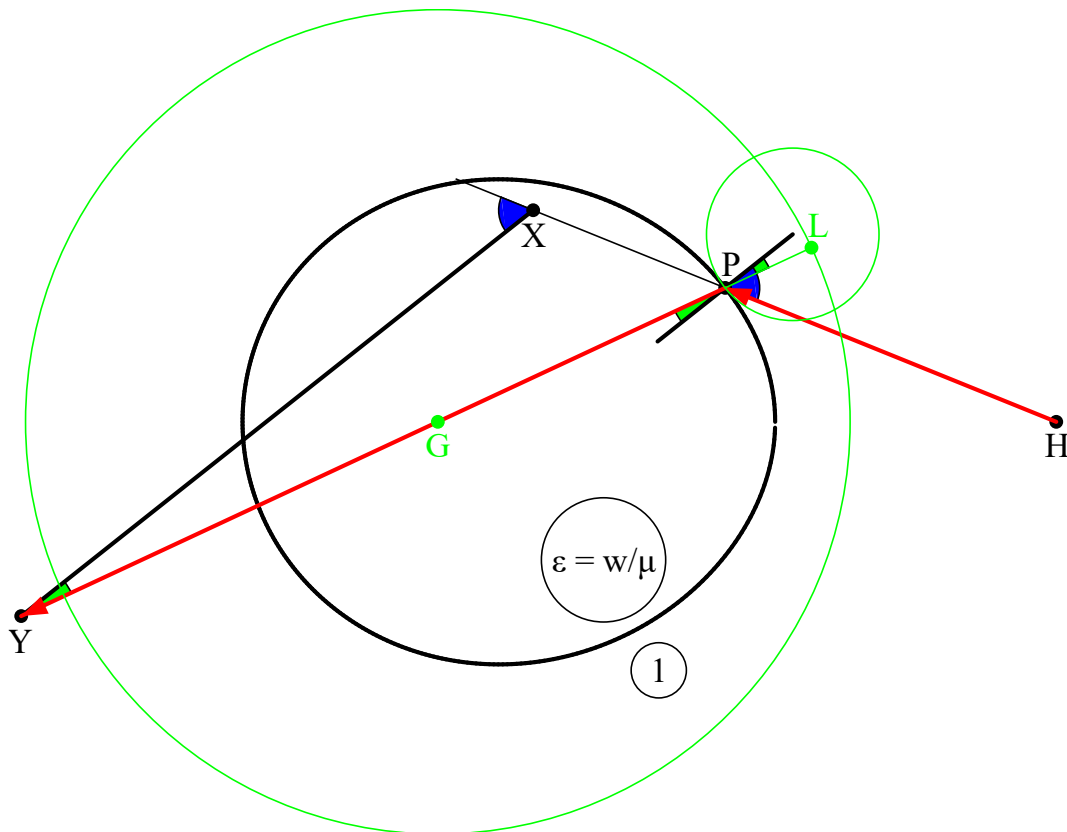
Man kann P auch wie folgt beschreiben: Man hat einen Kreis um G mit dem Radius  $\rho = \frac{GH}{w}$ . Der Punkt H liegt außerhalb dieses Kreises. GP schneidet den Kreis in L.

P liegt auch auf dem Apolloniuskreis zu H und L mit  $\frac{PL}{PH} = \frac{\mu}{w}$  wegen

$$\frac{\mu}{w} = \frac{PL}{PH} = \frac{\frac{GH}{w} - PG}{PH}$$

$$w \cdot PG + \mu \cdot PH = GH.$$

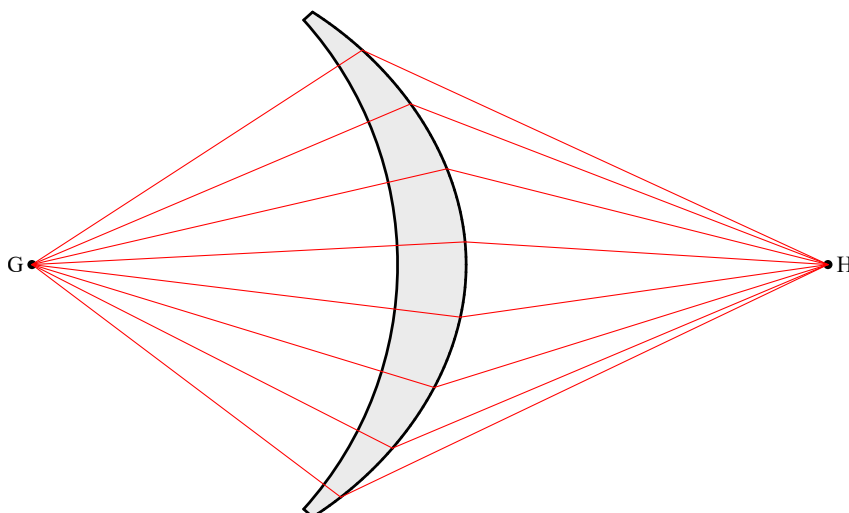
Insgesamt hat man das folgende Bild:



Ein von H ausgehender Lichtstrahl trifft die Linse, deren Material den Brechungsindex  $\epsilon = \frac{w}{\mu} (>1)$  hat, im Punkt P; die Normale in P ist fett. Der Einfallswinkel ist blau, und der Brechungswinkel ist grün.

X ist irgendwo auf der Verlängerung von HP. XY ist parallel zur Normalen in P mit  $PY = \epsilon \cdot PX$ . Im Dreieck YPX ist  $\frac{\sin(\text{blau})}{YP} = \frac{\sin(\text{grün})}{XP}$ , also  $\sin(\text{blau}) = \epsilon \cdot \sin(\text{grün})$ . PY ist demnach der gebrochene Strahl. Auf PY liegt auch G, da die grünen Winkel gleiche Größe haben.

Damit gilt:



Eine Linse mit dem Brechungsindex  $\epsilon = \frac{w}{\mu}$  werde im Querschnitt rechts vom cartesischen Oval mit

$$\epsilon \cdot PG + PH = \frac{1}{\mu} \cdot GH$$

begrenzt und links von einem Kreis um G. Alle von H ausgehenden Strahlen treffen sich in G, und alle von G ausgehenden Strahlen treffen sich in H.

### Schnittpunkte mit der Achse GF

Für  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$  schneidet das innere Oval an den Stellen  $f \cdot \frac{\mu \pm w}{\mu + 1}$  und das äußere Oval an den Stellen  $f \cdot \frac{-\mu \pm w}{-\mu + 1}$  die Achse GF.

### „Unendlich ferne“ Kreispunkte

Die Kurve enthält die „unendlich fernen“ Kreispunkte, denn mit  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ist  $GP^2 = x^2 + y^2$ . Aus (\*)

folgt  $GP^2 - 2 \cdot GP \cdot \underbrace{\frac{w - \mu^2 \cdot \cos \alpha}{1 - \mu^2}}_{u = u(\alpha)} \cdot GF + \underbrace{\frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}_v \cdot GF^2 = GP^2 + 2 \cdot GP \cdot u + v = 0$  und dann nach

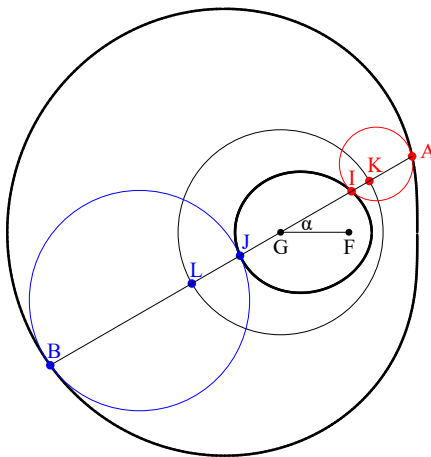
Homogenisierung  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x : y : 1)$  die Gleichung

$$GP^2 + v = -2 \cdot u \cdot GP$$

$$(x^2 + y^2)^2 + 2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot v \cdot z^2 + v^2 \cdot z^4 = 4 \cdot u^2 \cdot (x^2 + y^2) \cdot z^2$$

Die „unendlich fernen“ Kreispunkte  $(\pm 1 : i : 0)$  liegen somit auf den Ovalen.

### Von $\alpha$ zu $180^\circ + \alpha$



Ersetzt man  $\alpha$  durch  $180^\circ + \alpha$ , so bekommt man zwei weitere Lösungen B und J (mit einem anderen – nunmehr blauen – Apollonius-Kreis).

Wieder ist  $GB \cdot GJ = \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot f^2 = GA \cdot GI$ .

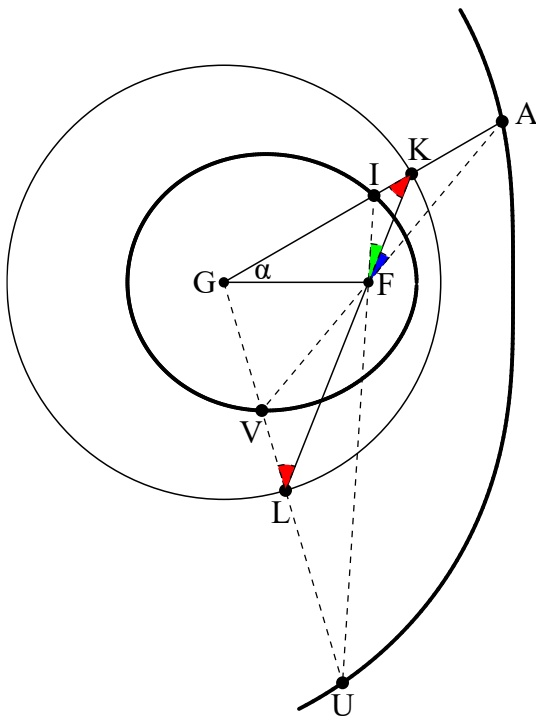
B und J gehen daher erwartungsgemäß wieder durch *Inversion* am Kreis um G mit dem Radius

$r_G = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}$  auseinander hervor.

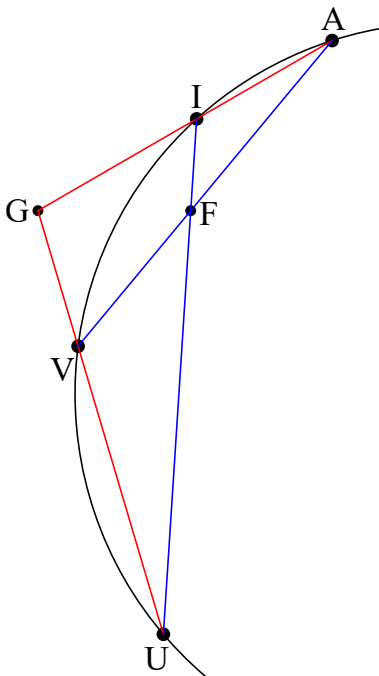
FL halbiert den Winkel JFB.

**Weitere Punkte**

Man findet noch weitere Punkte auf den Ovalen<sup>3</sup>:



KF schneidet den Leitkreis in L.  
 GL schneidet FI in U, und GL schneidet FA in V.  
 Da die Dreiecke FKI und LFV zueinander ähnlich sind (das Dreiecke GLK ist gleichschenkelig), ist  $\frac{\rho - VG}{VF} = \frac{VL}{VF} = \frac{IK}{IF} = \mu$ , also  $\boxed{GV + \mu \cdot FV = \rho}$ .  
 V erfüllt dieselbe Beziehung wie I, liegt daher auf dem inneren Oval.  
 Auch die Dreiecke FAK und UFL sind zueinander ähnlich, was auf  $\frac{GU - \rho}{FU} = \frac{LU}{FU} = \frac{AK}{AF} = \mu$  und damit auf  $\boxed{GU - \mu \cdot FU = \rho}$  führt; U erfüllt dieselbe Beziehung wie A und liegt somit auf dem äußeren Oval.  
 FL halbiert den Winkel UFV.  
 Sowohl die Dreiecke FKI und LFV als auch die Dreiecke FAK und UFL sind jeweils zueinander ähnlich, also auch FAI und UFV, so dass  $\frac{FA}{FI} = \frac{FU}{FV}$  bzw.  $\boxed{FA \cdot FV = FI \cdot FU}$  gilt, ebenso natürlich  $\boxed{GI \cdot GA = GV \cdot GU}$ .

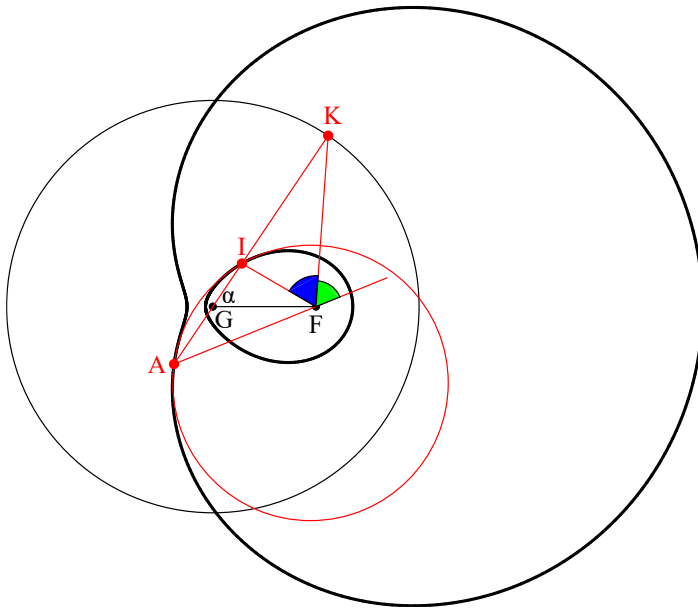


Aufgrund der Umkehrung des Sehnen- /Sekantensatzes liegen A, I, U, V auf einem Kreis.

Statt von A und I auszugehen, hätte man auch von A' und I' ausgehen können.

<sup>3</sup> Williamson, Benjamin (1912): An elementary treatise on the differential calculus, containing the theory of plane curves, with numerous examples. London usw.: Longmans, Green, and Co., S. 375 f. Leider beschränkt sich auch dieses Buch auf den in Rede stehenden Fall.

**7. Ellipsen ( $1 < \mu < w$ )**



Es ist  $\mu = \frac{AK}{AF} = \frac{\rho + AG}{AF}$  bzw.

$$\boxed{\mu \cdot FA - GA = w \cdot f}$$

und  $\mu = \frac{IK}{IF} = \frac{\rho - IG}{IF}$  bzw.

$$\boxed{\mu \cdot FI + GI = w \cdot f}$$

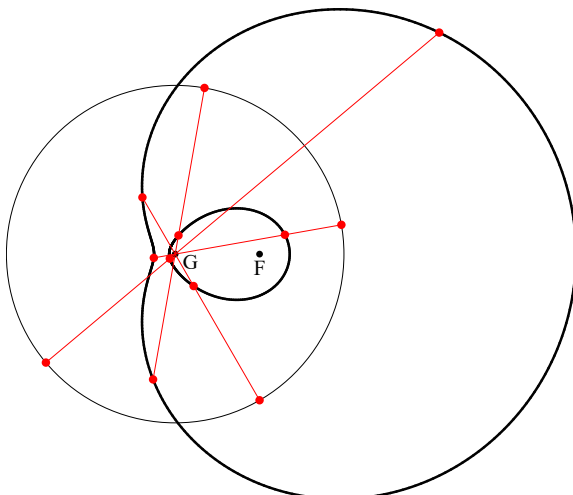
Für alle Kurvenpunkte P gilt daher

$$\boxed{\mu \cdot FP \pm GP = w \cdot f}$$

Der (rote) Apollonius-Kreis berührt offenbar die Ovale.

Wegen  $\frac{AK}{IK} = \frac{AF}{IF}$  ist FK Außen-

Winkelhalbierende zu IFA.



Man hat für jeden Kreispunkt K auf dem schwarzen Leitkreis die vom äußeren Oval ausgehende Reihenfolge AGIK, so dass die oben eingekastelten Formeln allgemein gültig sind.

Zur besseren Übersicht wurden die Apollonius-Kreise fortgelassen.

**Schnittstellen mit der Achse GF**

Für  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$  gilt:

Das innere Oval schneidet an den Stellen  $f \cdot \frac{\mu \pm w}{\mu + 1}$  und das äußere Oval an den Stellen  $f \cdot \frac{\mu \pm w}{\mu - 1}$  die

Achse GF.

**Parametrisierung**

Wieder bekommt man eine Parametrisierung über den Cosinussatz: Es ist

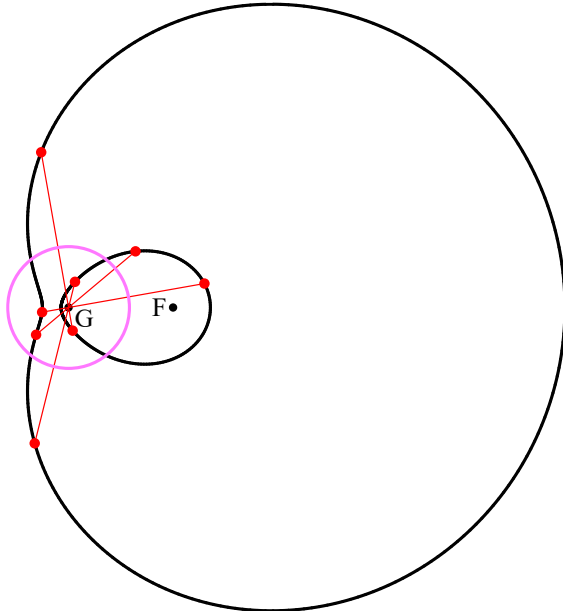
$$FI^2 = f^2 + GI^2 - 2 \cdot f \cdot GI \cdot \cos \alpha = \left( \frac{\rho - GI}{\mu} \right)^2$$

$$FA^2 = f^2 + GA^2 + 2 \cdot f \cdot GA \cdot \cos \alpha = \left( \frac{\rho + GA}{\mu} \right)^2$$

und deshalb

$$GI^2 - 2 \cdot GI \cdot f \cdot \frac{\mu^2 \cdot \cos \alpha - w}{\mu^2 - 1} + f^2 \cdot \frac{\mu^2 - w^2}{\mu^2 - 1} = 0$$

$$GA^2 + 2 \cdot GA \cdot f \cdot \frac{\mu^2 \cdot \cos \alpha - w}{\mu^2 - 1} + f^2 \cdot \frac{\mu^2 - w^2}{\mu^2 - 1} = 0$$



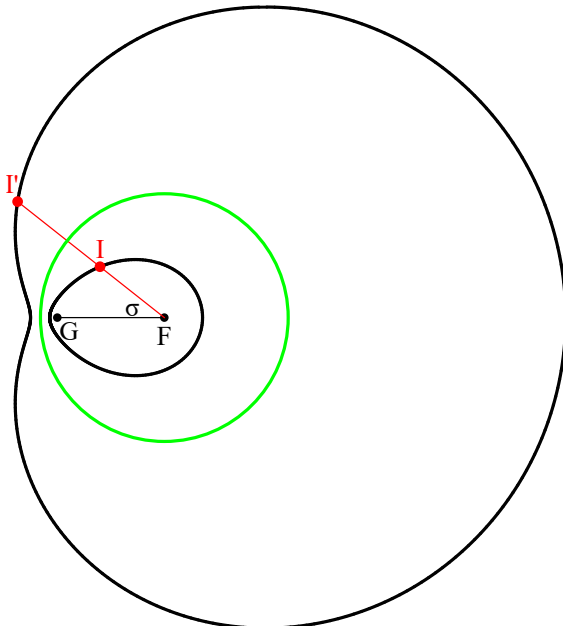
GI und  $-GA$  erfüllen dieselbe Gleichung, somit ist  $GI \cdot (-GA) = f^2 \cdot \frac{\mu^2 - w^2}{\mu^2 - 1}$  bzw.

$$GI \cdot GA = f^2 \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{\mu^2 - 1} > 0.$$

Für jeden Winkel  $\alpha$  gilt daher:  
Die von  $\alpha$  abhängigen Kurvenpunkte I und A gehen durch **Inversion am** (violett) **Kreis** um G **mit anschließender Spiegelung** an G mit dem

Radius  $r_G = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - \mu^2}{\mu^2 - 1}}$  auseinander hervor.

### Der Inversionskreis um F



Es sei I auf dem inneren Oval. FI schneidet das äußere Oval in I'. Dann ist

$$GI^2 = f^2 + FI^2 - 2 \cdot f \cdot FI \cdot \cos \sigma = (w \cdot f - \mu \cdot FI)^2$$

$$GI'^2 = f^2 + FI'^2 - 2 \cdot f \cdot FI' \cdot \cos \sigma = (\mu \cdot FI' - w \cdot f)^2$$

FI und FI' erfüllen dieselbe Gleichung

$$FI^2 + 2 \cdot f \cdot FI \cdot \frac{\cos \sigma - w \cdot \mu}{\mu^2 - 1} + f^2 \cdot \frac{w^2 - 1}{\mu^2 - 1} = 0.$$

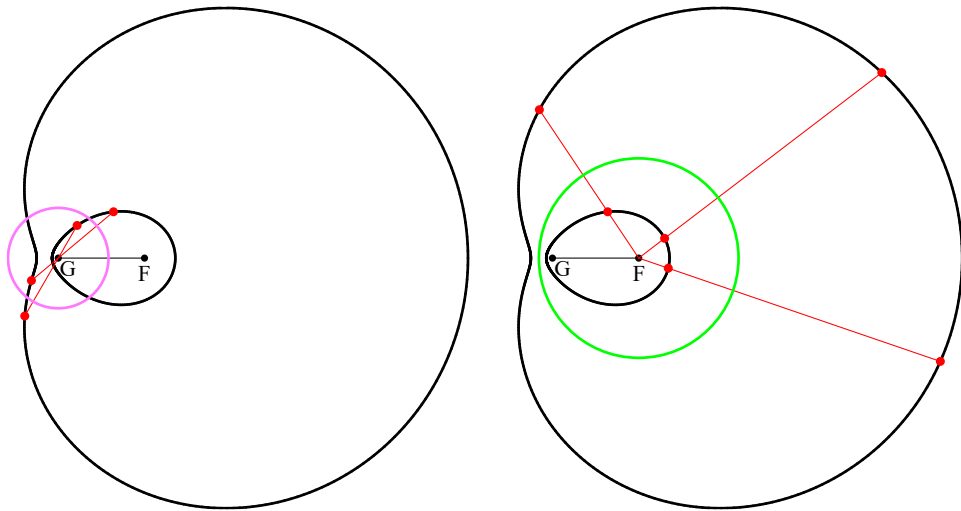
Daher ist  $FI \cdot FI' = f^2 \cdot \frac{w^2 - 1}{\mu^2 - 1}$ . Der (grüne)

Inversionskreis um F hat also den Radius

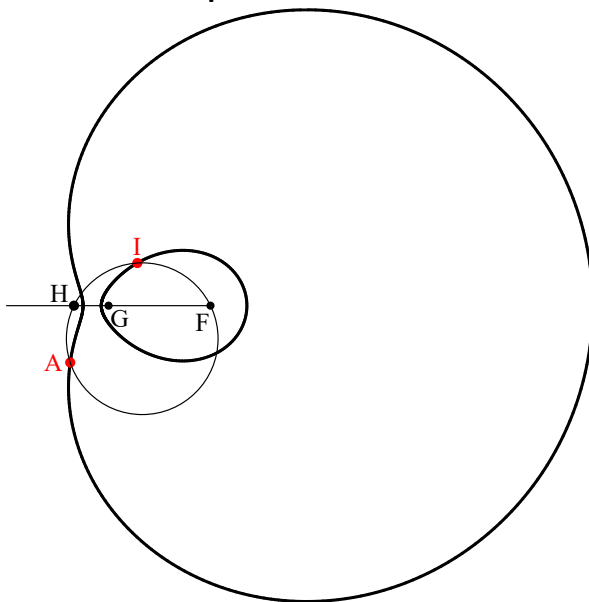
$$r_F = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - 1}{\mu^2 - 1}}.$$

Die Inversionen zu den Kreisen um G und um F bilden jeweils das innere Oval auf das äußere ab und umgekehrt.





**Der dritte Brennpunkt**



Man bekommt den dritten Brennpunkt H, indem man wieder  $GI \cdot GA = GF \cdot GH$  setzt und wie im letzten Abschnitt vorgeht.

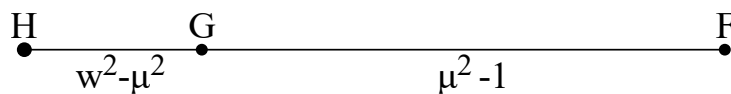
Dann folgt aus  $\mu \cdot FI + GI = w \cdot GF$  die

Beziehung  $-\mu \cdot AH + w \cdot AG = GH$ ,

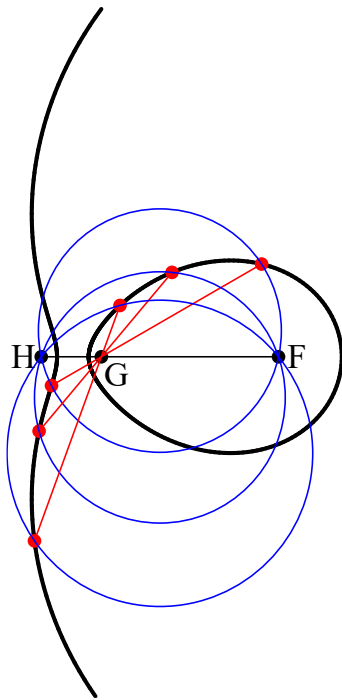
und aus  $\mu \cdot FA - GA = w \cdot GF$  folgt

$$\mu \cdot IH - w \cdot IG = GH.$$

Aus  $GI \cdot GA = \frac{w^2 - \mu^2}{\mu^2 - 1} \cdot f^2 = f \cdot GH$  ist  $GH = \frac{w^2 - \mu^2}{\mu^2 - 1} \cdot f$ ; die Graphik zeigt die Streckenverhältnisse:

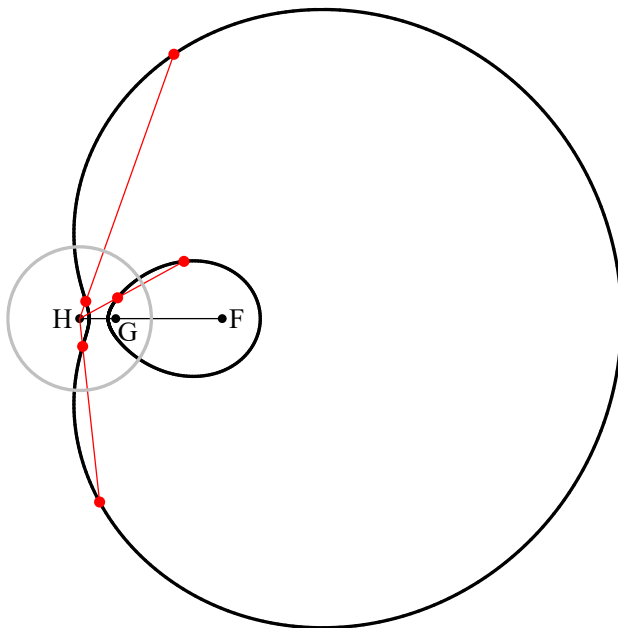


Wegen  $(w^2 - 1) \cdot G = (\mu^2 - 1) \cdot H + (w^2 - \mu^2) \cdot F$  ist  $H = \frac{(w^2 - 1) \cdot G + (\mu^2 - w^2) \cdot F}{\mu^2 - 1}$ .



Die Kreise durch H und F schneiden GI in A und GA in I und umgekehrt.

### Der Inversionskreis um H

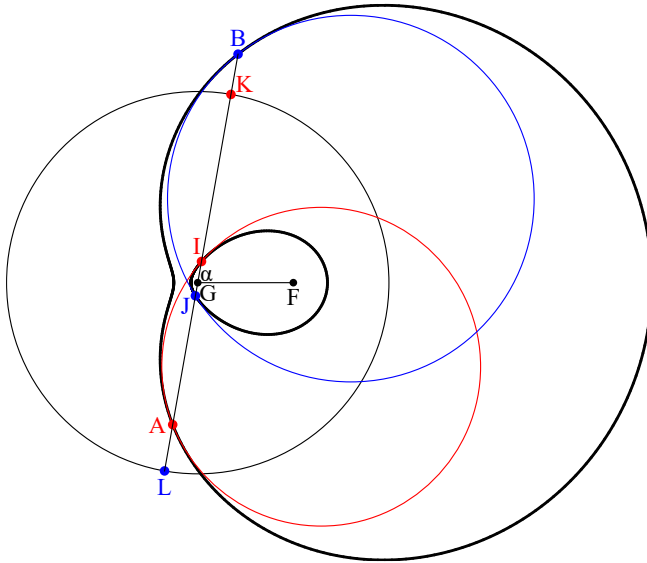


Auch hier gehört zum Zentrum H ein (grauer) Inversionskreis, auch hier hat er

den Radius  $r_H = \frac{r_G \cdot r_F}{f}$ .

Bei dieser Inversion wird das innere Oval auf das innere abgebildet und das äußere Oval auf das äußere.

Von  $\alpha$  zu  $180^\circ + \alpha$



Ersetzt man  $\alpha$  durch  $180^\circ + \alpha$ ,  
gelangt man zu den Kurvenpunkten  
B und J.

Es ist  $\mu = \frac{BL}{BF} = \frac{BG + \rho}{BF}$  bzw.

$$\boxed{\mu \cdot FB - GB = w \cdot f}$$

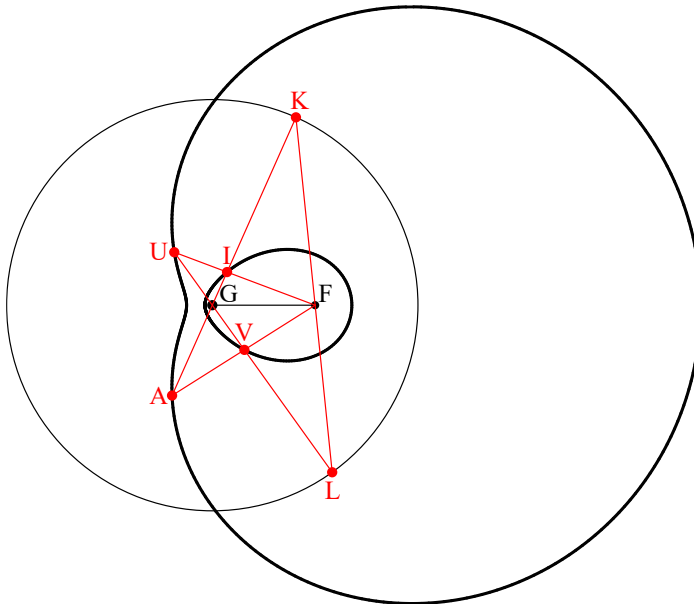
und  $\mu = \frac{JL}{JF} = \frac{\rho - JG}{JF}$  bzw.

$$\boxed{\mu \cdot FJ + GJ = w \cdot f};$$

Auch B und J erfüllen daher  
erwartungsgemäß die Beziehung

$$\boxed{\mu \cdot FP \pm GP = w \cdot f}.$$

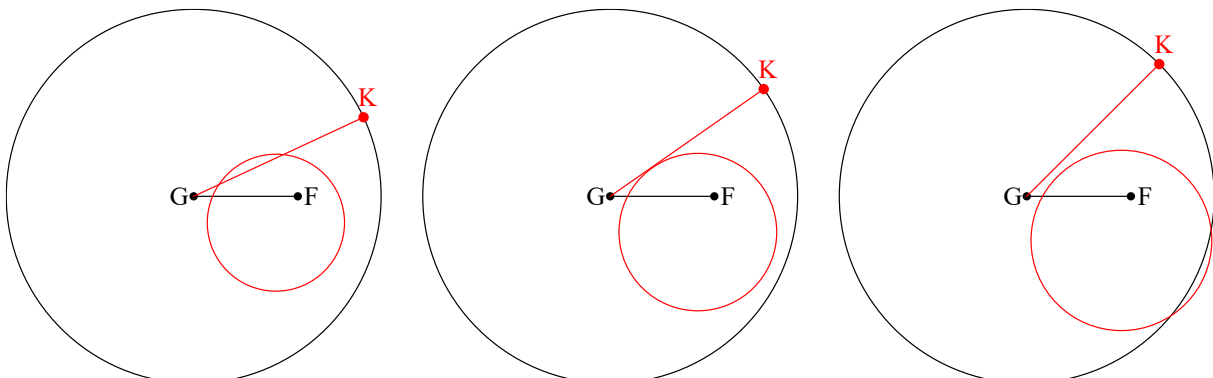
Weitere Punkte



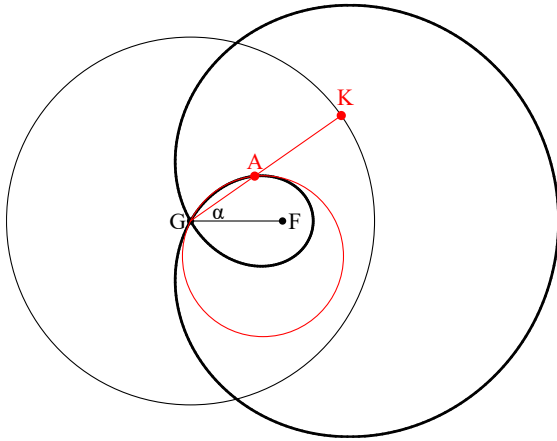
Wie im letzten Kapitel findet man  
auch hier weitere Punkte U und V auf  
den Ovalen: FK schneidet den  
Leitkreis wieder in L. Dann ist  
 $U = GL \cap FI$  und  $V = GL \cap FA$ .

8. Ellipsen ( $1 < w < \mu$ )

Je nach Lage von K schneidet gK den Apolloniuskreis in zwei verschiedenen Punkten oder berührt ihn  
oder schneidet ihn gar nicht; es gibt daher keine geschlossenen Ovale.



### 9. Ellipsen ( $1 < w = \mu$ ): Limaçon



Wegen  $\mu = \frac{GK}{GF} = \frac{\sigma}{GF} = \frac{w \cdot GF}{GF} = w$  liegt G stets auf dem Apollonius-Kreis.

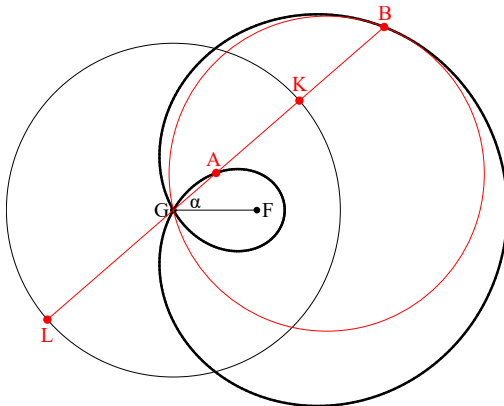
Wegen  $\mu = \frac{AK}{AF} = \frac{\rho - GA}{FA}$  ist  $\boxed{\mu \cdot FA + GA = \rho}$ , und

wegen  $FA^2 = f^2 + GA^2 - 2 \cdot f \cdot GA \cdot \cos \alpha$  folgt

$$\boxed{GA = \frac{2 \cdot \mu \cdot f}{\mu^2 - 1} \cdot (-1 + \mu \cdot \cos \alpha)}$$
. Die Kurve ist also

eine **Pascal'sche Schnecke (Limaçon)**, deren Polargleichung  $r = u + v \cdot \cos \alpha$  lautet und die eine Schleife für  $\mu > 1$  hat. (Eine Cardioide würde zum hier ausgeschlossenen Fall  $\mu = 1$  gehören.)

$$\text{Damit ist } A(\alpha) = \frac{2 \cdot \mu \cdot f}{\mu^2 - 1} \cdot (-1 + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$



Für Punkte L anderswo auf dem (schwarzen)

Leitkreis ist  $\mu = \frac{BL}{BF} = \frac{\rho + GB}{FB}$  und daher

$$\boxed{\mu \cdot FB - GB = \rho}.$$

Wegen  $FB^2 = f^2 + GB^2 - 2 \cdot f \cdot GB \cdot \cos \alpha$  folgt

$$\boxed{GB = \frac{2 \cdot \mu \cdot f}{\mu^2 - 1} \cdot (1 + \mu \cdot \cos \alpha)}$$
 und damit

$$B(\alpha) = \frac{2 \cdot \mu \cdot f}{\mu^2 - 1} \cdot (1 + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = A(180^\circ + \alpha).$$

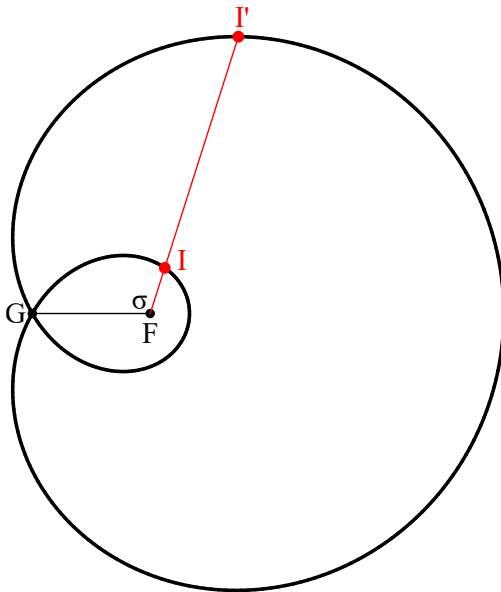
#### Schnittstellen mit der Achse GF

Für  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$  schneidet das innere Oval die Achse an den Stellen 0 und  $i = \frac{2 \cdot \mu}{\mu + 1}$  und das

äußere Oval an den Stellen 0 und  $a = \frac{2 \cdot \mu}{\mu - 1}$ .

#### Die Limaçon als anallagmatische Kurve

Die bisher behandelten Ovale hatten die Eigenschaft, dass sie durch eine Spiegelung an Kreisen um G, F und H (ggf. ergänzt durch eine Spiegelung an G oder F oder H) auf sich selbst abgebildet wurden; die Kurven waren in dreifachem Sinne anallagmatisch. Da G auf der Limaçon liegt, lässt sich die Spiegelung am Kreis um G nicht auf die Limaçon übertragen, wohl aber die Spiegelung am Kreis um F; die Limaçon ist also nur einfach anallagmatisch:



Wir gehen aus von einem Punkt I auf dem inneren Oval und schneiden FI mit dem äußeren Oval; der Schnittpunkt sei I'.

Nach dem Cosinussatz ist

$$GI^2 = f^2 + FI^2 - 2 \cdot f \cdot FI \cdot \cos \alpha$$

$$GI'^2 = f^2 + FI'^2 - 2 \cdot f \cdot FI' \cdot \cos \alpha$$

und wegen

$$\mu \cdot FI + GI = \mu \cdot f; \quad \mu \cdot FI' - GI' = \mu \cdot f$$

bzw.

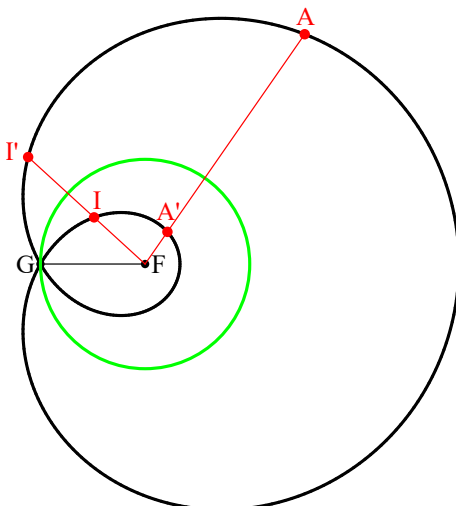
$$GI = \mu \cdot (f - FI); \quad GI' = \mu \cdot (FI' - f)$$

gilt

$$FI^2 - 2 \cdot f \cdot FI \cdot \frac{\cos \alpha - \mu^2}{1 - \mu^2} + f^2 = 0$$

$$FI'^2 - 2 \cdot f \cdot FI' \cdot \frac{\cos \alpha - \mu^2}{1 - \mu^2} + f^2 = 0$$

I und I' erfüllen dieselbe Gleichung, so dass  $FI \cdot FI' = f^2$  ist.



Damit geht I' aus I durch Inversion am (grünen) Kreis um F mit dem Radius f hervor.

Analog gelangt man von einem Punkt A des äußeren Ovals durch Inversion zu einem Punkt A' des inneren Ovals.

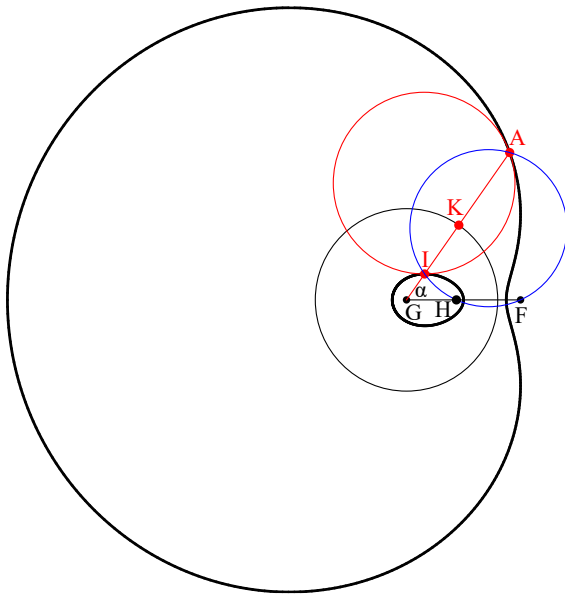
### G als dritter Brennpunkt

Für  $1 < \mu < w$  war  $H = \frac{(w^2 - 1) \cdot G + (\mu^2 - w^2) \cdot F}{\mu^2 - 1}$ ; für  $\mu = w$  bekommt man G als (doppelt zu zählenden)

dritten Brennpunkt.

### 10. Hyperbeln ( $\mu < w < 1$ )

#### Dritter Brennpunkt



Wegen  $\mu = \frac{AK}{AF} = \frac{GA - \rho}{FA}$  ist

$$\boxed{GA - \mu \cdot FA = w \cdot f}$$

Wegen  $\mu = \frac{IK}{IF} = \frac{\rho - GI}{FI}$  ist  $\boxed{GI + \mu \cdot FI = w \cdot f}$ .

Für jeden Kurvenpunkt P ist

$$\boxed{GP \pm \mu \cdot FP = w \cdot f}$$
 sowie

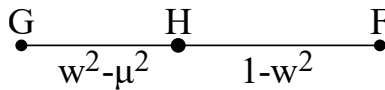
$FP^2 = f^2 + GP^2 - 2 \cdot f \cdot GP \cdot \cos \alpha$ , zusammen also

$$GP^2 + 2 \cdot GP \cdot \frac{\mu^2 \cdot \cos \alpha - w}{1 - \mu^2} \cdot f + f^2 \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} = 0.$$

Es ist daher stets  $GI \cdot GA = f^2 \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} > 0$ , und

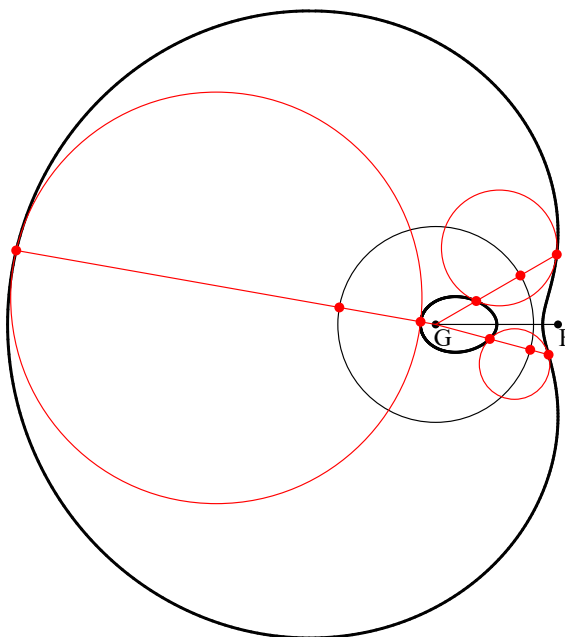
man erhält den **dritten Brennpunkt** H wiederum über  $GI \cdot GA = GF \cdot GH$ .

Wegen  $GH = f \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}$  ist  $\boxed{H = \frac{(w^2 - 1) \cdot G + (\mu^2 - w^2) \cdot F}{\mu^2 - 1}}$ ; H liegt daher im Intervall GF:



Damit folgt aus  $GA - \mu \cdot FA = w \cdot GF$  die Beziehung  $\boxed{w \cdot GI + \mu \cdot HI = GH}$  und aus  $GI + \mu \cdot FI = w \cdot GF$  die

Beziehung  $\boxed{w \cdot GA - \mu \cdot HA = GH}$ . Für jeden Kurvenpunkt P gilt demnach  $\boxed{w \cdot GP \pm \mu \cdot HP = GH}$ .



Für jeden Kreisbogen K auf dem schwarzen Leitkreis ist die vom äußeren Oval ausgehende Reihenfolge AKIG, so dass die Beziehungen

$$\boxed{\begin{array}{ll} GA - \mu \cdot FA = w \cdot GF & w \cdot GA - \mu \cdot HA = GH \\ GI + \mu \cdot FI = w \cdot GF & w \cdot GI + \mu \cdot HI = GH \end{array}}$$

allgemein gelten.

Für jeden Kurvenpunkt P ist

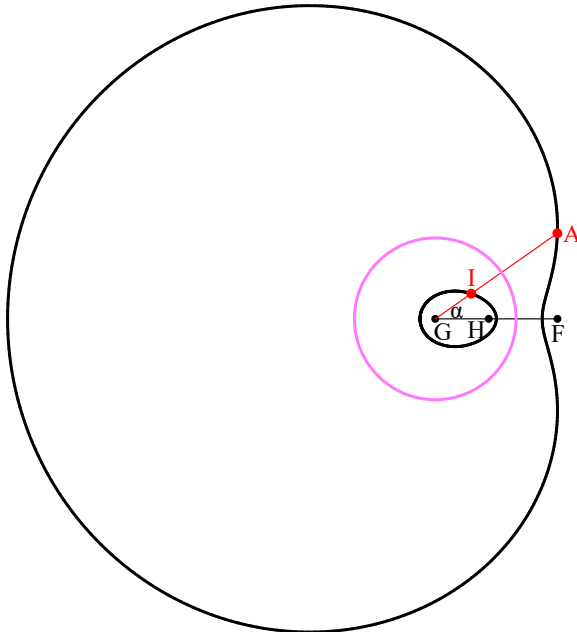
$$\boxed{GP \pm \mu \cdot FP = w \cdot GF; \quad w \cdot GP \pm \mu \cdot HP = GH}$$

**Schnittstellen mit der Achse GF**

Mit  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$  schneidet das äußere Oval an den Stellen  $f \cdot \frac{w+\mu}{\mu \pm 1}$  und das innere Oval an den

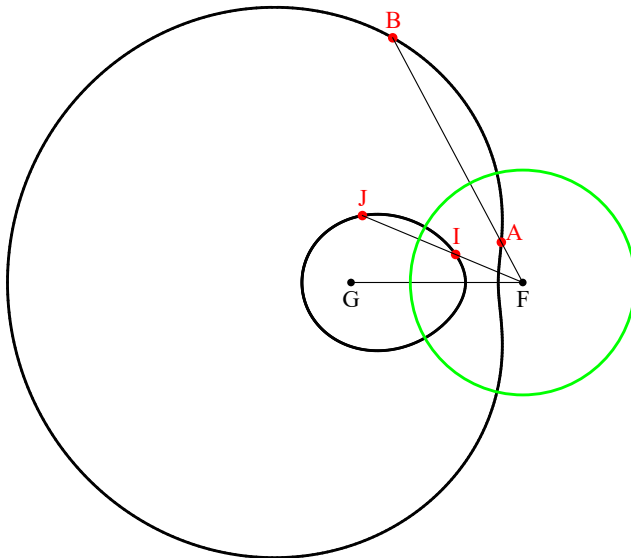
Stellen  $f \cdot \frac{w-\mu}{\mu \pm 1}$  die Achse GF.

**Der Inversionskreis um G**



Wegen  $GI \cdot GA = f^2 \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}$  gehen I und A durch Inversion am (violetten) Kreis um G mit dem Radius  $r_G = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}$  auseinander hervor.

**Der Inversionskreis um F**



Liegt A auf dem äußeren Oval, so schneidet FA das äußere Oval wieder in B. Liegt I auf dem inneren Oval, so schneidet FI das innere Ovals wieder in J. Mit  $\sigma = \sphericalangle(GFA)$  und  $\tau = \sphericalangle(GFI)$  ist

$$AA^2 - 2 \cdot f \cdot FA \cdot \frac{w \cdot \mu + \cos \sigma}{1 - \mu^2} + f^2 \cdot \frac{1 - w^2}{1 - \mu^2} = 0$$

$$FB^2 - 2 \cdot f \cdot FB \cdot \frac{w \cdot \mu + \cos \sigma}{1 - \mu^2} + f^2 \cdot \frac{1 - w^2}{1 - \mu^2} = 0$$

$$FI^2 + 2 \cdot f \cdot FI \cdot \frac{w \cdot \mu - \cos \tau}{1 - \mu^2} + f^2 \cdot \frac{1 - w^2}{1 - \mu^2} = 0$$

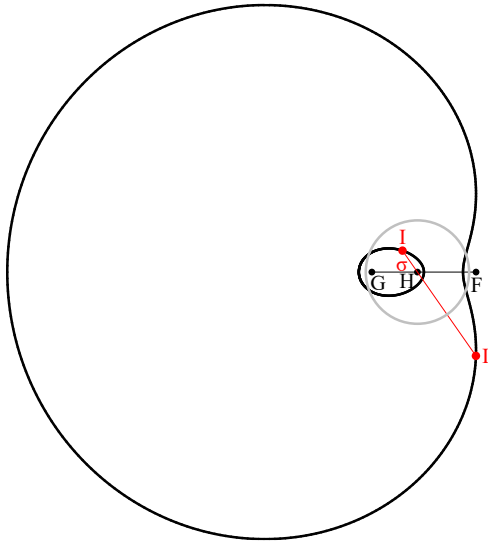
$$FJ^2 + 2 \cdot f \cdot FJ \cdot \frac{w \cdot \mu - \cos \tau}{1 - \mu^2} + f^2 \cdot \frac{1 - w^2}{1 - \mu^2} = 0$$

FA und FB erfüllen dieselbe Gleichung; dies gilt auch für FI und FJ.

Daher gehen A und B sowie I und J durch Inversion am (grünen) Kreis um F mit dem Radius

$r_F = f \cdot \sqrt{\frac{1 - w^2}{1 - \mu^2}}$  auseinander hervor. Das innere Oval wird auf sich abgebildet und das äußere ebenfalls auf sich.

**Der Inversionskreis um H**



Liegt I auf dem inneren Oval, so schneidet HI das äußere Oval in I'. Wegen

$$GI^2 = GH^2 + HI^2 - 2 \cdot GH \cdot HI \cdot \cos \sigma$$

$$GI'^2 = GH^2 + HI'^2 - 2 \cdot GH \cdot HI' \cdot \cos \sigma$$

und wegen

$$w \cdot GI = GH - \mu \cdot HI; \quad w \cdot GI' = GH + \mu \cdot HI'$$

ist

$$HI^2 + 2 \cdot HI \cdot GH \cdot \left( \frac{\mu - GH \cdot w^2 \cdot \cos \sigma}{w^2 - \mu^2} \right) + \left( \frac{w^2 - 1}{w^2 - \mu^2} \right) \cdot GH^2 = 0$$

$$HI'^2 - 2 \cdot HI' \cdot GH \cdot \frac{\mu - GH \cdot w^2 \cdot \cos \sigma}{w^2 - \mu^2} + \frac{w^2 - 1}{w^2 - \mu^2} \cdot GH^2 = 0$$

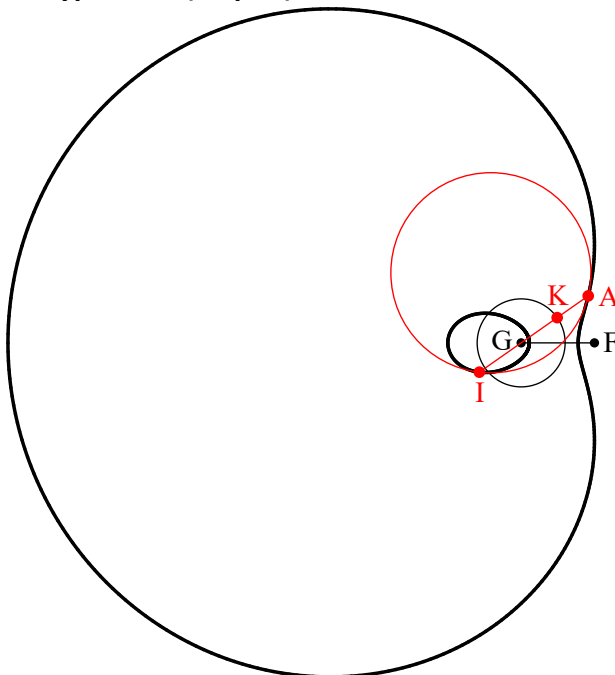
HI und  $-HI'$  erfüllen somit dieselbe Gleichung, und es ist  $HI \cdot HI' = \frac{1 - w^2}{w^2 - \mu^2} \cdot GH^2$ . Damit gehen I und I' durch Inversion am (grauen) Kreis um H mit dem Radius

$$r_H = GH \cdot \sqrt{\frac{1 - w^2}{w^2 - \mu^2}} = f \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \sqrt{\frac{1 - w^2}{w^2 - \mu^2}} = f \cdot \frac{\sqrt{(w^2 - \mu^2) \cdot (1 - w^2)}}{1 - \mu^2} = r_H \text{ und anschließender}$$

Spiegelung an H hervor.

Wieder sind die drei Inversionskreis-Radien nicht unabhängig voneinander, und es gilt  $r_H = \frac{r_G \cdot r_F}{f}$ .

**11. Hyperbeln ( $w < \mu < 1$ )**



Wegen  $\mu = \frac{AK}{AF} = \frac{AG - \rho}{FA}$  ist

$$\boxed{GA - \mu \cdot FA = w \cdot GF}.$$

Wegen  $\mu = \frac{IK}{IF} = \frac{IG + \rho}{FI}$  ist  $\boxed{-GI + \mu \cdot FI = w \cdot GF}$ .

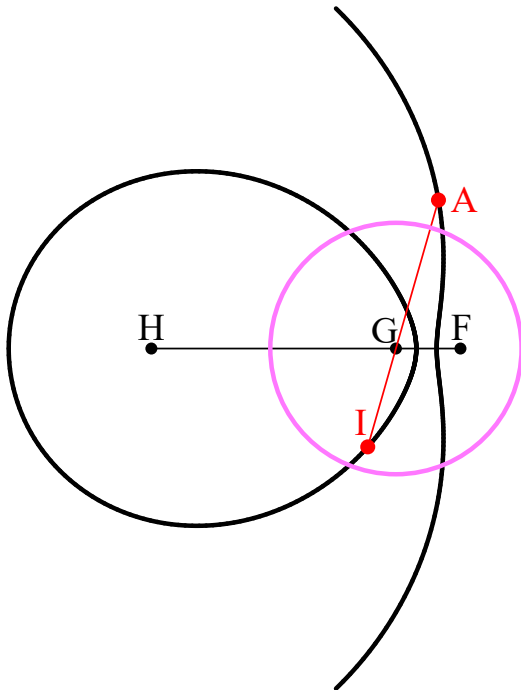
Für alle Kurvenpunkte P ist demnach

$$\boxed{GP - \mu \cdot FP = \pm w \cdot GF}.$$

Die vom äußeren Oval ausgehende Reihenfolge ist stets AKGI, so dass die eingekastelten Beziehungen allgemein gelten.



**Der Inversionskreis um G und der dritte Brennpunkt**



Gehört zu K der Winkel  $\alpha$ , so ist

$$FA^2 = GF^2 + GA^2 - 2 \cdot GF \cdot GA \cdot \cos \alpha, \text{ was auf}$$

$$GA^2 - 2 \cdot GA \cdot f \cdot \frac{w - \mu^2 \cdot \cos \alpha}{1 - \mu^2} + f^2 \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} = 0 \text{ f\u00fchrt.}$$

Analog ist

$$GI^2 + 2 \cdot f \cdot GI \cdot \frac{w - \mu^2 \cdot \cos \alpha}{1 - \mu^2} + f^2 \cdot \frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2} = 0.$$

GA und  $-GI$  erf\u00fcllen dieselbe Gleichung, so dass

wegen  $GA \cdot GI = f^2 \cdot \frac{\mu^2 - w^2}{1 - \mu^2}$  die Punkte I und A durch

Inversion am (violett) Kreis um G mit Radius

$$r_G = f \cdot \sqrt{\frac{\mu^2 - w^2}{1 - \mu^2}}$$

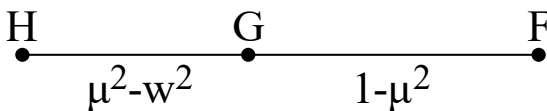
und anschließender Spiegelung an

G auseinander hervorgehen.

Wendet man diese Kreisspiegelung mit anschließender Punktspiegelung auf den Punkt F an, gelangt man zum **dritten Brennpunkt** H mit

$\mu \cdot AF - AG = -w \cdot GF$	$\mu \cdot AH - w \cdot AG = GH$
$\mu \cdot IF - IG = w \cdot GF$	$\mu \cdot IH + w \cdot IG = GH$

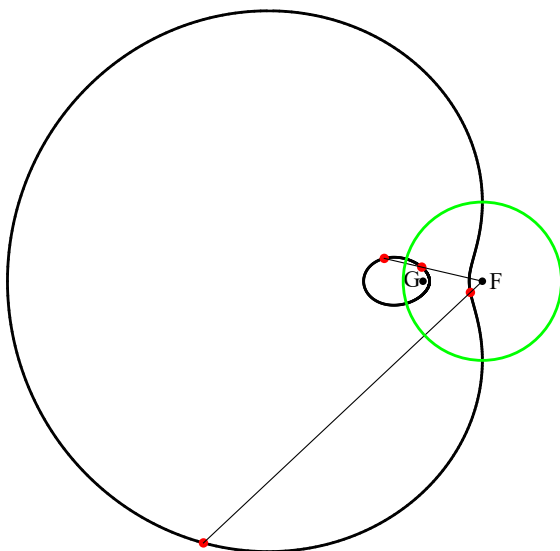
F\u00fcr jeden Kurvenpunkt P hat man also  $\mu \cdot PF - PG = \pm w \cdot GF; \mu \cdot PH \pm w \cdot PG = GH$ .



Wegen  $GF \cdot GH = f^2 \cdot \frac{\mu^2 - w^2}{1 - \mu^2}$  ist  $\frac{GH}{GF} = \frac{\mu^2 - w^2}{1 - \mu^2}$

und damit 
$$H = \frac{(1 - w^2) \cdot G - (\mu^2 - w^2) \cdot F}{1 - \mu^2}.$$

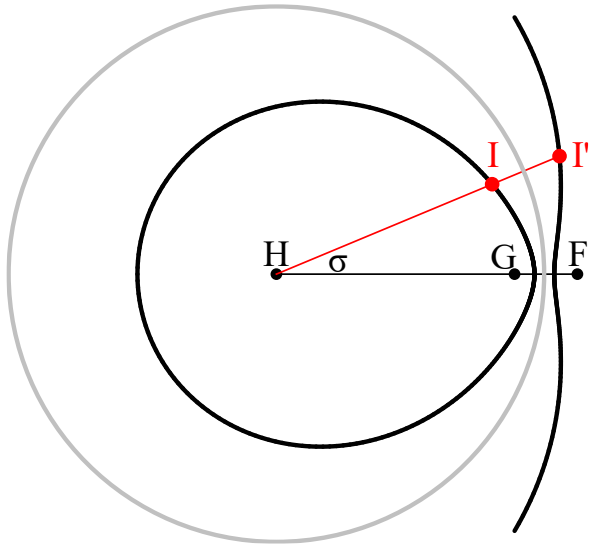
**Der Inversionskreis um F**



Der (gr\u00fcne) Inversionskreis um F hat den Radius

$$r_F = f \cdot \sqrt{\frac{1 - w^2}{1 - \mu^2}}.$$

**Der Inversionskreis um H**



Liegt I auf dem inneren Oval, so schneidet HI das äußere Oval in I'. Wegen

$$GI^2 = HG^2 + HI^2 - 2 \cdot HG \cdot HI \cdot \cos \sigma$$

$$GI'^2 = HG^2 + HI'^2 - 2 \cdot HG \cdot HI' \cdot \cos \alpha$$

und wegen

$$\mu \cdot IH + w \cdot IG = GH; \quad \mu \cdot I'H - w \cdot I'G = GH$$

bzw.

$$w \cdot IG = GH - \mu \cdot IH; \quad w \cdot I'G = \mu \cdot I'H - GH$$

erfüllen HI und HI' dieselbe Gleichung

$$HI^2 + 2 \cdot HI \cdot GH \cdot \frac{w^2 \cdot \cos \sigma - \mu}{\mu^2 - w^2} + GH^2 \cdot \frac{1 - w^2}{\mu^2 - w^2} = 0$$

so dass  $HI \cdot HI' = GH^2 \cdot \frac{1 - w^2}{\mu^2 - w^2}$  ist.

I und I' gehen daher durch Inversion mit dem (grauen) Kreis um H mit dem Radius

$$r_H = GH \cdot \sqrt{\frac{1 - w^2}{\mu^2 - w^2}} = f \cdot \frac{\sqrt{(\mu^2 - w^2) \cdot (1 - w^2)}}{1 - \mu^2} = r_H \text{ auseinander hervor. Wieder ist } r_H = \frac{r_G \cdot r_F}{f}.$$

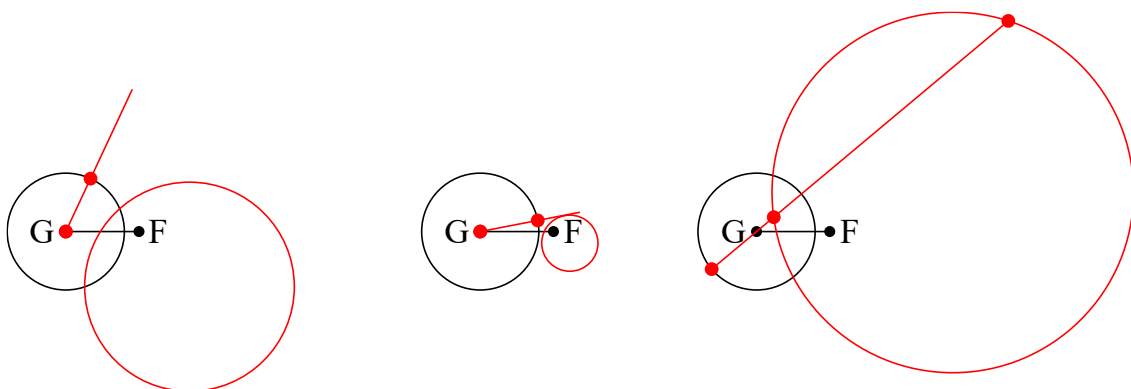
**Schnittstellen mit der Achse GF**

Für  $G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $F = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$  schneidet das innere Oval an den Stellen  $f \cdot \frac{\mu - w}{\mu \pm 1}$  und das äußere Oval an den

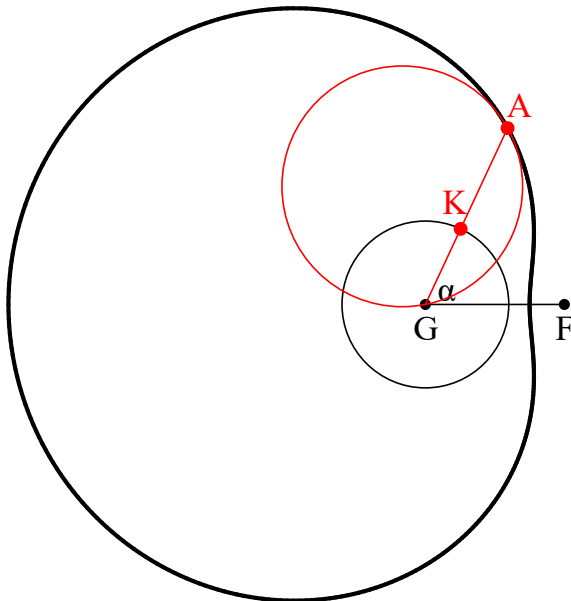
Stellen  $f \cdot \frac{\mu + w}{\mu \pm 1}$  die Achse GF.

**12. Hyperbeln ( $w < 1 < \mu$ )**

Hier kann es sein, dass GK den (roten) Apollonius-Kreis gar nicht schneidet oder ihn berührt; es gibt somit keine geschlossene Kurve.



**13. Hyperbeln ( $\mu=w<1$ ): Limaçon**



G liegt stets auf dem Apollonius-Kreis.

Wegen  $\mu = \frac{AK}{AF} = \frac{GA - \rho}{FA}$  ist  $\boxed{GA - \mu \cdot FA = \rho}$ .

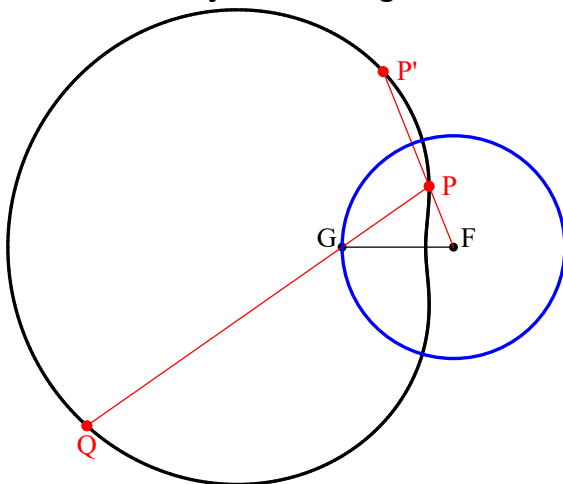
Aus  $FA^2 = f^2 + GA^2 - 2 \cdot f \cdot GA \cdot \cos \alpha$  folgt

$$GA = \frac{2 \cdot \mu \cdot f}{1 - \mu^2} \cdot (1 - \mu \cdot \cos \alpha).$$

Die Kurve ist wieder eine **Pascal'sche Schnecke (Limaçon)**, die für  $\mu < 1$  keine Schleife hat.

Wie bei Ellipsen ist G der dritte Brennpunkt (und daher doppelt zu zählen).

**Auch diese Limaçon ist anallagmatisch**



Gehört zu P der Winkel  $\alpha$ , so gehört der Winkel  $180^\circ + \alpha$  zu Q.

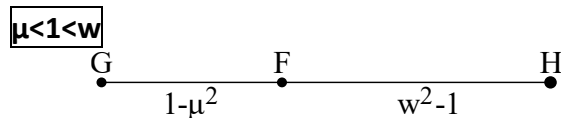
Auch diese Limaçon ist anallagmatisch:

FP und FP' erfüllen dieselbe Gleichung, und es ist  $P'F \cdot PF = f^2$ .

P und P' gehen durch Inversion am Kreis um F mit dem Radius f hervor.

NB: PQ und PP' bilden **keinen** rechten Winkel.

**14. Zusammenfassung des Bisherigen**



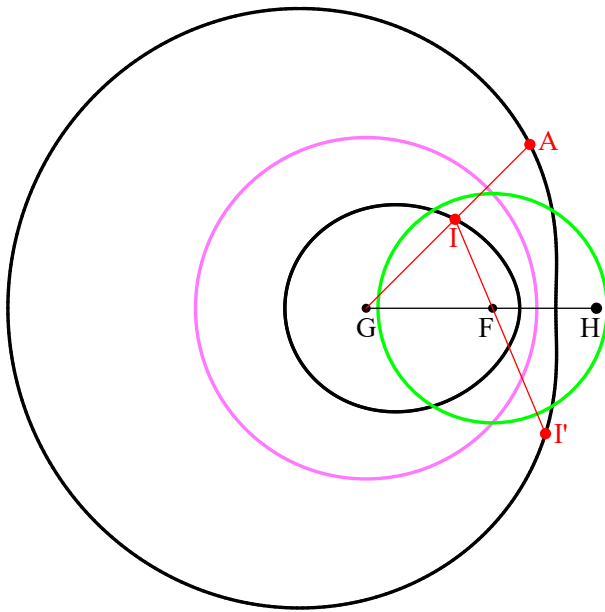
$GI + \mu \cdot FI = w \cdot GF$	$GA - \mu \cdot FA = w \cdot GF$
$GI + \frac{\mu}{w} \cdot HI = \frac{1}{w} \cdot GH$	$GA - \frac{\mu}{w} \cdot HA = \frac{1}{w} \cdot GH$

Für jeden Kurvenpunkt P ist

$$\boxed{GP \pm \mu \cdot FP = w \cdot GF; \quad w \cdot GP \pm \mu \cdot HP = GH}.$$

Spiegelt man I am violetten Kreis um G mit

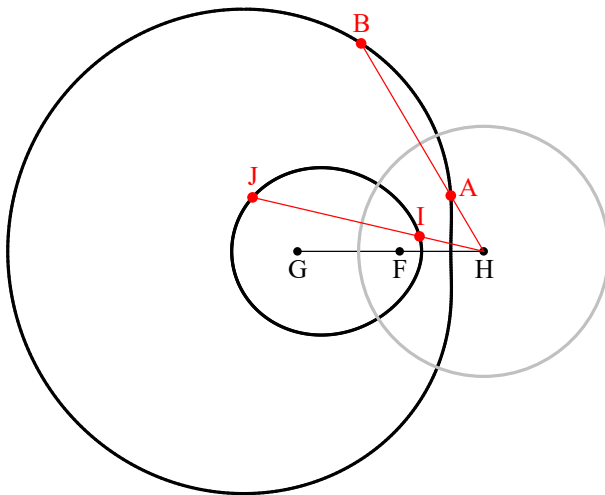
Radius  $r_G = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}$ , bekommt man A.



Spiegelt man I am grünen Kreis um F mit

Radius  $r_F = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - 1}{1 - \mu^2}}$  und spiegelt

anschließend an F, bekommt man I'.



Spiegelt man I am grauen Kreis um H mit dem

Radius  $r_H = \frac{r_G \cdot r_F}{f}$ , bekommt man J, und A

wird auf B abgebildet (und umgekehrt).

Damit haben die beiden Ovale drei verschiedene Inversionskreise, sind also sogar in **dreifachem Sinne anallagmatisch**.



$$\begin{array}{ll} \mu \cdot FA - GA = w \cdot GF & \mu \cdot FI + GI = w \cdot GF \\ -\mu \cdot HA + w \cdot GA = GH & \mu \cdot HI - w \cdot GI = GH \end{array}$$

Für jeden Kurvenpunkt P ist

$$\mu \cdot FP \pm GP = w \cdot GF; \quad \mu \cdot HP - w \cdot GP = \pm GH$$

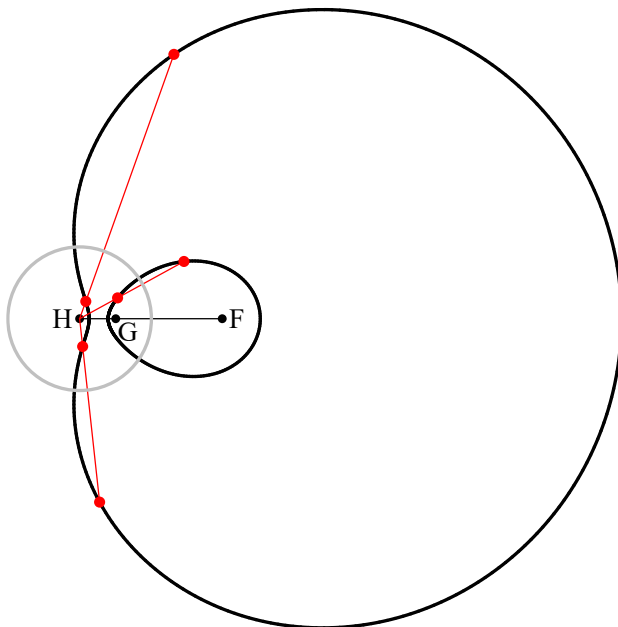
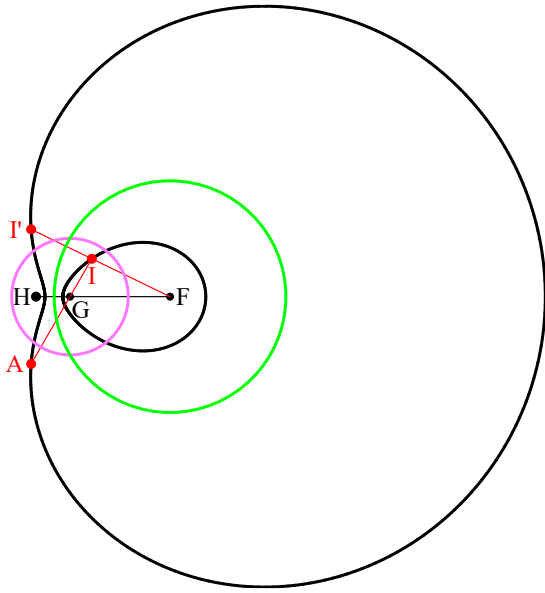
Spiegelt man I am violetten Kreis um G mit

Radius  $r_G = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - \mu^2}{\mu^2 - 1}}$  und spiegelt

anschließend an G, bekommt man A.

Spiegelt man I am grünen Kreis um F mit

Radius  $r_F = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - 1}{\mu^2 - 1}}$ , bekommt man I'.



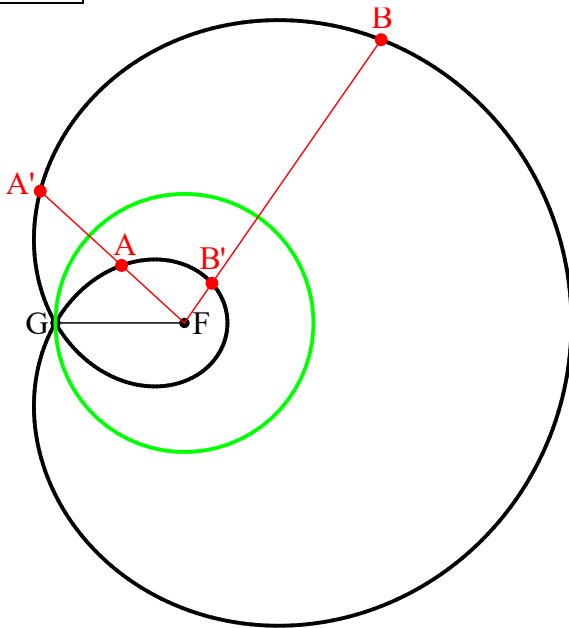
Zum dritten Brennpunkt H gehört auch ein (grauer) Inversionskreis um H mit dem

Radius  $r_H = \frac{r_G \cdot r_F}{f}$ .

Bei dieser Inversion wird das innere Oval auf das innere abgebildet und das äußere Oval auf das äußere.

Auch hier ist die Kurve in dreifachem Sinne anallagmatisch.

$1 < w = \mu$  (Limaçon)



$$\begin{aligned} \mu \cdot FA + GA &= \mu \cdot GF \\ \mu \cdot FB - GB &= \mu \cdot GF \end{aligned}$$

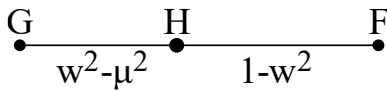
Für jeden Kurvenpunkt P ist

$$\mu \cdot FP \pm GP = \mu \cdot GF$$

G liegt auf der Kurve und ist ein Doppelpunkt.

Der (grüne) Inversionskreis hat den Mittelpunkt F und den Radius f.

$\mu < w < 1$



$$\begin{aligned} GA - \mu \cdot FA &= w \cdot GF & GI + \mu \cdot FI &= w \cdot GF \\ w \cdot GA - \mu \cdot HA &= GH & w \cdot GI + \mu \cdot HI &= GH \end{aligned}$$

Für jeden Kurvenpunkt P ist

$$GP \pm \mu \cdot FP = w \cdot GF; \quad w \cdot GP \pm \mu \cdot HP = GH$$

Diese Relationen stimmen zwar überein mit denen im Fall  $\mu < 1 < w$ , jedoch liegt H anderswo.

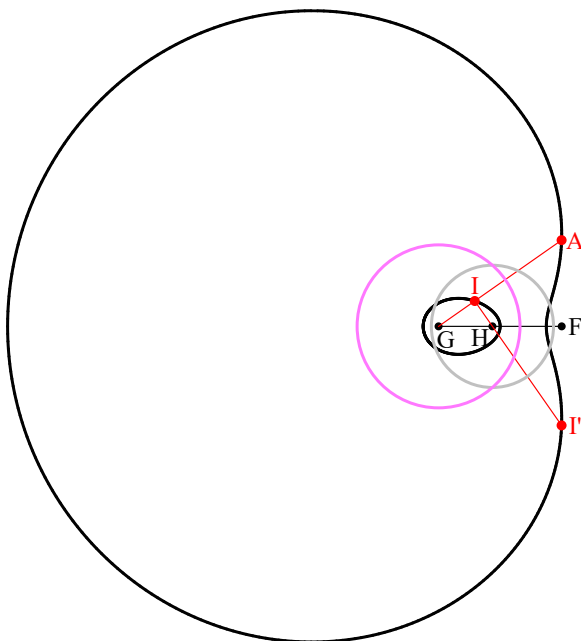
Spiegelt man I am violetten Kreis um G mit dem

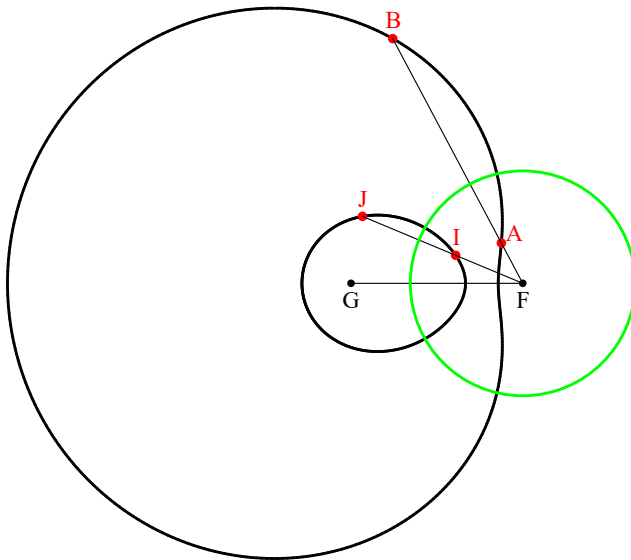
Radius  $r_G = f \cdot \sqrt{\frac{w^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}$ , erhält man A.

Spiegelt man I am grauen Kreis um H mit dem

Radius  $r_H = f \cdot \frac{\sqrt{(w^2 - \mu^2) \cdot (1 - w^2)}}{1 - \mu^2}$  und

spiegelt man anschließend an H, bekommt man I'.





Spiegelt man A am (grünen) Kreis um F mit

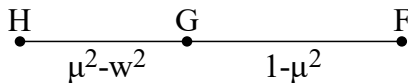
dem Radius  $r_F = f \cdot \sqrt{\frac{1-w^2}{1-\mu^2}}$ , bekommt

man B.  
I wird auf J abgebildet.

$$r_H = \frac{r_G \cdot r_F}{f}$$

Auch diese Kurve ist in dreifachem Sinne anallagmatisch.

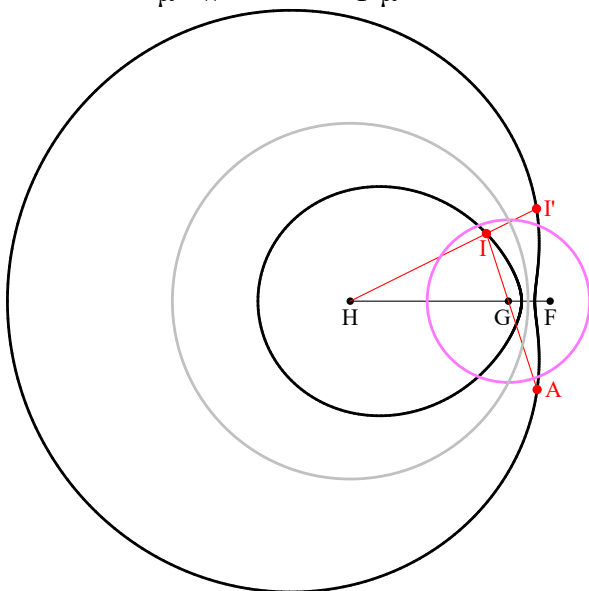
$$w < \mu < 1$$



$$\begin{array}{ll} \mu \cdot AF - AG = -w \cdot GF & \mu \cdot AH - w \cdot AG = GH \\ \mu \cdot IF - IG = w \cdot GF & \mu \cdot IH + w \cdot IG = GH \end{array}$$

Für jeden Kurvenpunkt P gilt

$$\mu \cdot PF - PG = \pm w \cdot GF; \quad \mu \cdot PH \pm w \cdot PG = GH$$



Spiegelt man I am violetten Kreis um G mit

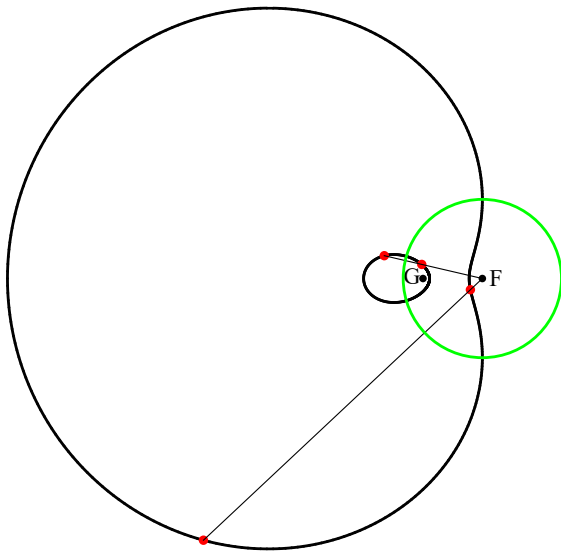
dem Radius  $r_G = f \cdot \sqrt{\frac{\mu^2 - w^2}{1 - \mu^2}}$  und spiegelt

anschließend an G, erhält man A.

Spiegelt man I am grauen Kreis um H mit dem

Radius  $r_H = f \cdot \frac{\sqrt{(\mu^2 - w^2) \cdot (1 - w^2)}}{1 - \mu^2}$ , bekommt

man I'.



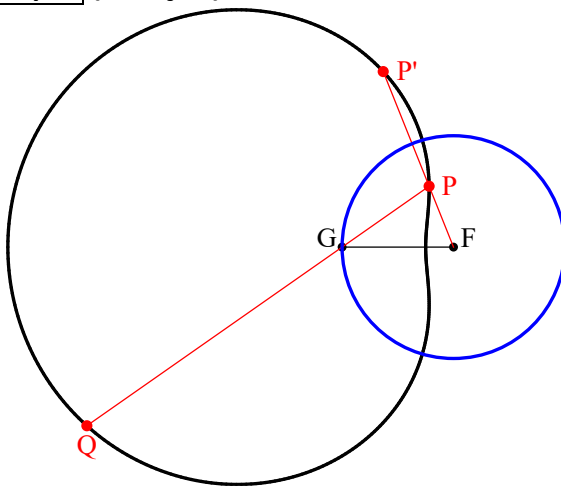
Spiegelt man am (grünen) Inversionskreis um F mit dem Radius

$$r_F = f \cdot \sqrt{\frac{1-w^2}{1-\mu^2}},$$

wird das innere Oval auf das innere und das äußere Oval auf das äußere abgebildet.

Auch hier ist die Kurve in dreifachem Sinne analagmatisch.

$w = \mu < 1$  (Limaçon)



$$GA - \mu \cdot FA = \mu \cdot f$$

G liegt auf der Kurve (Einsiedlerpunkt)

Spiegelt man P am (blauen) Inversionskreis um F mit dem Radius f, bekommt man den Punkt P', der wieder auf der Kurve liegt.



### 15. Punkte, die zu zwei Kreisen ein festes Abstandsverhältnis $\mu$ haben

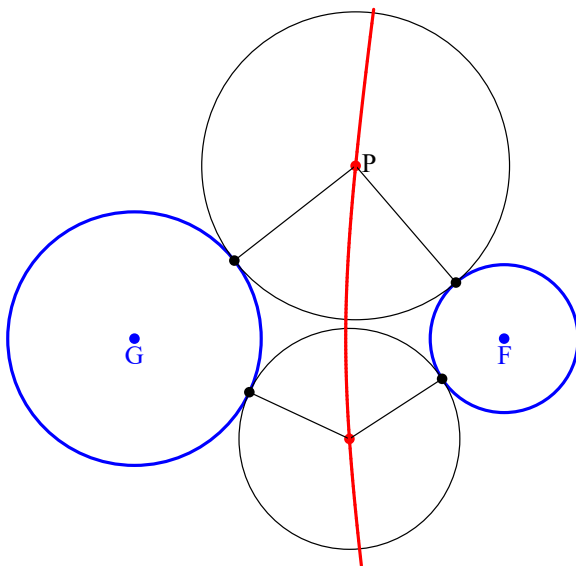
Ein anderer Zugang zu cartesischen Ovalen ergibt sich, wenn man nach Punkten fragt, die zu zwei Kreisen ein konstantes Abstandsverhältnis  $\mu$  haben. Hier wird zur Deutlichkeit der Fall  $\mu=1$  mitbehandelt.

Man hat zwei (blaue und fette) Kreise, einen Kreis um G mit Radius R und einen Kreis um F mit dem Radius r.

#### Disjunkter Fall, $\mu=1$

Beginnen wir mit dem Fall, dass die beiden gegebenen Kreise zueinander *disjunkt* sind.

Gesucht sind alle Punkte P, deren *minimaler* Abstand zum Kreis um F genau  $\mu$ -mal so groß ist wie der minimale Abstand zum Kreis um G.



Ist  $\mu = 1$ , so muss

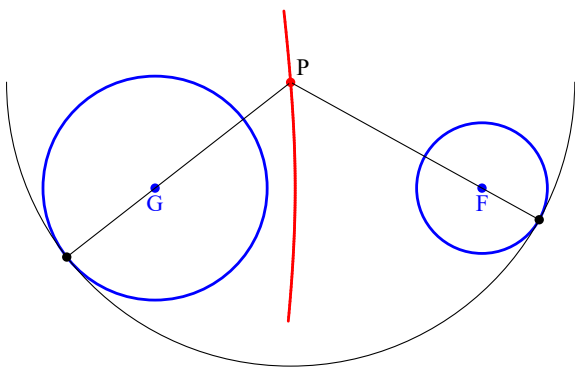
$$PF - r = PG - R$$

bzw.

$$PG - PF = R - r$$

sein;

es handelt sich also um einen Hyperbel-Ast.



Was ist mit dem anderen Hyperbel-Ast? Die zu ihm gehörige Beziehung

$$PF - PG = R - r$$

schreibt sich auch als

$$PF + r = PG + R,$$

d.h. hier haben die *maximalen* Abstände zwischen P und den beiden Kreisen gleiche Größe.

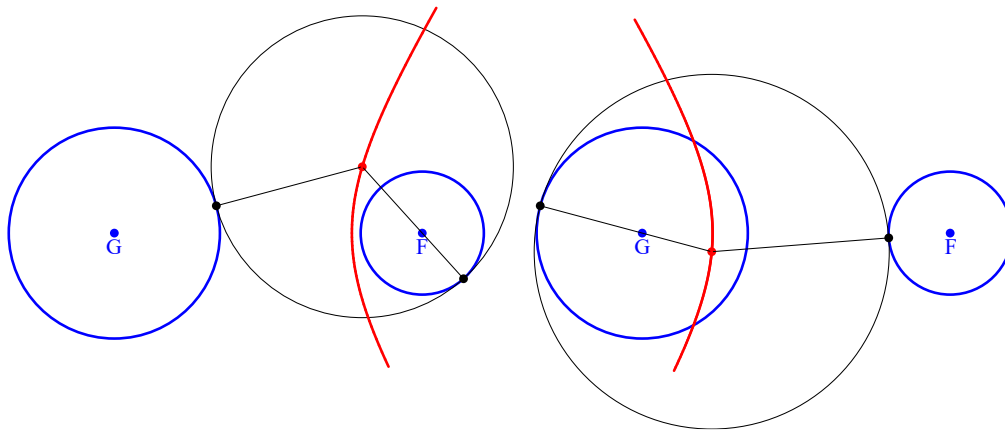
Es gibt eine zweite Hyperbel, deren Punkte zu einem Kreis minimale und zum zweiten Kreis maximale Abstände haben; es gilt also

$$PF + r = PG - R$$

$$PF - r = PG + R$$

$$PG - PF = R + r$$

$$PF - PG = R + r$$



Links ist der Abstand zum Kreis um G minimal und zum Kreis um F maximal; rechts ist es umgekehrt.

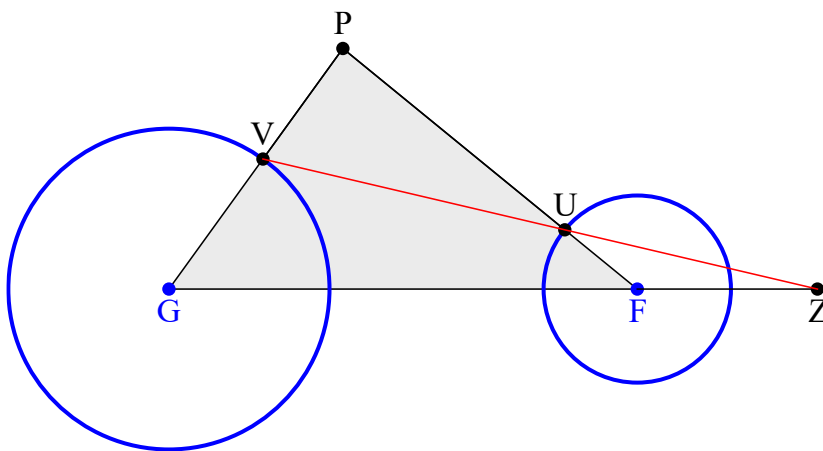
**Disjunkter Fall,  $\mu \neq 1$**

Ist  $\mu \neq 1$ , so muss für *minimale* Abstände

$$\begin{aligned} PU &= \mu \cdot PV \\ PF - r &= \mu \cdot (PG - R) \\ \mu \cdot PG - PF &= \mu \cdot R - r \end{aligned}$$

sein. Für  $\mu \cdot R = r$  ist  $\mu \cdot PG = PF$ ; P liegt dann auf einem Apollonius-Kreis.

Im Folgenden sei also  $\mu \neq 1$  und  $\mu \cdot R \neq r$ .

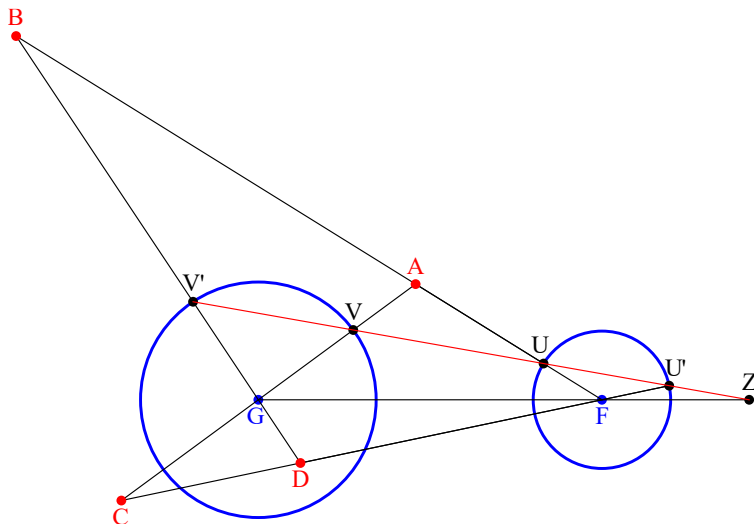


Es sei P ein Punkt mit  $PU = \mu \cdot PV$ .  
 VU schneidet GF in Z. VU ist Transversale des Dreiecks GFP. Nach dem Satz des Menelaos gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{PV}{VG} \cdot \frac{GZ}{ZF} \cdot \frac{FU}{PU} \\ &= \frac{PV}{PU} \cdot \frac{FU}{VG} \cdot \frac{GZ}{ZF} \\ &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{GZ}{ZF} \end{aligned}$$

Alle Punkte P mit  $PF - r = \mu \cdot (PG - R)$  liefern daher denselben Punkt  $Z = \frac{\mu \cdot R \cdot F - r \cdot G}{\mu \cdot R - r}$  außerhalb von GF.

Ist Z gegeben, so lege man durch Z eine (rote) Gerade, die die beiden Kreise schneidet; den Kreis um F etwa in U, den Kreis um G etwa in V. Dann ist  $P = FU \cap GV$ .



Allerdings gibt es bei jedem Kreis zwei Schnittpunkte (U und U' sowie V und V'), also insgesamt vier Kandidaten für P, nämlich

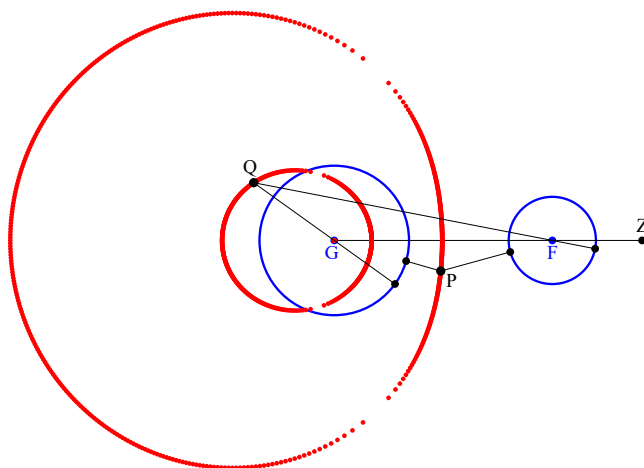
$$A = FU \cap GV$$

$$B = FU \cap GV'$$

$$C = FU' \cap GV$$

$$D = FU' \cap GV'$$

Nur bei A und B handelt es sich um minimale Abstände; bei C und D sind die Abstände maximal.



Die Drehgerade durch Z liefert eine punktweise Konstruktion von A, B, C, D. Diese vier Punkte liegen auf zwei Ovalen. Für jeden Punkt P auf dem äußeren Oval ist der minimale Abstand zum Kreis um F doppelt so groß wie der minimale Abstand zum Kreis um G. Für jeden Punkt Q auf dem inneren Oval ist der maximale Abstand zum Kreis um F doppelt so groß wie der maximale Abstand zum Kreis um G.

Für den minimalen Abstand ist  $PF - r = \mu \cdot (PG - R)$  bzw.  $\boxed{\mu \cdot PG - PF = \mu \cdot R - r}$ .

Für den maximalen Abstand ist  $PF + r = \mu \cdot (PG + R)$  bzw.  $\boxed{PF - \mu \cdot PG = \mu \cdot R - r}$ .

Der Abstand zwischen G und F geht in diese Beziehungen nicht ein; es wurde jedoch bei der synthetischen Argumentation Disjunktheit angenommen.

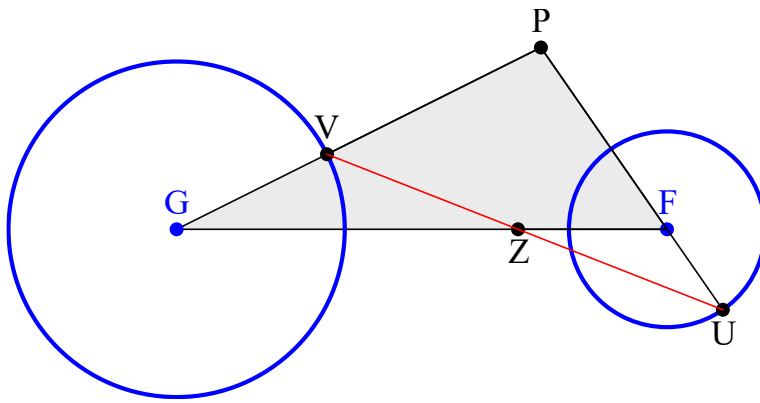
Soll der Abstand zum Kreis um G minimal und zum Kreis um F maximal sein, ist  $PF + r = \mu \cdot (PG - R)$

bzw.  $\boxed{\mu \cdot PG - PF = \mu \cdot R + r}$ .

Soll hingegen der Abstand zum Kreis um G maximal und zum Kreis um F minimal sein, bekommt man

$PF - r = \mu \cdot (PG + R)$  bzw.  $\boxed{PF - \mu \cdot PG = \mu \cdot R + r}$ .

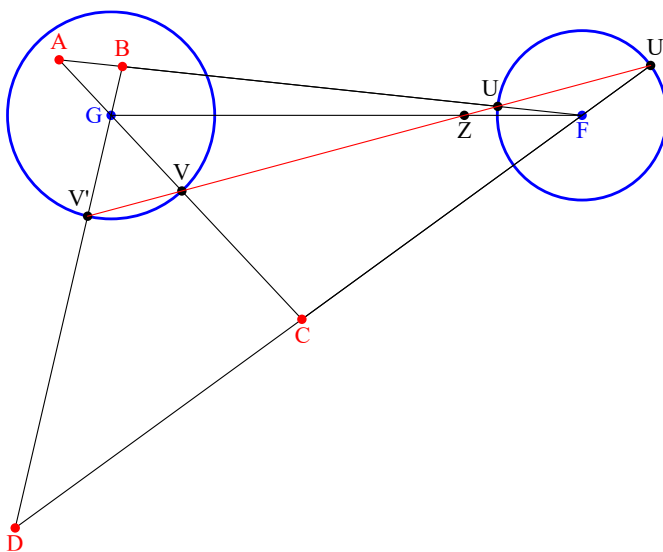
Die oben erwähnten Punkte A, B, C, D erfüllen diese Eigenschaften nicht; man benötigt eine neue Überlegungsfigur.



P sei ein Punkt mit  $PU = \mu \cdot PV$ .  
 VU ist Transversale des Dreiecks GFP, so dass nach Menelaos gilt:

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{GZ}{ZF} \cdot \frac{FU}{UP} \cdot \frac{PV}{VG} \\
 &= \frac{GZ}{ZF} \cdot \frac{FU}{VG} \cdot \frac{PV}{PU} \\
 &= \frac{GZ}{ZF} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{\mu}
 \end{aligned}$$

Damit liegt  $Z = \frac{\mu \cdot R \cdot F + r \cdot G}{\mu \cdot R + r}$  zwischen G und F fest, und man kann wieder die rote Gerade sich um Z drehen lassen.

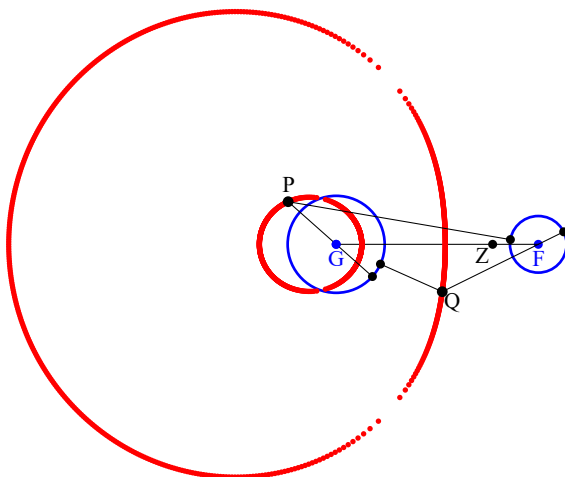


Wieder ist

- A =  $FU \cap GV$
- B =  $FU \cap GV'$
- C =  $FU' \cap GV$
- D =  $FU' \cap GV'$

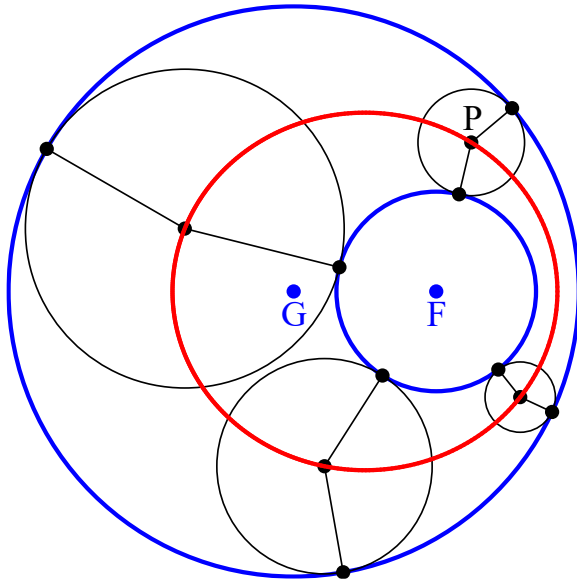
A und B haben maximalen Abstand zum Kreis um G und minimalen Abstand zu Kreis um F.

Bei C und D ist es umgekehrt: C und D haben minimalen Abstand zum Kreis um G und maximalen Abstand zum Kreis um F.



Für jeden Punkt P auf dem inneren Oval ist der minimale Abstand zum Kreis um F doppelt so groß wie der maximale Abstand zum Kreis um G.

Für jeden Punkt Q auf dem äußeren Oval ist der maximale Abstand zum Kreis um F doppelt so groß wie der minimale Abstand zum Kreis um G.

**Inklusiver Fall,  $\mu=1$** 

Was passiert, wenn der Kreis um F mit Radius  $r$  im Kreis um G mit Radius  $R$  enthalten ist?

Beginnen wir wieder mit dem Fall  $\mu=1$  und betrachten *minimale* Abstände:

Es muss

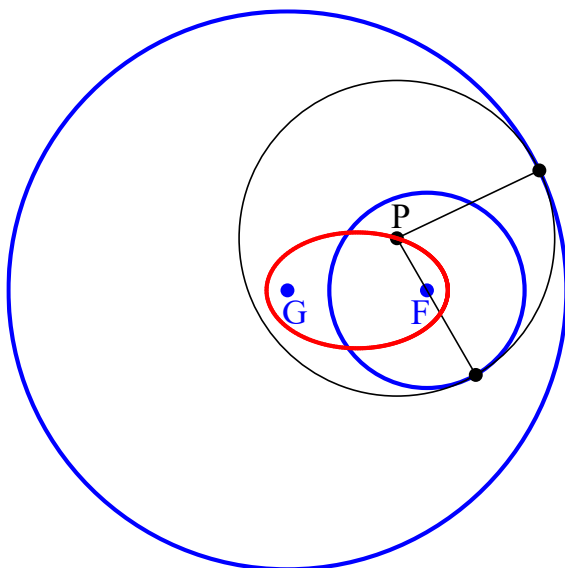
$$R - PG = PF - r \text{ bzw. } \boxed{PF + PG = r + R}$$

sein, es sich also um eine Ellipse handeln.

Bei Hyperbeln spielte auch der *maximale* Abstand eine Rolle. Dann muss

$$PF + r = PG + R \text{ bzw. } PF - PG = R - r$$

sein, was für  $GF > R - r$  auf eine Hyperbel führt. Andererseits soll  $f + r < R$  sein, damit der kleine Kreis vollständig im großen enthalten ist, was sich nicht mit  $f > R - r$  verträgt.



Daher versuchen wir es mit einer Mischung:

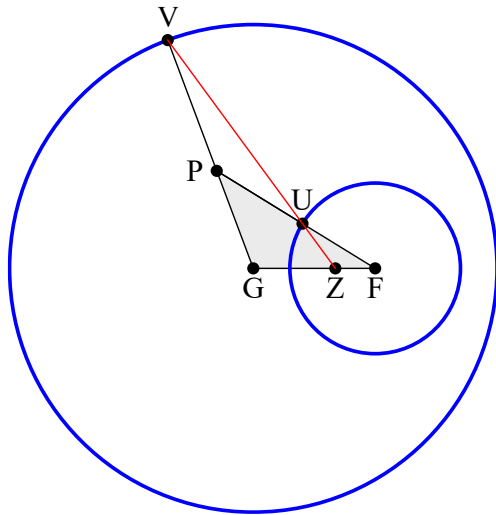
Die Punkte P, deren maximaler Abstand zum kleinen Kreis so groß ist wie der minimale Abstand zum großen Kreis, erfüllen

$R - PG = PF + r$  bzw.  $\boxed{PF + PG = R - r}$ , liegen also auch auf einer (anderen) Ellipse.

Beide Ellipsen haben G und F als Brennpunkte.

**Inklusiver Fall,  $\mu \neq 1$** 

Nun sei  $\mu \neq 1$ . Der minimale Abstand PU zum kleinen Kreis soll  $\mu$ -mal so groß sein wie der minimale Abstand PV zum großen Kreis, was auf  $PF - r = \mu \cdot (R - PG)$  bzw. auf  $\boxed{\mu \cdot PG + PF = \mu \cdot R + r}$  führt.



Es sei P ein derartiger Punkt.  
 VU schneidet GF in Z, und VU ist Transversale zum Dreieck GFP.

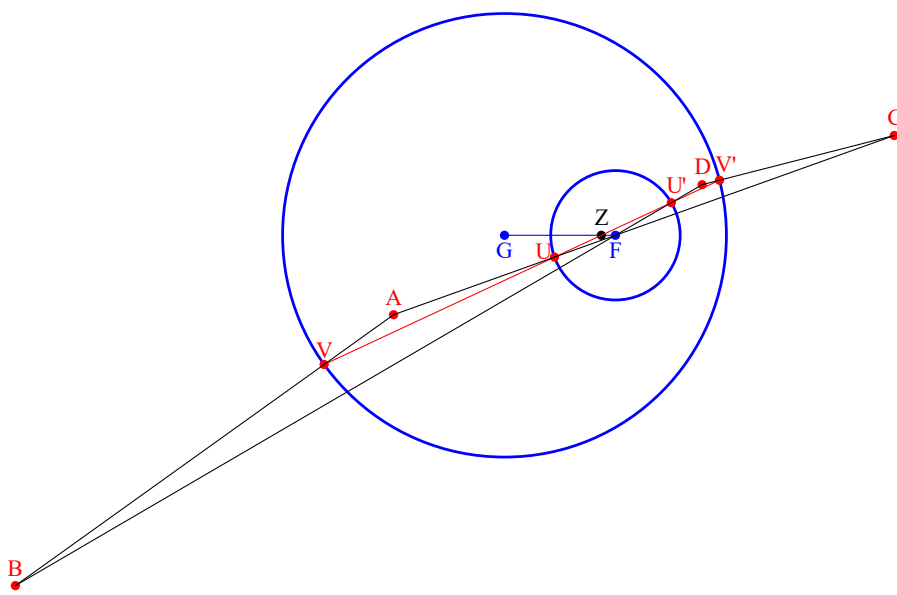
Nach dem Satz des Apollonius ist

$$1 = \frac{GZ}{ZF} \cdot \frac{FU}{UP} \cdot \frac{VP}{VG} = \frac{GZ}{ZF} \cdot \frac{PV}{PU} \cdot \frac{FU}{VG} = \frac{GZ}{ZF} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{r}{R}$$

Damit ist

$$Z = \frac{\mu \cdot R \cdot F + r \cdot G}{\mu \cdot R + r}$$

zwischen G und F festgelegt, und man kann wieder eine (rote) Gerade sich um Z drehen lassen.



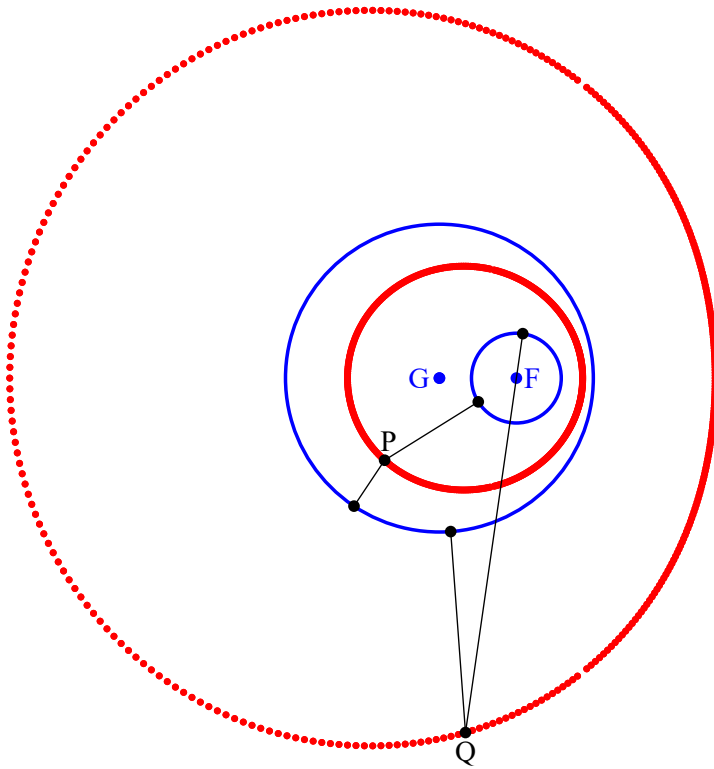
$$A = FU \cap GV'$$

$$B = FU' \cap GV$$

$$C = FU \cap GV'$$

$$D = FU' \cap GV'$$

A und D sind vom kleinen Kreis doppelt so weit entfernt wie vom großen. Bei B und C ist die maximale Entfernung zum kleinen Kreis doppelt so groß wie die minimale Entfernung zum großen Kreis.



Für Punkte P auf dem inneren Oval ist der minimale Abstand zum kleinen Kreis doppelt so groß wie der minimale Abstand zum großen Kreis.

Für Punkte Q auf dem äußeren Oval ist der maximale Abstand zum kleinen Kreis doppelt so groß wie der minimale Abstand zum großen Kreis.