Jörg MEYER, Hameln

Die binomische Formel und Potenzsummen

Mit den Operatoren $I: f(i) \to f(i)$; $E: f(i) \to f(i+1)$ sowie $\Delta: f(i) \to f(i+1) - f(i) = (E - I) f(i)$ ist

$\Delta = E - I$ und $E = \Delta + I$. Dann ist $f(n) = E^n f(0) = (I + \Delta)^n f(0) = \boxed{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \Delta^i f(0) = f(n)}$.

1. Beispiel: Summe der ersten natürlichen Zahlen

$$f(i) = \sum_{k=0}^{i} k$$

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i) = i+1$$

$$\Delta^2 f(i) = (i+2) - (i+1) = 1$$

$$\Delta^3 f(i) = 1 - 1 = 0$$

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \Delta^i f(0) = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n} k}$$

2. Beispiel: Summe der ersten Quadratzahlen

$$f(i) = \sum_{k=0}^{i} k^2$$

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i) = (i+1)^2$$

$$\Delta^2 f(i) = (i+2)^2 - (i+1)^2 = 2 \cdot i + 3$$

$$\Delta^3 f(i) = 2 \cdot (i+1) + 3 - (2 \cdot i + 3) = 2$$

$$\Delta^4 f(i) = 0$$

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \Delta^i f(0) = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 3 + \binom{n}{3} \cdot 2 = \boxed{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6} = \sum_{k=0}^{n} k^2}$$

3. Beispiel: Summe der ersten Kubikzahlen

$$f(i) = \sum_{k=0}^{i} k^3$$

$$\Delta f(i) = f(i+1) - f(i) = (i+1)^3$$

$$\Delta^2 f(i) = (i+2)^3 - (i+1)^3 = 3 \cdot i^2 + 9 \cdot i + 7$$

$$\Delta^3 f(i) = 3 \cdot (i+1)^2 + 9 \cdot (i+1) - 3 \cdot i^2 + 9 \cdot i = 6 \cdot i + 12$$

$$\Delta^4 f(i) = 6$$

$$\Delta^5 f(i) = 0$$

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot \Delta^i f(0) = \binom{n}{1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 7 + \binom{n}{3} \cdot 12 + \binom{n}{4} \cdot 6 = \boxed{\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \sum_{k=0}^{n} k^3}$$