Ein Weg zu Bézierkurven[1]

Die folgende Unterrichtseinheit ist für den Leistungskurs Mathematik konzipiert. Sie hat den Kern des *Computer Aided Geometric Design* zum Inhalt, nämlich den Entwurf von Freiformkurven. Sie hat ein offenes Ende; entsprechend offen ist der Zeitbedarf.

In Bezug auf den Unterricht stellt die Einheit eine Verbindung von Analysis und Vektorgeometrie dar. Sie ist ohne Computer sinnlos; dynamische Geometrie–Software und Funktionsplotter sind beide zur Veranschaulichung, zum Experimentieren und zum Explorieren unabdingbar erforderlich.

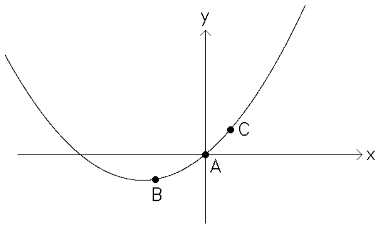
0. Einleitung

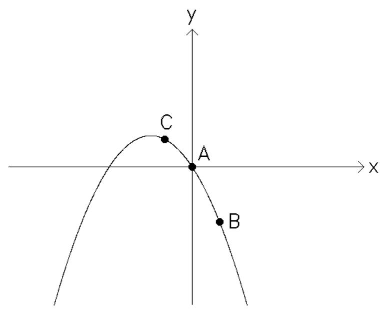
Kurven im Automobilbau werden auch von Designern entworfen, die in keinem Leistungskurs Mathematik waren. Sie zeichnen eine „schön“ aussehende Kurve auf dem Papier (oder mit der Maus auf dem Bildschirm), und die Techniker stehen dann vor dem Problem, gemäß dieser Kurve ein Metallteil zu schneiden. Natürlich kann man aus der Designer–Kurve eine Holz– oder Metallvorlage basteln, aber das hat denn doch zu viele Nachteile: Die Vorlage ist schlecht zu transportieren, sie nutzt sich ab und ist dann nicht genau reproduzierbar. Besser wäre es, die Designer–Kurve mathematisch zu beschreiben. Da unser Designer seine wenigen Mathematikkenntnisse längst vergessen hat, kann man von ihm nicht verlangen, dass er zu seiner schönen Kurve geeignete Funktionsterme angibt.

Nun kann man sich damit behelfen, auf seiner Kurve Punkte genau auszumessen, und durch diese Punkte eine Kurve zu legen, von der man hofft, dass sie mit der Designer–Kurve gut übereinstimmt.

Dass dies nicht funktionieren kann, zeigen die folgenden Beispiele:

Durch 3 Punkte (etwa $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) wird eine Parabel bestimmt, die in der üblichen Weise im Koordinatensystem liegt. Die Lösung (Ansatz: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$) lautet $f(x) = \frac{1}{6} \cdot x^2 + \frac{5}{6} \cdot x$ (linkes Bild).





Aber hat der Designer das Koordinatensystem überhaupt mitbedacht? Dreht man das Koordinatensystem um A mit dem Winkel 90°, so erhält man die neuen Punkte $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Legt man nun durch A, B und C eine Parabel, so bekommt man $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x$ (rechtes Bild).

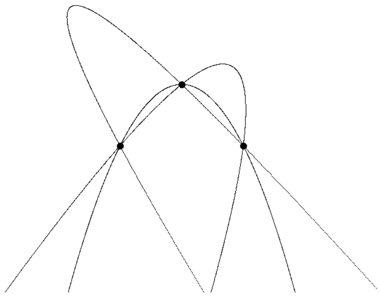
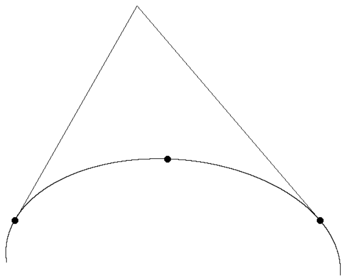
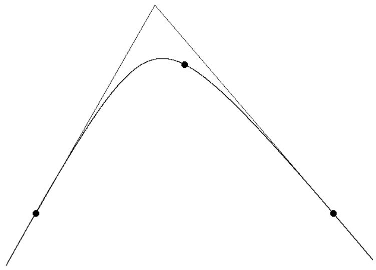
Die neue Parabel hat eine andere Öffnung als die erste. Auch die Scheitelpunkte gehen nicht durch Drehung auseinander hervor.

Allgemein kann man durch 3 (nicht kollineare) Punkte unendlich viele verschiedene Parabeln legen. Der Grund ist der folgende:

Die 3 Punkte seien A, B, C, und ein allgemeiner Kurvenpunkt sei $X(t)$. Gebilde mit dem allgemeinen Punkt $X(t) = U + t \cdot V$ sind bekanntlich Geraden; weiter unten wird gezeigt werden, dass Gebilde mit dem allgemeinen Punkt $X(t) = U + t \cdot V + t^2 \cdot W$ Parabeln sind.

[1] Erschienen in Mathematik in der Schule **38** (5), S. 303 - 314 (2000).

Sicher wird man fordern können, dass $X(0) = A$ und $X(1) = B$ ist. Aber welcher Parameter soll zu C gehören? Das Aussehen der Kurve hängt sehr davon ab, wofür man sich entscheidet.

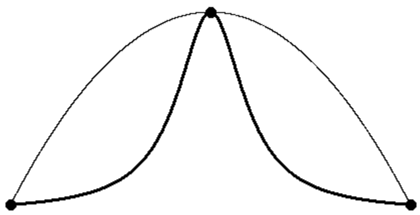
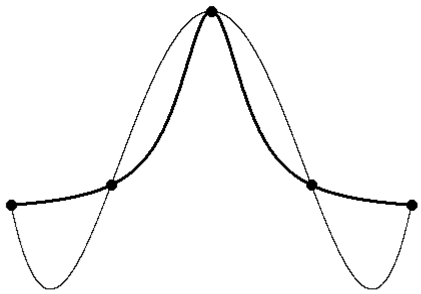




Auch wenn man zusätzlich zwei Tangenten vorschreibt, bekommt man keine eindeutige Kurve heraus. Im mittleren Bild hat man gar keine Parabel, sondern eine Ellipse, und im rechten Bild ist die Kurve eine Hyperbel.

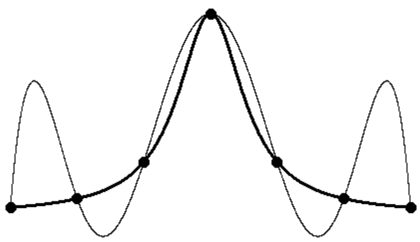
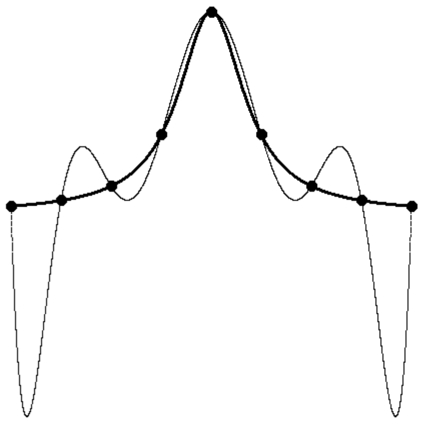
Nun gut; so geht es offenbar nicht. Aber warum wollen wir die Designer–Kurve auch mit nur 3 Punkten beschreiben? Nehmen wir an, der Designer habe sich folgende Gestalt ausgedacht:

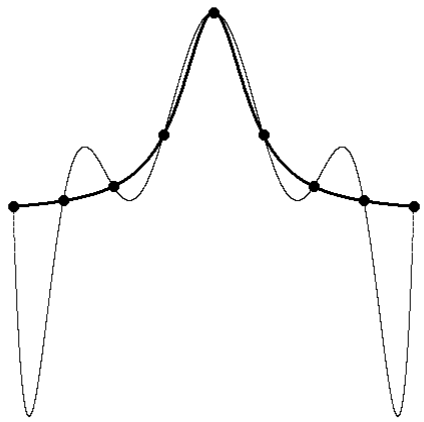
Auf die Kurve legen wir Punkte und ermitteln die sich aus diesen Punkten ergebende Kurve (Lagrange–Interpolation; es reicht, den Lernenden die folgenden Graphiken zu zeigen). Als Parameter wählen wir die jeweiligen x–Werte.

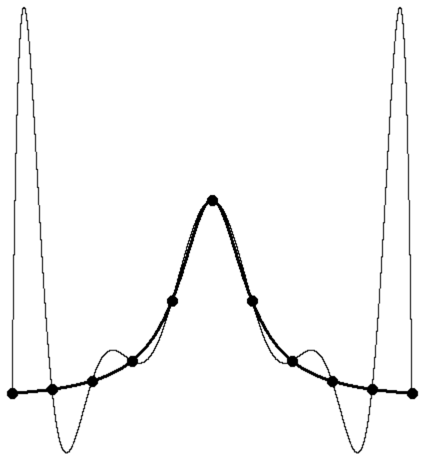
Bei 3 Punkten bekommt man einen Parabelbogen, der der gewünschten Kurve noch nicht ähnlich sieht. Das Aussehen lässt sich mit 2 weiteren Punkten verbessern.

Vermehrt man die Anzahl der Punkte, so wird das Ergebnis nicht unbedingt besser:

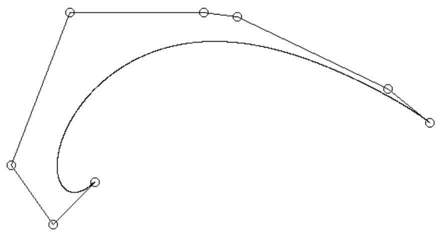



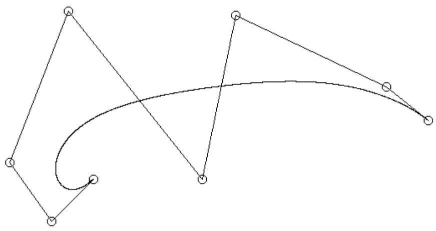




Solche Schwingungsphänomene können auftreten, müssen aber nicht. Allerdings gibt es keine praktikable Methode, vorherzusagen, ob ein solches Phänomen auftritt oder nicht.
Damit gibt es auch keine praktikable Methode, um aus Kurvenpunkten eindeutig und sicher die Kurve zu reproduzieren.

Dies war die Situation im Automobilbau um 1960 herum. Dann kamen Paul de Faget de Casteljau (von der Firma Citroën) und Pierre Bézier (von der Firma Renault) unabhängig voneinander auf die Idee, Kurven ganz anders zu erzeugen und zu beschreiben, nämlich ausgehend von wenigen Punkten, die gar nicht alle auf der Kurve zu liegen brauchen. Der Designer bekommt eine interaktive Software, zieht an den Punkten und sieht, wie sich die Kurve verändert:

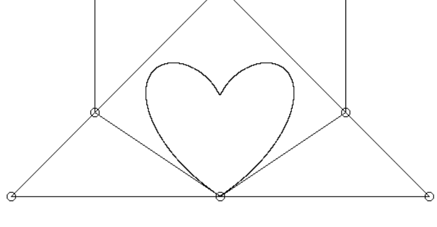




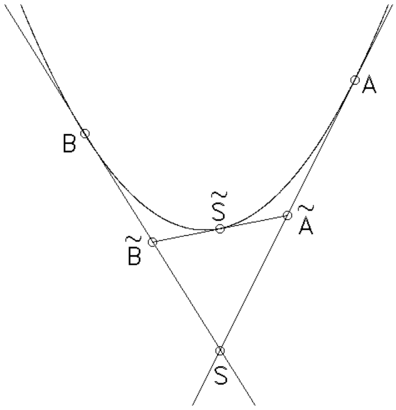
Da der Gebrauch dieser Software recht intuitiv ist, bekommt der Designer recht schnell ein Gefühl dafür, wie er die Punkte verändern muss, um zu der von ihm gewünschten Form zu gelangen. Zur Beschreibung der Kurve sind dann nur noch die Punkte notwendig. Man kann auch beweisen, dass die oben erwähnten Schwingungsphänomene bei dieser Art der Kurvenbeschreibung nicht auftreten können.

Die entstehenden Kurven sind nach Bézier benannt (obwohl de Casteljau etwas früher darauf gekommen war, aber von Citroën zur Geheimhaltung verpflichtet war). Die dahinter steckende Mathematik ist Gegenstand der nächsten Kapitel. Das Grundprinzip lässt sich auch anwenden, um (Karosserie–)Flächen zu beschreiben.

Aber auch außerhalb des Autobaus spielen Bézierkurven eine wachsende Rolle: So werden skalierbare Buchstaben mit Bézierkurven beschrieben, und Freihandkurven in Corel Draw oder auch in Word 97 werden im Béziermodus erzeugt.



Vielleicht erinnerte sich de Casteljau an den folgenden Sachverhalt:



Es seien $A = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b \\ b^2 \end{pmatrix}$ auf der Normalparabel.

Die zugehörigen Tangenten $t_a : y = 2 \cdot a \cdot x - a^2$ und

$t_b : y = 2 \cdot b \cdot x - b^2$ schneiden einander in $S = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ a \cdot b \end{pmatrix}$.

Es sei $A = \dfrac{A+S}{2}$ und $B = \dfrac{B+S}{2}$.

Dann liegt $S = \dfrac{A+B}{2} = \begin{pmatrix} (a+b)/2 \\ ((a+b)/2)^2 \end{pmatrix}$ auf der Parabel.

Die Verbindungsgerade von A und B ist Tangente zu S.

<u>1. Idee</u>: Was passiert, wenn man AS usw. nicht halbiert, sondern ein anderes Teilverhältnis nimmt?

Es sei $A = (1-t) \cdot A + t \cdot S$ und $B = (1-t) \cdot S + t \cdot B$ sowie $S = (1-t) \cdot \tilde{A} + t \cdot \tilde{B} = \begin{pmatrix} (1-t) \cdot a + t \cdot b \\ ((1-t) \cdot a + t \cdot b)^2 \end{pmatrix}$.

Wieder gilt: S liegt auf der Parabel, und die Verbindungsgerade von A und B ist Tangente zu S.

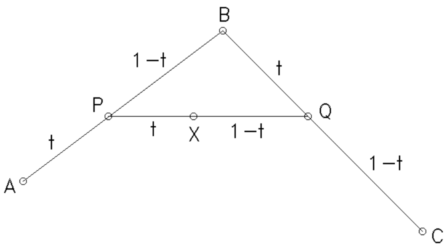
<u>2. Idee</u>: Diesen Sachverhalt kann man nutzen, um durch A, B und S Parabeln zu erzeugen. Für das Folgende nennen wir A, S, B in A, B, C um. Dann geht die Erzeugung so:

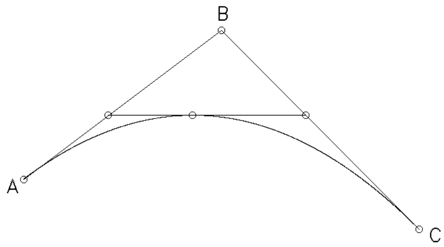
1. Der einfachste Fall: Quadratische ganze Bézierkurven

Erzeugung

Gegeben seien 3 Punkte A, B und C, die nicht kollinear sind. P teile AB im Verhältnis $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{t}{1-t}$.

Q teile BC im selben Verhältnis. R teile PQ wiederum im selben Verhältnis.





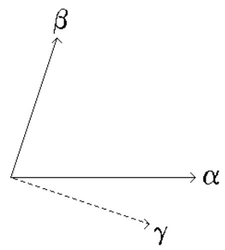
Wird t variiert, so bewegt sich R auf einer Kurve (rechtes Bild). Wenn man mit A, B und C etwas spielt, bekommt man bald den Verdacht, dass die sich ergebenden Kurven stets <u>Parabeln</u> sind. Das ist auch tatsächlich der Fall.

Warum ist die Kurve eine Parabel?

Wegen $P = (1-t) \cdot A + t \cdot B$ und $Q = (1-t) \cdot B + t \cdot C$ sowie $X = (1-t) \cdot P + t \cdot Q$ folgt

$$X(t) = (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot B + t^2 \cdot C = A + 2 \cdot t \cdot \underbrace{(B-A)}_{=:\,\alpha} + t^2 \cdot \underbrace{(C - 2 \cdot B + A)}_{=:\,\beta}.$$

Wenn α und β aufeinander senkrecht stehen, kann man sofort auf die Parabeleigenschaft schließen. Ansonsten wähle man einen Vektor γ, der auf β senkrecht steht.



Man kann dann $\alpha = i \cdot \beta + j \cdot \gamma$ schreiben, und wegen

$$X(t) = A + 2 \cdot t \cdot \alpha + t^2 \cdot \beta = A + 2 \cdot t \cdot (i \cdot \beta + j \cdot \gamma) + t^2 \cdot \beta = A + 2 \cdot t \cdot j \cdot \gamma + \left(2 \cdot t \cdot i + t^2\right) \cdot \beta$$

ist die Parabeleigenschaft offensichtlich. Jede auf diese Art mit 3 Punkten erzeugt Bézierkurve ist also eine Parabel. Der Beweis zeigt sogar, dass jede Kurve mit dem allgemeinen Punkt $X(t) = U + t \cdot V + t^2 \cdot W$ eine Parabel ist.

(Diese Klippe am Anfang ist der Grund dafür, dass Bézierkurven für den Grundkurs nicht geeignet sind.)

Parabeln sind <u>quadratische</u> Kurven, da ein beliebiger Kurvenpunkt die Form $X(t) = P + t \cdot Q + t^2 \cdot R$ hat. In den folgenden Abschnitten werden auch kubische Kurven thematisiert werden.

Parabeln sind ferner <u>ganze</u> Kurven, da der Term für $X(t)$ keinen t enthaltenden Nenner hat. Ein Kreis ist auch eine quadratische Kurve, aber keine ganze, da ein allgemeiner Kreispunkt die Form $X(t) = \frac{1}{t^2+1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$ hat; dies wird weiter hinten erläutert.

<u>Übungsaufgabe</u>: Quadratische ganze Kurven als Bézierkurven

Jede quadratische ganze Kurve mit dem allgemeinen Punkt $X(t) = P + t \cdot Q + t^2 \cdot R$ lässt sich als Bézierkurve mit dem allgemeinen Punkt $X(t) = (1-t)^2 \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot B + t^2 \cdot C$ darstellen. Man zeige dies durch Angabe von A, B und C.

(Ergebnis: $A = P$, $B = P + \frac{Q}{2}$, $C = P + Q + R$.)

Tangenten

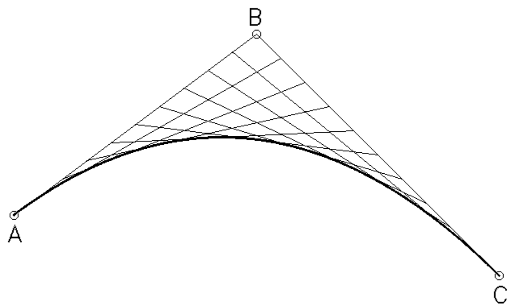
Man überlegt sich leicht, dass eine Kurve mit dem allgemeinen Punkt $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ an der Stelle t den Tangentenrichtungsvektor $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ hat, der kurz mit $X'(t)$ abgekürzt sei. Die Tangente an der Stelle t hat somit den allgemeinen Punkt $X(t) + \lambda \cdot X'(t)$.

<u>Übungsaufgabe</u>: Tangenten

Man beweise: Die Gerade durch A und B ist Tangente an A; entsprechendes gilt für C.
Die Gerade durch P und Q ist Tangente an X.

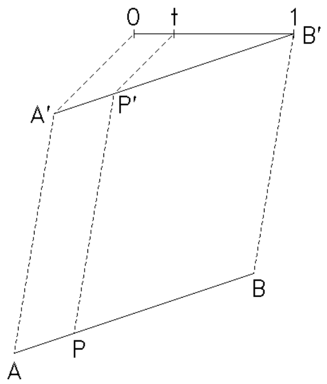
Die quadratische Bézierkurve als Hüllkurve

Da die Gerade durch P und Q Tangente an X ist, kann man eine quadratische Bézierkurve als Hüllkurve ihrer Tangenten auffassen.



2. Zur Konstruktion ganzer Bézierkurven mit Dynamischer Geometrie–Software

Bézierkurven kann man mit Hilfe eines Funktionsplotters erzeugen, aber auch mit Dynamischer Geometrie–Software. Der zweite Weg ist natürlich besonders instruktiv.
Nebenstehend die Konstruktion des Teilpunktes P.



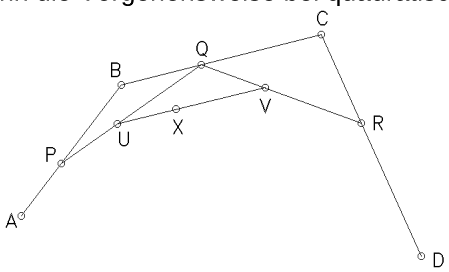
Oben befindet sich die Referenzstrecke 01. Die zu teilende Strecke AB wird parallel verschoben und Punkt P‘ nach dem Strahlensatz konstruiert. Die Konstruktion von P ist dann klar.
Nun schreibe man ein Makro, das zu 0, 1, t, A, B den Teilungspunkt P konstruiert. Bei quadratischen ganzen Bézierkurven kann man dies Makro dann anwenden auf AB, BC und PQ.
Dann schreibe man ein Makro, das zu 0, 1, t, A, B, C den Bézierpunkt X konstruiert.

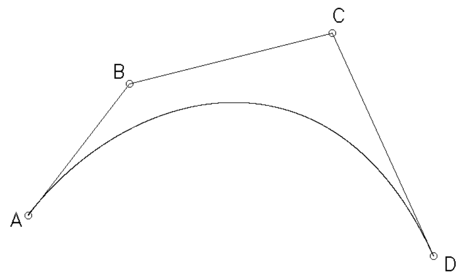
Die Konstruktion versagt, wenn die Referenzstrecke zu AB oder zu BC parallel ist. Das ist nicht weiter schlimm, da man die Referenzstrecke beliebig drehen kann.

3. Kubische ganze Bézierkurven

Erzeugung

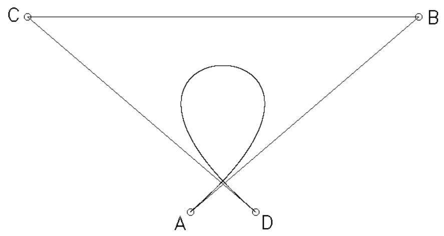
Man kann die Vorgehensweise bei quadratischen Bézierkurven auch mit 4 Punkten durchführen.

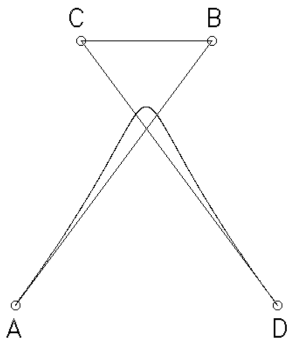




Man bekommt dann eine kubische Kurve. Weiter unten wird der allgemeine Punkt angegeben werden.

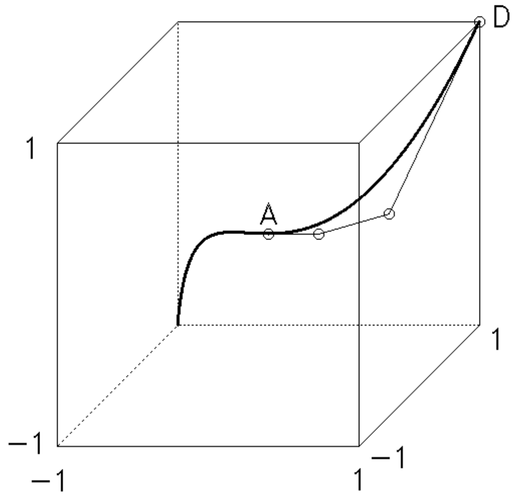
Die Kurve braucht allerdings kein Funktionsgraph zu sein. Die Kurve muss aber nicht unbedingt eine Schleife haben, wenn sich das Polygon ABCD überschlägt.





Im Gegensatz zu quadratischen Kurven kann eine kubische ganze Bézierkurve auch eine <u>Raumkurve</u> sein. So führt $A=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1/3\\0\\0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\0\end{pmatrix}$ und $D=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ auf die räumliche Parabel mit dem allgemeinen Punkt $\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}$.

Wir werden im folgenden nur ebene Kurven betrachten.



<u>Übungsaufgabe</u>: Allgemeine Darstellung

Man beweise, dass der allgemeine Punkt der durch A, B, C, D definierten kubischen ganzen Bézierkurve die Form $X(t)=(1-t)^3\cdot A+3\cdot t\cdot(1-t)^2\cdot B+3\cdot t^2\cdot(1-t)\cdot C+t^3\cdot D$ hat.

<u>Übungsaufgabe</u>: Kubische ganze Kurven als Bézierkurven

Es sei $X(t)=P+t\cdot Q+t^2\cdot R+t^3\cdot S$ eine kubische ganze Kurve. Sie lässt sich als Bézierkurve $X(t)=(1-t)^3\cdot A+3\cdot t\cdot(1-t)^2\cdot B+3\cdot t^2\cdot(1-t)\cdot C+t^3\cdot D$. darstellen.

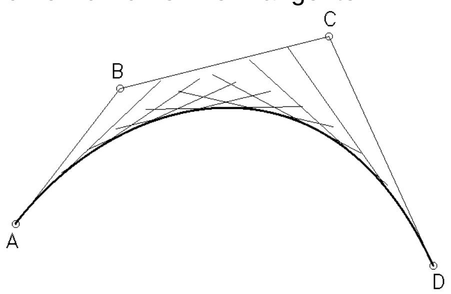
(Lösung: $A=P$, $B=P+\frac{Q}{3}$, $C=P+2\cdot\frac{Q}{3}+\frac{R}{3}$, $D=P+Q+R+S$.)

<u>Übungsaufgabe</u>: Tangenten und berührende Parabeln

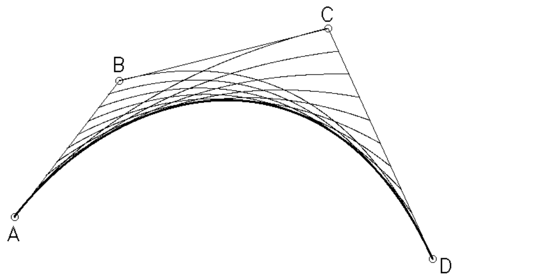
Man beweise die zu quadratischen Bézierkurven analoge Aussage.
Die zu P, Q, R gehörige quadratische Bézierkurve berührt die zu A, B, C, D gehörige kubische Bézierkurve.

Die kubische Bézierkurve als Hüllkurve

Wie im quadratischen Fall ist die kubische Bézierkurve Hüllkurve ihrer Tangenten:



Sie ist aber auch Hüllkurve ihrer berührenden Parabeln:

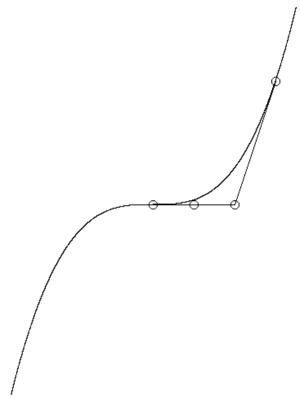


4. Beispiele kubischer ganzer Bézierkurven

Kubische Parabel

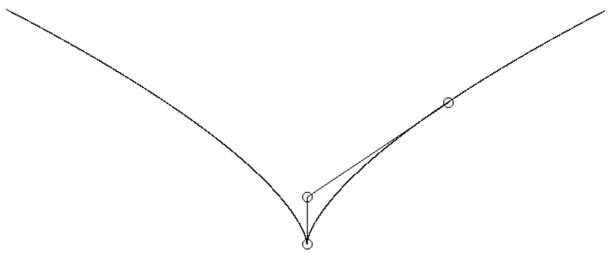
Es ist $y = x^3$; für jeden Kurvenpunkt gilt mithin $X(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$.

Also ist $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



<u>Neilsche Parabel</u>

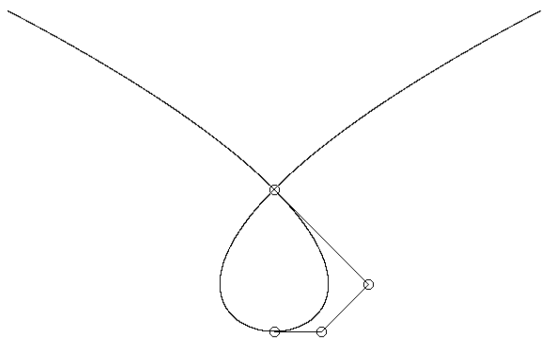
Es ist $y^3 = x^2$; für jeden Kurvenpunkt gilt $X(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ und damit $A = B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Kurve hat im Punkt A eine <u>Spitze</u>.



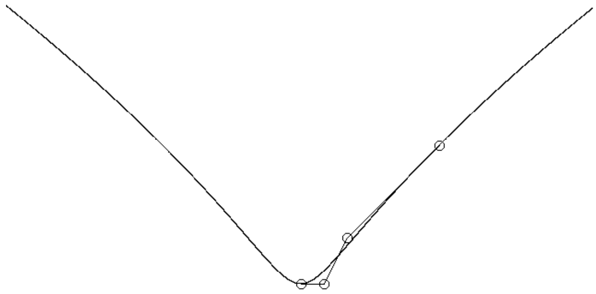
<u>Tschirnhaus–Kubik</u>

Es ist $x^2 = y \cdot (y-1)^2$; für jeden Kurvenpunkt gilt $X(t) = \begin{pmatrix} t - t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$, also $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Kurve hat in D einen <u>Doppelpunkt</u>.



Kubische Duplikatrix



Es ist $x^2 = y\cdot(y+1)^2$; für jeden Kurvenpunkt gilt $X(t) = \begin{pmatrix} t+t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ und damit $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Bild ist in waagerechter Richtung gestaucht.
Die kubische Duplikatrix hat zwei Wendepunkte.

5. Krümmung

Um Bézierkurven „schön“ miteinander verketten zu können, brauchen wir den Begriff der Krümmung. Wir betrachten die Kurve mit dem allgemeinen Punkt $X(t)$. Man erhält den Krümmungskreismittelpunkt $M(t)$, indem man die Normale zu $X(t)$ mit der Normalen zu $X(t+h)$ schneidet und im Schnittpunkt h gegen Null gehen lässt. Am besten kann man Geraden miteinander schneiden, wenn die eine in Parameterform und die andere in Normalenform gegeben ist. Für die Normalenform braucht man einen zum Tangentenrichtungsvektor $X'(t)$ orthogonalen Vektor; dieser sei mit $X'(t)^{\perp}$ bezeichnet. Für die allgemeinen Punkte Y der erwähnten Normalen gilt dann:

$Y = X(t) + s\cdot X'(t)^{\perp}$ (Normale zu t) und

$Y\cdot X'(t+h) = X(t+h)\cdot X'(t+h)$ (Normale zu $t+h$).

Die Schnittpunktsbestimmung führt auf

$$s = \frac{\big(X(t+h)-X(t)\big)\cdot X'(t+h)}{X'(t)^{\perp}\cdot X'(t+h)} = \frac{\frac{X(t+h)-X(t)}{h}\cdot X'(t+h)}{X'(t)^{\perp}\cdot\frac{X'(t+h)-X'(t)}{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{X'(t)\cdot X'(t)}{X'(t)^{\perp}\cdot X''(t)}$$

und liefert somit $M(t) = X(t) + \frac{X'(t)\cdot X'(t)}{X'(t)^{\perp}\cdot X''(t)}\cdot X'(t)^{\perp}$; die Krümmung als reziproker Krümmungskreisradius ist dann $\boxed{\kappa(t) = \frac{X'(t)^{\perp}\cdot X''(t)}{|X'(t)|^3}}$. Bei diesen Betrachtungen ist vorausgesetzt, dass $X'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

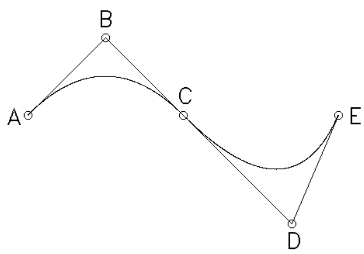
Ist $X'(t)^{\perp}\cdot X''(t) = 0$, so ist zwar der Begriff des Krümmungskreises nicht mehr sinnvoll, wohl aber der Begriff der Krümmung.

6. Verkettungen

Bézierkurven hohen Grades erweisen sich als schlecht handhabbar; weil die Abänderung eines Punktes Auswirkungen auf den ganzen Verlauf der Kurve haben kann. Aus diesem Grunde ist es sinnvoller, quadratische oder kubische Bézierkurven aneinanderzusetzen: Ändert man jetzt einen Punkt ab, so hat das nur lokale Auswirkungen.

Verkettung quadratischer ganzer Bézierkurven

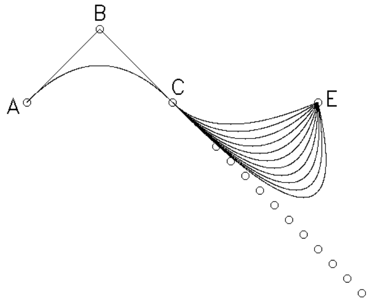
Will man durch 3 Punkte A, C, E der Ebene eine möglichst schöne Kurve legen, so bietet es sich an, zwei quadratische ganze Bézierkurven aneinander zu hängen.
Damit am Verbindungspunkt C kein Knick auftritt, müssen B, C, D kollinear sein. (Warum?)



Die nebenstehende Figur zeigt den Einfluss von D.

Die Verallgemeinerung auf n Punkte liegt auf der Hand.

Auf diese Art werden Buchstaben beschrieben (Beispiel: TrueType).



Krümmungssprünge nimmt man in Kauf. Bei den Figuren ist deutlich zu sehen, dass der linke Kurventeil bei C eine andere Krümmung hat als der rechte Kurventeil. Da es sich bei quadratischen ganzen Bézierkurven um Parabeln handelt, hat man auch gar keine Möglichkeiten, Krümmungssprünge zu vermeiden. So sollte im obigen Beispiel die Parabel durch A und C nach unten geöffnet und damit durchgängig rechtsgekrümmt sein. Entsprechend sollte die Parabel durch C und E durchgängig linksgekrümmt sein. Bei C kann die Krümmung auch nicht verschwinden, da Parabeln keine Punkte verschwindender Krümmung haben.

Will man Krümmungssprünge vermeiden, braucht man kubische ganze Bézierkurven.

Zur Differenzierbarkeit

Sind B, C, E kollinear, so hat die durch A, ..., E beschriebene zusammengesetzte Kurve bei C eine eindeutig bestimmte Tangente. Hieraus folgt allerdings nicht, dass die Kurve komponentenweise differenzierbar wäre! Beispiel:

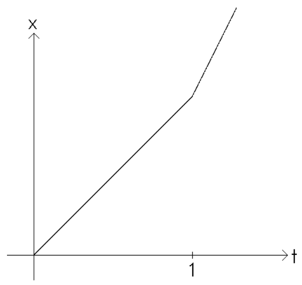
$$X(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} & \text{für } t \le 1 \\ \begin{pmatrix} 2 \cdot t - 1 \\ (2 \cdot t - 1)^2 \end{pmatrix} & \text{für } 1 \le t \end{cases}$$

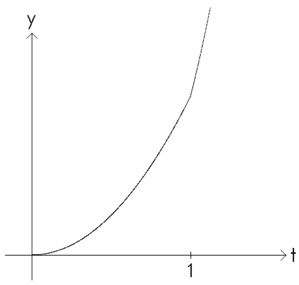
Bezüglich des linken Kurventeils ist $X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $X'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bezüglich des rechten Kurventeils ist $X(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $X'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Natürlich hat die gesamte Kurve bei $t = 1$ eine eindeutige Tangente.

Aber weder die x–Koordinate noch die y–Koordinate ist bei $t = 1$ differenzierbar:





Krümmung im Punkt A einer kubischen ganzen Bézierkurve

Um Krümmungssprünge beim Zusammensetzen von kubischen Kurven vermeiden zu können, muss man die Krümmungen in den „Endpunkten“ der Bestandteile kennen.

Für $t = 0$ ist $X'(0) = 3 \cdot (-A + B)$ und $X''(0) = 6 \cdot (C - 2 \cdot B + A)$.

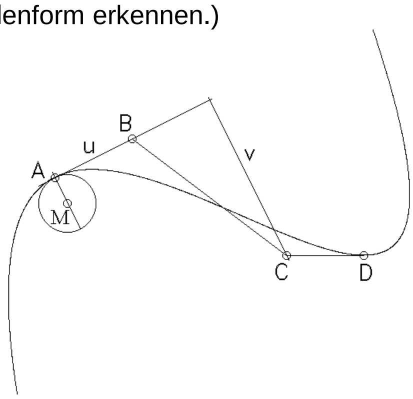
Damit folgt:

$$\kappa(0) = \frac{\frac{X'(0)^{\perp}}{|X'(0)|}\cdot X''(0)}{\left(X'(0)\right)^2} = \frac{\frac{(B-A)^{\perp}}{|B-A|}\cdot 6\cdot(C-2\cdot B+A)}{9\cdot(B-A)^2}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{(B-A)^{\perp}}{|B-A|}\cdot(C-B)}{(B-A)^2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{d\ \ (C,\ AB)}{d^2(A,\ B)}$$

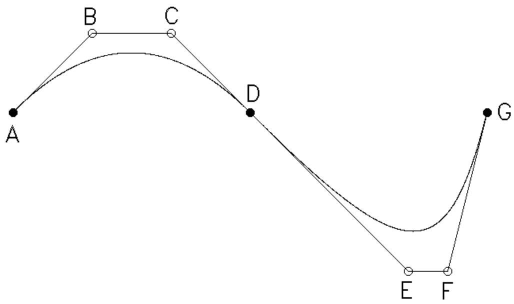
(Bei der letzten Umformung muss man die Hesse'sche Normalenform erkennen.)

Bezeichnet man den Abstand zwischen A und B mit u und bezeichnet man den Abstand zwischen C und der Geraden durch A und B mit v, so gilt daher $\kappa(0) = \frac{2}{3}\cdot\frac{v}{u^2}$.



Verkettung kubischer ganzer Bézierkurven

Will man durch 3 Punkte A, D, G der Ebene eine möglichst schöne Kurve legen, so bietet es sich an, zwei kubische ganze Bézierkurven aneinander zu hängen.
Wir wissen schon, dass C, D, E kollinear sein müssen, um in D eine eindeutige Tangente zu haben.



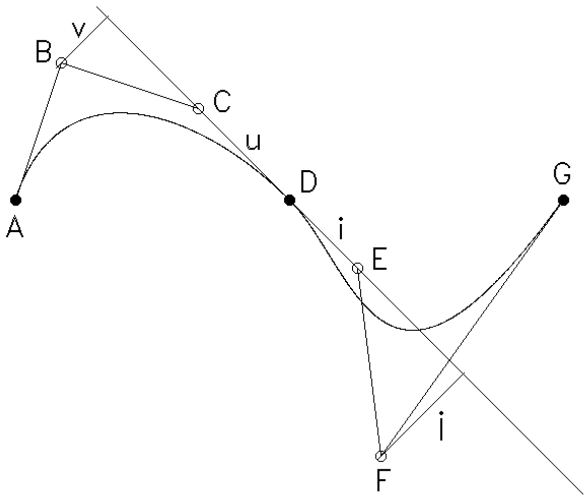
Wir fordern zudem, dass in D kein Krümmungssprung stattfinden soll. Nun ist beim obigen Bild der linke Teil der Kurve in D rechtsgekrümmt und der rechte Teil in D linksgekrümmt; wenn also B und E auf verschiedenen Seiten der Tangente CE liegen, so kann man den Krümmungssprung gar nicht verhindern.

Liegt hingegen F auf derselben Seite wie B, so gilt für die Krümmung

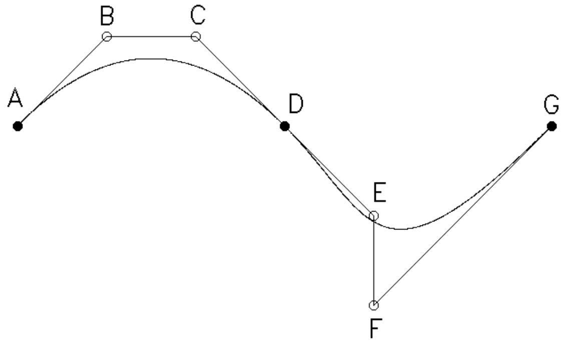
von links: $\kappa = \frac{2}{3}\cdot\frac{d\ \ (B,\ CD)}{d^2(C,\ D)}$

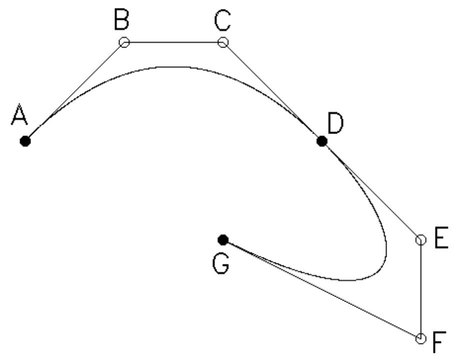
und von rechts: $\kappa = \frac{2}{3}\cdot\frac{d\ \ (F,\ DE)}{d^2(D,\ E)}$.

Im Bild muss also $\frac{v}{u^2} = \frac{j}{i^2}$ sein.



Sind beide Werte gleich, so hat die Kurve in D keinen Krümmungssprung. In den folgenden Beispielen wird F gemäß der obigen Formel berechnet:





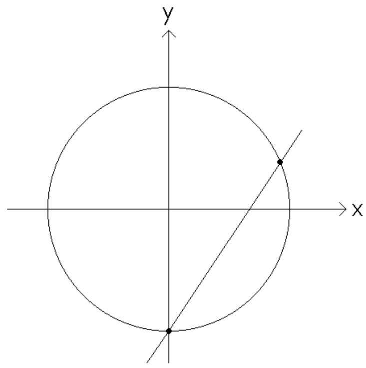
Auf diese Art werden auch Buchstaben beschrieben (Beispiel: PostScript). Selbstverständlich kann bei D auch ein Wendepunkt vorliegen.

7. Rationale Bézierkurven

Die quadratischen ganzen Bézierkurven sind allesamt Parabeln, wie wir gesehen haben. Was ist, wenn unser Designer einen Kreis darstellen will? Auch der Kreis ist eine quadratische Kurve, wie man an der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ablesen kann, allerdings keine ganze Kurve.

Um dies einzusehen, brauchen wir eine Parameterdarstellung der Kreispunkte. Die übliche Darstellung $X(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\ \alpha \\ \sin\ \alpha \end{pmatrix}$ ist allerdings für unsere Zwecke zu kompliziert, da sin und cos keine Polynome sind. Eine einfachere Parameterdarstellung bekommt man folgendermaßen:

Eine sich um den Südpol $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ drehende Gerade mit der Gleichung $y = t \cdot x - 1$ schneidet den Kreis ein weiteres Mal im Punkt $X(t) = \frac{1}{t^2+1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$. Auf diese Weise erhält man – außer dem Nordpol – jeden Punkt des Kreises. Damit hat man eine rationale Parameterdarstellung gefunden. Da t im Nenner auftritt, ist der Kreis keine ganze Kurve, sondern eine <u>rationale</u>.



Kann man den Kreis als modifizierte quadratische Bézierkurve auffassen? Befassen wir uns zunächst mit dem Nenner. Er lässt sich schreiben als $t^2 + 1 = \underline{1} \cdot (1-t)^2 + \underline{1} \cdot 2 \cdot (1-t) \cdot t + \underline{2} \cdot t^2$ (wenn man will, sind hier Anknüpfungen zur Linearen Algebra möglich: Die Polynome $(1-t)^2$, $2 \cdot (1-t) \cdot t$ und t^2 bilden nämlich eine Basis der Polynome vom Maximalgrad 2; diese Basis heißt Bernstein–Basis).

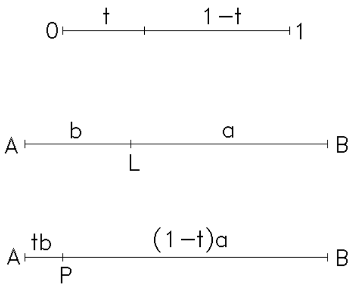
Hiermit haben wir also $X(t) = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}}{\underline{1} \cdot (1-t)^2 + \underline{1} \cdot 2 \cdot (1-t) \cdot t + \underline{2} \cdot t^2}$. Übernehmen wir die unterstrichenen Nennerkoeffizienten in den Zähler, so folgt $X(t) = \dfrac{\underline{1} \cdot (1-t)^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \underline{1} \cdot 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \underline{2} \cdot t^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\underline{1} \cdot (1-t)^2 + \underline{1} \cdot 2 \cdot (1-t) \cdot t + \underline{2} \cdot t^2}$. Dies ist die gesuchte Béziergestalt. Dass sie ähnlich gebildet ist wie eine ganze Bézierkurve, ist im allgemeinen Fall leichter einzusehen:

Betrachten wir also $X(t) = \dfrac{(1-t)^2 \cdot a \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot b \cdot B + t^2 \cdot c \cdot C}{a \cdot (1-t)^2 + b \cdot 2 \cdot (1-t) \cdot t + c \cdot t^2}$. Bei ganzen Kurven wurde X aus P und Q aufgebaut; das gilt auch hier, denn man kann schreiben:

$$X(t)=\frac{(1-t)\cdot\overbrace{\left[(1-t)\cdot a\cdot A+t\cdot b\cdot B\right]}^{p\cdot P}+t\cdot\overbrace{\left[(1-t)\cdot b\cdot B+t\cdot c\cdot C\right]}^{q\cdot Q}}{(1-t)\cdot\underbrace{\left[(1-t)\cdot a+t\cdot b\right]}_{p}+t\cdot\underbrace{\left[(1-t)\cdot b+t\cdot c\right]}_{q}}=\frac{(1-t)\cdot p\cdot P+t\cdot q\cdot Q}{(1-t)\cdot p+t\cdot q}$$

Hieraus folgt $P=\frac{(1-t)\cdot a\cdot A+t\cdot b\cdot B}{(1-t)\cdot a+t\cdot b}$ und $Q=\frac{(1-t)\cdot b\cdot B+t\cdot c\cdot C}{(1-t)\cdot b+t\cdot c}$.

Wie muss man sich die Bildung von P vorstellen? Führt man den Punkt $L=\frac{a\cdot A+b\cdot B}{a+b}$ ein, so gilt $\frac{AP}{PB}=\frac{t\cdot b}{(1-t)\cdot a}=\frac{t}{1-t}\cdot\frac{AL}{LB}$.



8. Zur Konstruktion rationaler Bézierkurven mit Dynamischer Geometrie–Software

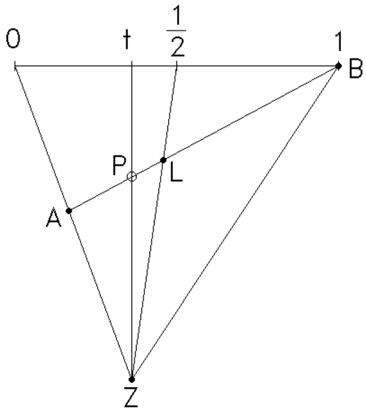
Die grundlegende Beziehung ist $\frac{AP}{PB}=\frac{t}{1-t}\cdot\frac{AL}{LB}$.

Zunächst verschieben wir die Strecke AB geeignet; das war schon bei ganzen Bézierkurven hilfreich.

Die Geraden durch 0 und A sowie durch $\frac{1}{2}$ und L schneiden einander in Z. Die Verbindung von t und Z schneidet AB in P.

Nun gilt $\frac{AP}{PB}=\frac{\Delta\ APZ}{\Delta\ PBZ}=\frac{AZ\cdot PZ\cdot\sin(AZP)}{PZ\cdot BZ\cdot\sin(PZB)}=\frac{AZ\cdot\sin(AZP)}{BZ\cdot\sin(PZB)}$.

Analog gilt $\frac{AL}{LB}=\frac{AZ\cdot\sin(AZL)}{BZ\cdot\sin(LZB)}$.



Hieraus folgt $\frac{\left(\frac{AP}{PB}\right)}{\left(\frac{AL}{LB}\right)}=\frac{\left(\frac{AZ\cdot\sin(AZP)}{BZ\cdot\sin(PZB)}\right)}{\left(\frac{AZ\cdot\sin(AZL)}{BZ\cdot\sin(LZB)}\right)}=\frac{\left(\frac{\sin(AZP)}{\sin(PZB)}\right)}{\left(\frac{\sin(AZL)}{\sin(LZB)}\right)}$.

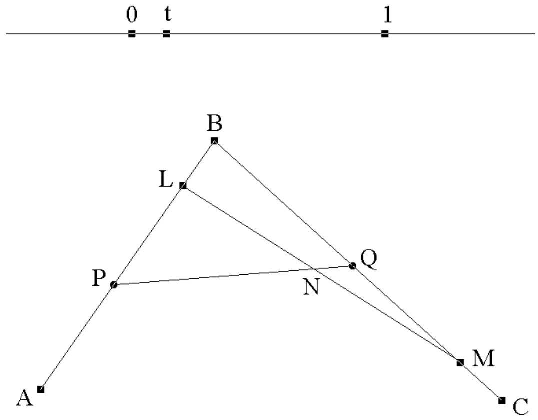
Man erkennt, dass dies Doppelverhältnis nur von den Winkeln bei Z abhängt. Also gilt

$\frac{\left(\frac{AP}{PB}\right)}{\left(\frac{AL}{LB}\right)}=\frac{\left(\frac{t}{1-t}\right)}{\left(\frac{1/2}{1-1/2}\right)}=\frac{t}{1-t}$, und das ist genau das, was man wollte.

Gemäß der angegebenen Konstruktion ist es einfach, ein Makro zu schreiben, das zu 0, 1, t, A, B, L den gesuchten Punkt P konstruiert.

Will man eine rationale quadratische Bézierkurve konstruieren, so sind zunächst die „Gewichtspunkte“ $L = \frac{a \cdot A + b \cdot B}{a + b}$ auf AB und $M = \frac{b \cdot B + c \cdot C}{b + c}$ auf BC zu wählen. Dann muss man das Makro zunächst zweimal anwenden, und zwar auf A, B, L und auf B, C, M; man erhält die Punkte P und Q.

Der dann zu konstruierende Punkt X liegt auf PQ; es fehlt aber noch der zugehörige Gewichtspunkt N, der auch auf PQ liegen sollte.



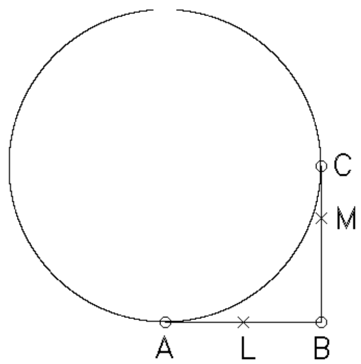
Nun hat P das „Gewicht“ $p = (1-t) \cdot a + t \cdot b$, und Q hat das „Gewicht“ $q = (1-t) \cdot b + t \cdot c$. Dann ist $N = \frac{p \cdot P + q \cdot Q}{p + q}$. Setzt man für p, q, P, Q alle Werte ein, so kann man nachrechnen (lassen), dass N auf der Verbindungsgeraden zu L und M liegt; man bekommt also N einfach als Schnittpunkt von PQ und LM. Damit ist die Konstruktion von X geklärt.

Man schreibe ein Makro, das zu 0, 1, t, A, B, C, L, M den zugehörigen Bézierpunkt X konstruiert und experimentiere damit.

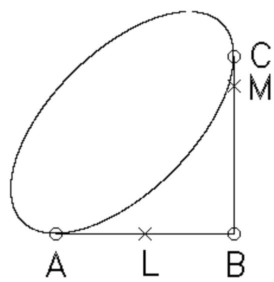
Wieder ist darauf zu achten, dass die Referenzstrecke nicht zu AB oder zu BC parallel ist.

9. Beispiele quadratischer rationaler Bézierkurven

Beim Kreis sind in der allgemeinen Form $X(t) = \frac{(1-t)^2 \cdot a \cdot A + 2 \cdot (1-t) \cdot t \cdot b \cdot B + t^2 \cdot c \cdot C}{a \cdot (1-t)^2 + b \cdot 2 \cdot (1-t) \cdot t + c \cdot t^2}$ die Werte $a = b = 1$, $c = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu wählen, um den allgemeinen Kreispunkt $X(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$ zu erhalten.

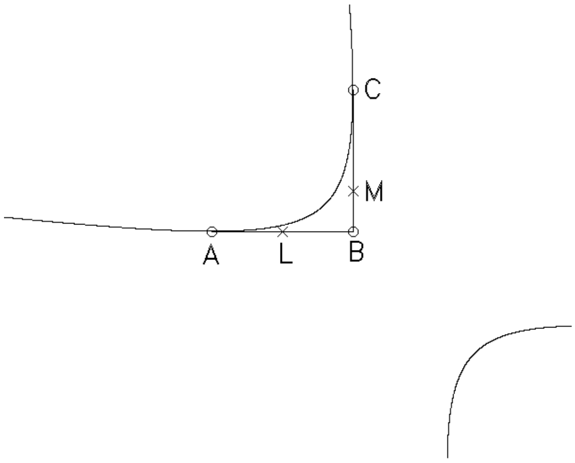


Wird c vergrößert, so wandert M näher an C heran; die Kurve entfernt sich weiter von B und wird eine Ellipse.



Wird hingegen c auf den Wert 1 verkleinert, so bekommt man eine Parabel. Noch kleinere Werte führen zu einer Hyperbel, einer Kurve, die aus zwei Ästen besteht.

Man kann beweisen, dass man jede quadratische Kurve als rationale Bézierkurve erhalten kann.



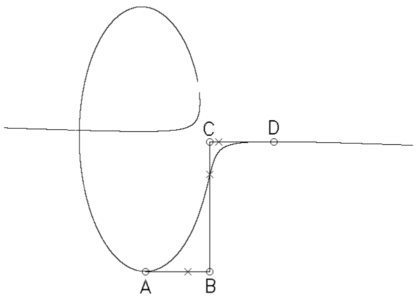
10. Beispiele kubischer rationaler Bézierkurven

Hier ist

$$X(t) = \frac{(1-t)^3 \cdot a \cdot A + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot b \cdot B + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot c \cdot C + t^3 \cdot d \cdot D}{(1-t)^3 \cdot a + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot b + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot c + t^3 \cdot d}.$$

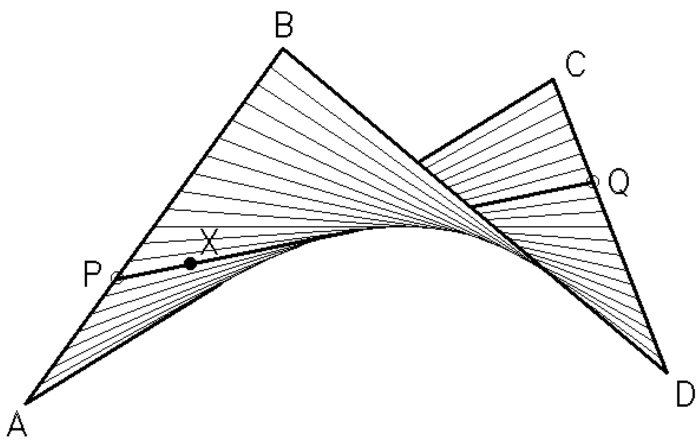
Ein Beispiel zeigt die nebenstehende Kurve.

Es gibt viele kubische Kurven, die sich nicht als rationale Bézierkurven darstellen lassen. Das wird allerdings den Designer nicht so sehr interessieren, da er unter den rationalen Bézierkurven hinreichend viele Formen findet.



11. Ein Ausblick auf Flächen

Bézierkurven werden durch Punkte definiert, und in einem ersten Iterationsschritt werden aus den Punkten Geraden gewonnen. Auch Bézierflächen werden durch Punkte definiert. Aus den Raumpunkten werden dann aber keine Ebenen gewonnen – dies erweist sich aus programmiertechnischen Gründen nicht als günstig –, sondern aus je 4 Punkten (im unteren Bild A, B, C und D, die nicht in einer Ebene liegen sollen) wird eine gekrümmte Fläche erzeugt:



P durchläuft die Strecke AB, und Q durchläuft die Strecke CD, wobei jeweils $\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{t}{1-t}$ gelten soll. Somit gilt $P(t) = (1-t) \cdot A + t \cdot B$ und $Q(t) = (1-t) \cdot C + t \cdot D$.

Nun teile der Punkt X die Strecke PQ im Verhältnis $\frac{PX}{XQ} = \frac{s}{1-s}$, es sei also

$$\begin{aligned} X(t,\ s) &= (1-s)\cdot P + s\cdot Q \\ &= (1-s)\cdot\big((1-t)\cdot A + t\cdot B\big) + s\cdot\big((1-t)\cdot C + t\cdot D\big) \\ &= A + s\cdot(C-A) + t\cdot(B-A) + s\cdot t\cdot(A+D-B-C). \end{aligned}$$

Zu A, B, C, D und den Parametern t und s gehört mithin der allgemeine Punkt $X(t,\ s)$.

Das sich ergebende Gebilde heißt hyperbolisches Paraboloid, es ist eine Fläche mit einem Sattel.

Eine solche Sattelfläche ist Grundbaustein von Bézierflächen.

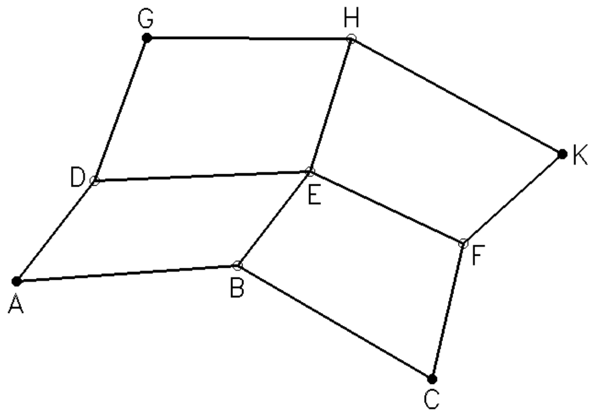
Hier wird der zweite Iterationsschritt erläutert. Wir gehen aus von 9 Punkten A, ..., K, die nicht alle in einer Ebene liegen sollen.

Zu A, B, E, D und den Parametern t und s wird der allgemeine Punkt $U(t,\ s)$ gebildet.

Zu B, C, F, E und den Parametern t und s wird der allgemeine Punkt $V(t,\ s)$ gebildet.

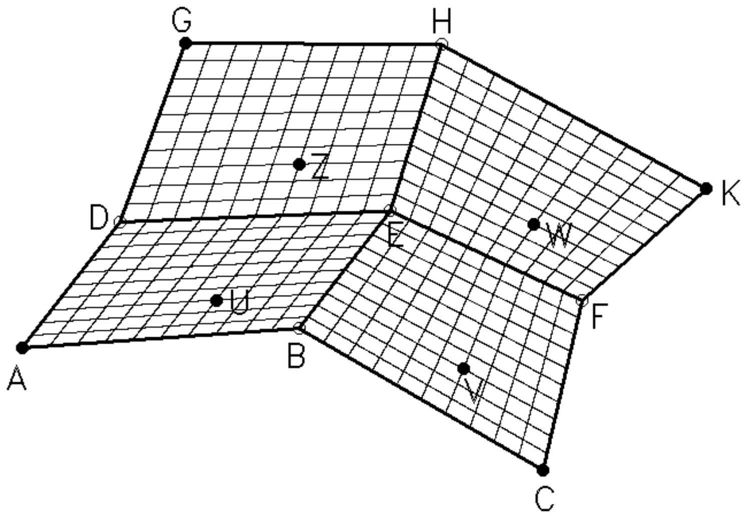
Zu E, F, K, H und den Parametern t und s wird der allgemeine Punkt $W(t,\ s)$ gebildet.

Zu D, E, H, G und den Parametern t und s wird der allgemeine Punkt $Z(t,\ s)$ gebildet.

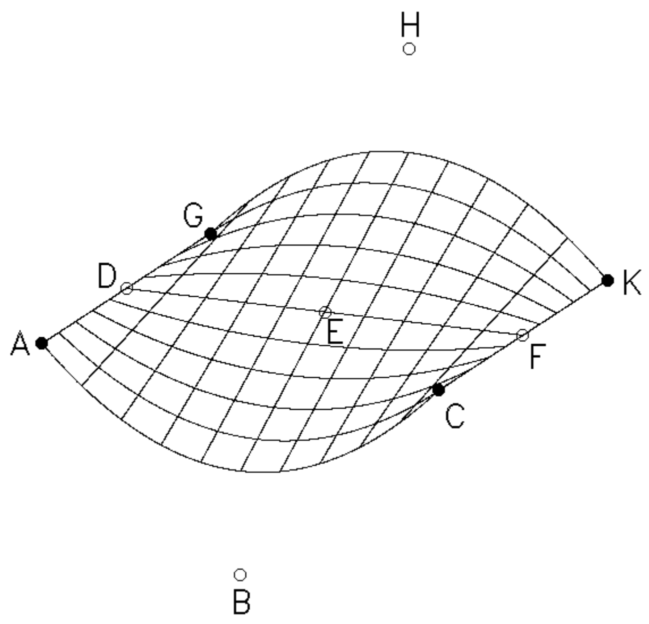


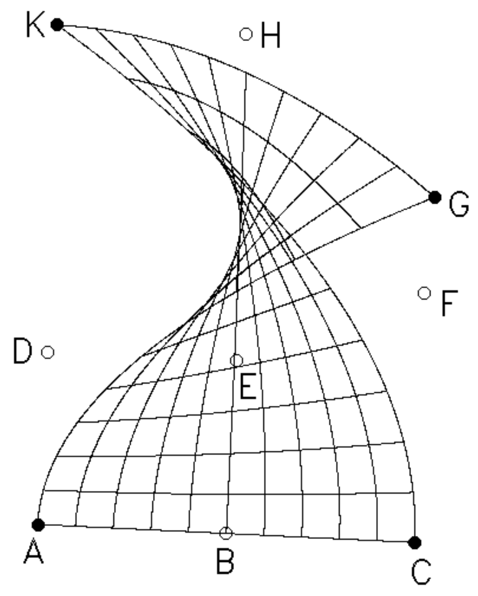
U, V, W und Z liegen auf den entsprechenden Sattelflächen.

Nun wird zu $U(t,\ s)$, $V(t,\ s)$, $W(t,\ s)$, $Z(t,\ s)$ und den Parametern t und s der allgemeine Punkt $X(t,\ s)$ gebildet. $X(t,\ s)$ ist der allgemeine Punkt der entstehenden Fläche.



Durch geeignete Wahlen von A, ..., K bekommt man interessante Flächen:





Literatur

Farin, G.: Kurven und Flächen im Computer Aided Geometric Design. Vieweg 1994.

Meyer, J.: Hüllkurven I, II. Praxis der Mathematik 1997, S. 107 – 116; 170 – 173.
online: http://Mathematik-Meyer.de/Materialien/Huellkurven.pdf

Meyer, J.: Die Sattelfläche im Grundkurs. Praxis der Mathematik 1995, S. 250 – 255.
online: http://Mathematik-Meyer.de/Materialien/Sattelflaeche_Grundkurs.pdf

Meyer, J.: Von der Normalparabel zu kubischen Kurven. Mathematica didactica 1998, S. 84 – 108.