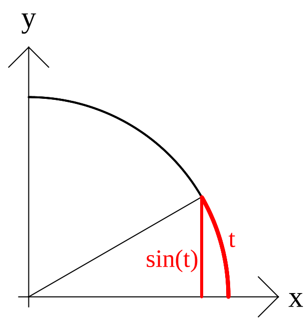
# Wozu braucht man das Bogenmaß?

Bei der Ableitung der Sinusfunktion tritt $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$ auf; dieser Wert ist 1, wenn das Argument t der Sinusfunktion im Bogenmaß gemessen wird.

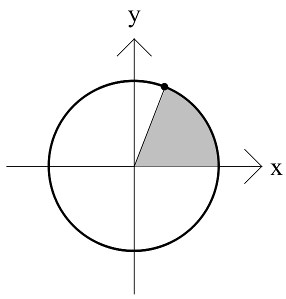



Nur unter dieser Voraussetzung bekommt man die schöne Beziehung

$$\sin'(t)=\cos(t).$$

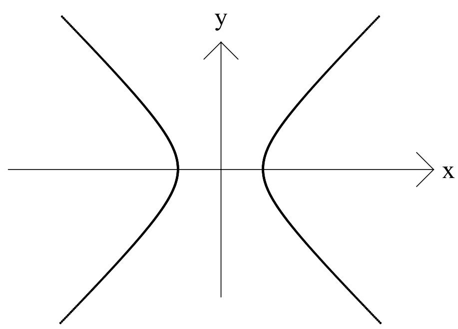
Die Bevorzugung des Bogenmaßes hat also den gleichen Grund wie die Bevorzugung der Euler'schen Zahl e bei Exponentialfunktionen: Beim Ableiten werden die Formeln einfacher.

Statt des Bogenmaßes könnte man auch auf die Idee kommen, den Winkel durch die zugehörige Fläche ausdrücken zu wollen. Bezeichnet man beim Einheitskreis den Mittelpunktswinkel mit t (im Bogenmaß), so hat die getönte Fläche den Inhalt $\pi\cdot\frac{t}{2\cdot\pi}=\frac{t}{2}$.



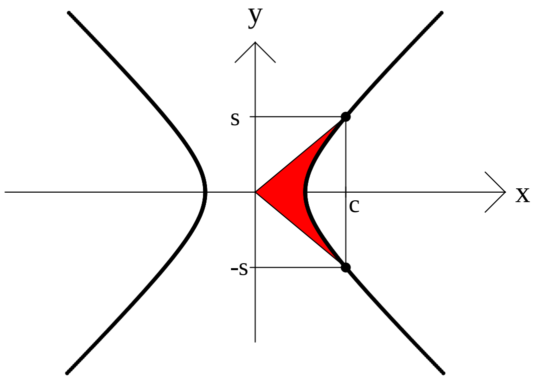

Das Flächenmaß liefert also im Gegensatz zum Bogenmaß nicht eine so schöne Ableitungsformel.

Das ist anders bei anderen Kurven:
Nahe verwandt zum Einheitskreis mit der Gleichung $x^2+y^2=1$ und dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ ist die Einheitshyperbel mit der Gleichung $x^2-y^2=1$ und dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix}$ mit den Nullstellen $\pm 1$ und mit $\cosh(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ und $\sinh(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$.




Es erhebt sich die Frage, was das Argument t anschaulich bedeutet.

Wir fangen andersherum an, betrachten den Punkt $\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\end{pmatrix}$ auf der Hyperbel und fragen nach dem durch die folgende Skizze rot markierten Flächeninhalt:




Dieser Flächeninhalt ist gegeben durch

$$A = c \cdot s - 2 \cdot \int_1^c \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx .$$

Nun ist

$$\int_1^c \sqrt{x^2-1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left( x \cdot \sqrt{x^2-1} - \ln\left( x + \sqrt{x^2-1} \right) \right) \Big|_1^c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left( c \cdot \sqrt{c^2-1} - \ln\left( c + \sqrt{c^2-1} \right) \right)$$

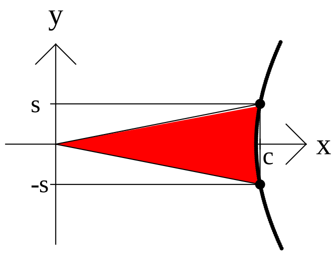
$$= \frac{1}{2} \cdot \left( c \cdot s - \ln(c+s) \right)$$

und daher

$$A = \ln(c+s) = \ln e^t = t .$$

Es ist mithin t der Inhalt der rot getönten Fläche.

Analog zur Sinusfunktion ist $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sinh t}{t} = 1$,
wie an der Skizze anschaulich zu vermuten ist, denn die rot getönte Fläche hat etwa den Inhalt $t \approx \cosh(t) \cdot \sinh(t) \approx 1 \cdot \sinh(t)$.




Dass man bei der Hyperbel nach dem Flächeninhalt und nicht nach der Bogenlänge gefragt hat, ist kein Zufall: Das Bogenlängenintegral ist nämlich nicht elementar auswertbar. Es gilt der

Satz von Čebyšev[1]: Das Bogenlängenintegral zu $y = x^k$ ist genau dann elementar auswertbar, wenn $k = 1$ (das ist der triviale Fall) oder wenn $k = 1 + \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist.

[1] Lesbar aufgeschrieben in: Marchisotto / Zakeri: An invitation to integration in finite terms. College Mathematics Journal vol. 25, no. 4 (September 1994); S. 295 – 308; speziell S. 305.

Demnach ist die Bogenlänge zu $y = \frac{1}{x}$ nicht elementar zu bestimmen und damit auch nicht die Bogenlänge der oben gegebenen Hyperbel, die aus der zu $y = \frac{1}{x}$ durch Drehung und Streckung hervorgeht.