Jörg MEYER, Hameln

Mai 2022

Etwas über Binomialkoeffizienten (und Potenzsummen)

Binomialkoeffizienten als Quotienten

Die Beziehung $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ lässt sich auf mehrere Arten einsehen:

1. Interpretiert man $\binom{n}{k}$ als Anzahl der Möglichkeiten, k Objekte an n Stellen zu verteilen (wobei jede Stelle maximal ein Objekt fassen kann), so hat man beim ersten Objekt n Möglichkeiten, beim zweiten nur noch $n-1$ Möglichkeiten, beim letzten nur noch $n-(k-1)$ Möglichkeiten, zusammen also $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten. Diese Anzahl ist noch durch $k!$ zu teilen, weil die k Objekte ununterscheidbar sein sollen.

2. Die Anzahl $n!$ der Möglichkeiten, n Objekte zu permutieren, spaltet sich auf in die Anzahl $\binom{n}{k}$ der Möglichkeiten, zunächst sich auf k Objekte zu konzentrieren, diese zu permutieren und dann die restlichen $n-k$ Objekte zu permutieren. Damit ist $n! = \binom{n}{k} \cdot k! \cdot (n-k)!$.

Eine Produktsumme

Eine Urne enthält R rote und $N-R=B$ blaue Kugeln. Man zieht n-mal ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit, dabei r rote Kugeln und $n-r=b$ blaue Kugeln zu ziehen, beträgt bekanntlich $\frac{\binom{R}{r} \cdot \binom{B}{b}}{\binom{R+B}{r+b}}$, woraus $\boxed{\binom{B+R}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{B}{n-r} \cdot \binom{R}{r}}$ folgt. In einem Stochastikbuch für das Universitätsstudium liest man dazu die Bemerkung, dass man wohl schwerlich auf die letzte Formel gekommen wäre ohne Kenntnis der hypergeometrischen Verteilung. Aber man muss nicht alles glauben, was man liest.

Die Anzahl der Möglichkeiten, bei $R+B$ Versuchen n Erfolge zu haben, spaltet sich wie folgt auf:

Entweder hat man bei den ersten B Versuchen schon n Erfolge, dann braucht man bei den letzten R Versuchen ausschließlich Mißerfolge, was nur auf eine Art geht.

Oder man hat bei den ersten B Versuchen erst $n-1$ Erfolge und braucht dann bei den letzten R Versuchen noch genau einen Erfolg, was auf R Arten geht.

Oder man hat bei den ersten B Versuchen erst $n-2$ Erfolge und braucht dann bei den letzten R Versuchen noch 2 Erfolge, was auf $\binom{R}{2}$ Arten geht.

...

Oder man hat bei den ersten B Versuchen noch gar keinen Erfolg und braucht dann bei den letzten R Versuchen noch n Erfolge, was auf $\binom{R}{n}$ Arten geht.

Zusammen: $\binom{B+R}{n}=\sum_{r=0}^{n}\binom{B}{n-r}\cdot\binom{R}{r}$, da die angeführten Ereignisse alle zueinander disjunkt sind.

<u>Digression 1</u>: Die Formel $\binom{B+R}{n}=\sum_{r=0}^{n}\binom{B}{n-r}\cdot\binom{R}{r}$ ist als Faltungsformel von VANDERMONDE bekannt. Man bekommt sie auch, wenn man $(1+x)^B$ mit $(1+x)^R$ multipliziert.

<u>Digression 2</u>: Mit dem modifizierten POCHHAMMER-Symbol $[x]_n := x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-(n-1))=\frac{x!}{(x-n)!}$ ist $\binom{n}{k}=\frac{[n]_k}{[k]_k}$. Die Faltungsformel schreibt sich damit als

$$[B+R]_n=\sum_{r=0}^{n}\frac{[B]_{n-r}}{[n-r]_{n-r}}\cdot\frac{[R]_r}{[r]_r}\cdot[n]_n=\boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cdot[R]_r\cdot[B]_{n-r}=[B+R]_n}.$$

Man beachte die Ähnlichkeit zur binomischen Formel.

Insbesondere ist bei der hypergeometrischen Verteilung (R rote Kugel, $B=N-R$ blaue Kugeln, n-malige Ziehung ohne Zurücklegen) die Wahrscheinlichkeit, r rote Kugeln *ohne* Zurücklegen zu ziehen, so groß wie $\frac{\binom{R}{r}\cdot\binom{B}{n-r}}{\binom{N}{n}}=\binom{n}{r}\cdot\frac{[R]_r\cdot[B]_{n-r}}{[N]_n}$.

Beim Ziehen *mit* Zurücklegen hat diese Wahrscheinlichkeit den Wert $\binom{n}{r}\cdot\frac{R^r\cdot B^{n-r}}{N^n}$.

Summation über den unteren Index

Es ist $(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$; hier werden die Binomialkoeffizienten summiert, indem der *untere* Index die Summationsvariable ist.

Summation über den oberen Index

Ist der *obere* Index die Summationsvariable, bekommt man für $k\geq 1$ unter Beachtung von $\binom{j}{k}=\binom{j+1}{k+1}-\binom{j}{k+1}$ und von $\binom{j}{k}=0$ für $j<k$ die Beziehung

$$\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n-1}{k}+\binom{n}{k}$$

$$=\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+2}{k+1}+\binom{k+3}{k+1}+\ldots+\binom{n}{k+1}+\binom{n+1}{k+1}-\left(\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+2}{k+1}+\ldots+\binom{n-1}{k+1}+\binom{n}{k+1}\right)$$

$$=\boxed{\binom{n+1}{k+1}=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}}$$

Man hätte auch mit dem Ergebnis anfangen können:

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1}&=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\\&=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}\\&=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k}+\binom{n-2}{k+1}\\&=\binom{n}{k}+\ldots+\binom{k}{k}+\underbrace{\binom{k}{k+1}}_{=0}=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\end{aligned}$$

Anwendung auf Potenzsummen

Für $k=1$ ist $\sum_{i=1}^{n} i=\binom{n+1}{2}$ die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

Für $k=2$ bekommt man die Summe $\sum_{i=2}^{n}\binom{i}{2}=\binom{n+1}{3}$ der ersten Dreieckszahlen. Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^2&=\sum_{i=1}^{n} i\cdot(i-1)+\sum_{i=1}^{n} i=2\cdot\sum_{i=2}^{n}\binom{i}{2}+\binom{n+1}{2}=2\cdot\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\&=n\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{n-1}{3}+\frac{1}{2}\right)=n\cdot(n+1)\cdot\frac{2\cdot n+1}{6}\end{aligned}$$

hat man damit auch die Summe der ersten n Quadratzahlen.

Das geht auch so weiter: Mit

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^3&=\sum_{i=1}^{n} i\cdot(i-1)\cdot(i-2)+3\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2-2\cdot\sum_{i=1}^{n} i=6\cdot\sum_{i=3}^{n}\binom{i}{3}+3\cdot\left(2\cdot\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\right)-2\cdot\binom{n+1}{2}\\&=6\cdot\binom{n+1}{4}+6\cdot\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\&=n\cdot(n+1)\cdot\left(\frac{(n-1)\cdot(n-2)}{4}+(n-1)+\frac{1}{2}\right)=n\cdot(n+1)\cdot\frac{n^2+n}{4}=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

hat man auch die Summe der ersten Kubikzahlen.

Zusammenfassung:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} = 2\cdot\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = -\binom{n+1}{2} + 2\cdot\binom{n+2}{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} = 6\cdot\binom{n+1}{4} + 6\cdot\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \binom{n+1}{2} - 6\cdot\binom{n+2}{3} + 6\cdot\binom{n+3}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)\cdot\left(3\cdot n^2+3\cdot n-1\right)}{30} = 24\cdot\binom{n+1}{5} + 36\cdot\binom{n+1}{4} + 14\cdot\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$