Jörg MEYER, Hameln

# Von der binomischen Formel zur Taylorreihe

Mit den Operatoren $I: f(i) \to f(i)$ $E_h: f(i) \to f(i+h)$, $\Delta_h: f(i) \to f(i+h) - f(i) = \left(E_h - I\right) f(i)$ ist $E_h = \Delta_h + I$ und

$$f(x) = f\left(n \cdot \underbrace{\boxed{\frac{x}{n}}}_{=h}\right) = f\left(n \cdot h\right) = E_h^n f(0) = \left(I + \Delta_h\right)^n f(0) = \sum_{i \geq 0} \binom{x/h}{i} \cdot \Delta_h^i f(0)$$

$$= f(0) + \frac{x}{h} \cdot \left(f(h) - f(0)\right) + \frac{\frac{x}{h} \cdot \left(\frac{x}{h} - 1\right)}{2} \cdot \left(f\left(2 \cdot h\right) - 2 \cdot f(h) + f(0)\right) + \ldots$$

$$= f\left(0\right) + x \cdot \frac{f\left(h\right) - f\left(0\right)}{h} + \frac{x \cdot \left(x - h\right)}{2} \cdot \frac{\frac{f\left(2 \cdot h\right) - f\left(h\right)}{h} - \frac{f\left(h\right) - f\left(0\right)}{h}}{h} + \ldots$$

Nun kommt ein „Schritt beispielloser Kühnheit“[1]: Brook Taylor lässt 1715 die Abszissendifferenz h gegen 0 gehen und erhält die Taylorreihe:

$$\boxed{f(x) = f(0) + x \cdot f'(x_0) + \frac{x^2}{2} \cdot f''(x_0) + \ldots = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!} \cdot f^{(i)}(0)}$$

oder allgemeiner

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \left(x - x_0\right) \cdot f'(x_0) + \frac{\left(x - x_0\right)^2}{2} \cdot f''(x_0) + \ldots = \sum_{i \geq 0} \frac{\left(x - x_0\right)^i}{i!} \cdot f^{(i)}(x_0)}.$$

[1] Felix Klein; zitiert nach Hairer / Wanner: Analysis by its history. 1996 New York: Springer; S. 93.