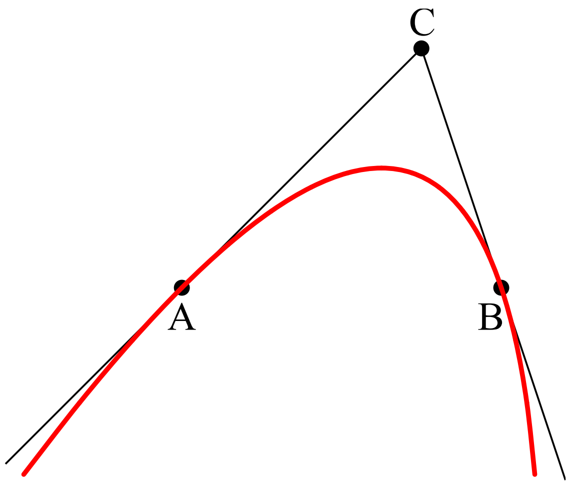
Jörg MEYER, Hameln 22. 12. 2023

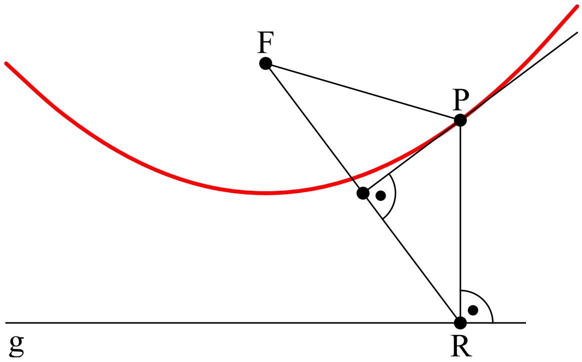
Wie findet man zu einer Bézier-Parabel den Brennpunkt und die Leitgerade?



Die Bézier-Parabel zu A, C und B (in dieser Reihenfolge!) verläuft durch A und B.
Die Gerade durch A und C ist die Tangente in A.
Die Gerade durch C und B ist die Tangente in B.
Mit $s = 1 - t$ hat eine beliebiger Punkt der Bézier-Parabel die Form $P(t) = s^2 \cdot A + 2 \cdot s \cdot t \cdot C + t^2 \cdot B$.
Es ist $P(0) = 1$ und $P(1) = B$. Die Tangente zu $P\left(\frac{1}{2}\right)$ hat den Richtungsvektor $B - A$, ist also parallel zur Geraden durch A und B.

Da die Bézier-Parabel eine Parabel ist, ist jeder Punkt auf ihr gleich weit von einem Brennpunkt und einer Leitgeraden entfernt.
Wie findet man Brennpunkt und Leitgerade?

Wir gehen rückwärts vor, als hätten wir Brennpunkt F und Leitgerade g schon.
Wandert R auf der Leitgeraden, so ist der zugehörige Parabel-Punkt P der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu F und R und der Senkrechten durch R zur Leitgeraden.
Diese Senkrechte ist parallel zur Parabelachse, und die Mittelsenkrechte zu F und R ist Tangente in P.



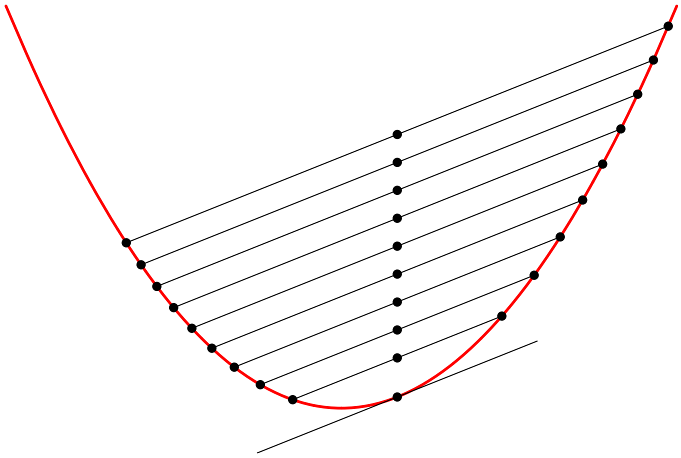
Spiegelt man die Parallele zur Achse durch P an der Tangente in P, verläuft die Spiegelgerade durch F.
Spiegelt man F an der Tangente durch P, bekommt man einen Punkt auf der Leitgeraden.

Damit ist die Vorgehensweise bei einer Bézier-Parabel klar:

Die Parallele zur Achse durch A wird an der Tangente in A gespiegelt, ebenso die Parallele zur Achse durch B an der Tangente in B. F ist dann der Schnittpunkt der beiden gespiegelten Geraden.

Dann spiegelt man F sowohl an der Tangente durch A als auch an der Tangente durch B. Beide Spiegelpunkte legen die Leitgerade fest.

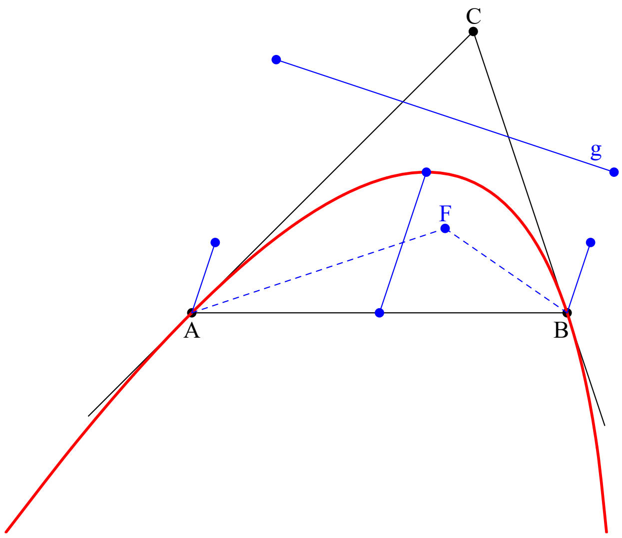
Allerdings benötigt man zur Ausführung dieser Vorgehensweise eine Parallele zur Parabelachse, und dazu muss man etwas ausholen.



Die Mittelpunkte zueinander paralleler Sehnen liegen auf einer Geraden, die zur Parabelachse parallel ist.
Auch der Berührpunkt der zu den Sehnen parallelen Tangente liegt auf der Mittelparallelen.
Dies rechnet man für die Normalparabel leicht nach, und da eine beliebige Parabel nur eine gedrehte und gestreckte Normalparabel ist, gilt die Aussage auch für beliebige Parabeln.

Es bleibt die Frage, wie man zueinander parallele Sehnen konstruieren kann, von denen man nur eine und den Berührpunkt der dazu parallelen Tangente braucht.

Es ist $P(1)-P(0)=B-A$ und $P'\left(\frac{1}{2}\right)=B-A$. (Man kann rechnerisch bestätigen, dass allgemein $P(a)-P(b)$ zu $P(c)-P(a+b-c)$ parallel ist.)



Damit lassen sich Parallelen zur Achse konstruieren und damit auch der Brennpunkt und die Leitgerade.

Die Richtung vom blauen Sehnen-Mittelpunkt zu $P\left(\frac{1}{2}\right)$ wird in A und in B angetragen und an den Tangenten gespiegelt; die strichlierten Spiegelbilder treffen sich in F.

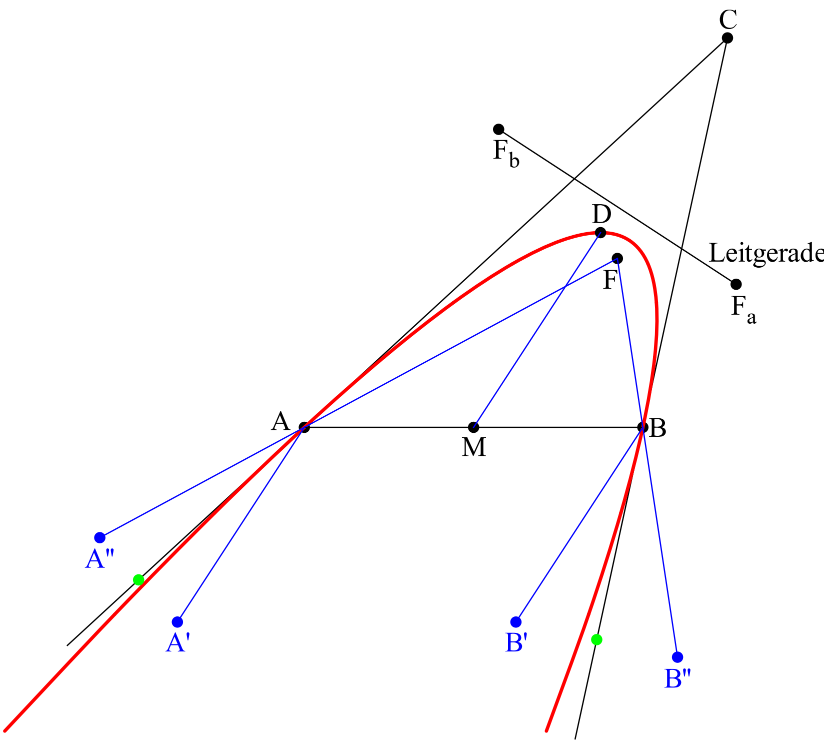
Die Spiegelbilder von F an den beiden Tangenten legen die Leitgerade g fest.

Man beachte, dass $P\left(\frac{1}{2}\right)$ i.a. ***nicht*** der Scheitelpunkt ist.

Man kann Brennpunkt und Leitgerade <u>ausrechnen</u>:

Mit $s=1-t$ hat der allgemeine Parabelpunkt die Form $P(t)=s^2\cdot A+2\cdot s\cdot t\cdot C+t^2\cdot B$ mit $P(0)=A$, $P(1)=B$ und $D=P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{A+2\cdot C+B}{4}$.

Ist M der Mittelpunkt von AB, so ist MD parallel zur Achse der Parabel.
A'A und B'B seien zur Achse parallel.
Spiegelt man A' an AC und B' an BC, so haben die Spiegelbilder A'' und B'' die Eigenschaft, dass A''A und B''B durch F verlaufen (ist A'A ein achsenparalleler Strahl, wird er im Inneren der Parabel so reflektiert, dass er anschließend durch F geht).



Nun ist

$$A' = A + M - D = A + \frac{A+B-2\cdot C}{4}$$

und $B' = B + \dfrac{A+B-2\cdot C}{4}$.

Es wird die übliche Dreiecksbenennung ($a = |BD|$, $b = |AD|$, übliche Winkel) verwendet.

Die Gerade A'A'' hat die Gleichung $X\cdot(C-A) = A'\cdot(C-A)$ und schneidet $AC: X = A + \lambda\cdot(C-A)$ für

$$\lambda = \frac{(A'-A)\cdot(C-A)}{(C-A)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-(C-A)\cdot(C-A)-(C-B)\cdot(C-A)}{(C-A)^2} = -\frac{1}{4} - \frac{a\cdot b\cdot\cos\gamma}{4\cdot b^2} = -\frac{b+a\cdot\cos\gamma}{4\cdot b}$$

im (grünen) Lotfußpunkt $L_A = A + \lambda\cdot(C-A)$. Es folgt

$$\begin{aligned} A'' = 2\cdot L_A - A' &= \left(\frac{3}{4} - 2\cdot\lambda\right)\cdot A - \frac{B}{4} + \left(2\cdot\lambda + \frac{1}{2}\right)\cdot C = \left(\frac{3}{4} - 2\cdot\lambda : -\frac{1}{4} : 2\cdot\lambda + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{b+a\cdot\cos\gamma}{2\cdot b} : -\frac{1}{4} : -\frac{b+a\cdot\cos\gamma}{2\cdot b} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (5\cdot b + 2\cdot a\cdot\cos\gamma : -b : -2\cdot a\cdot\cos\gamma) \end{aligned}$$

in (auf das Dreieck ABC bezogenen) baryzentrischen Punkt-Koordinaten.

Allgemein gilt: Ist $P = (u : v : w)$, so ist das Spiegelbild von P an AC gegeben durch

$$P^{(b)} = \left(u\cdot\frac{b}{v} + 2\cdot a\cdot\cos\gamma : -b : w\cdot\frac{b}{v} + 2\cdot c\cdot\cos\alpha\right).$$

Es war $A' = A + \dfrac{A+B-2\cdot C}{4} = (5 : 1 : -2)$. Dann ist

$$A'' = (5\cdot b + 2\cdot a\cdot\cos\gamma : -b : -2\cdot b + 2\cdot c\cdot\cos\alpha) = (5\cdot b + 2\cdot a\cdot\cos\gamma : -b : -2\cdot a\cdot\cos\gamma).$$

Das Spiegelbild von $P = (u : v : w)$ an BC ist gegeben durch

$$P^{(a)} = \left(-a : v\cdot\frac{a}{u} + 2\cdot b\cdot\cos\gamma : w\cdot\frac{a}{u} + 2\cdot c\cdot\cos\beta\right)$$

Damit ist $A''A = [0 : -2 \cdot a \cdot \cos\gamma : b]$ in baryzentrischen Geraden-Koordinaten. Analog ist $B''B = [-2 \cdot b \cdot \cos\gamma : 0 : a]$. AA'' und BB'' treffen sich im Brennpunkt $\boxed{F = \left(a^2 : b^2 : 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma\right)}$.

Spiegelt man F an AC, bekommt den Punkt

$$F_b = \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma : -b^2 : 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha\right) = \left(a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma : -b^2 : 2 \cdot b^2\right).$$

Spiegelt man F an BC, bekommt man

$$F_a = \left(-a^2 : b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma : 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma + 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos\beta\right) = \left(-a^2 : b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma : 2 \cdot a^2\right).$$

Damit ist die Leitgerade gegeben durch $\boxed{F_a F_b = \left[b^2 : a^2 : a \cdot b \cdot \cos\gamma\right]}$.

<u>Achse und Scheitelpunkt:</u>

Es ist $M = \frac{A+B}{2} = (1:1:0)$ und $D = \frac{A + 2 \cdot C + B}{4} = (1:1:2)$, also ist $MD = [1 : -1 : 0]$.

Die Parallele durch F ist die Achse $g = \left[a^2 + 3 \cdot b^2 - c^2 : -3 \cdot a^2 - b^2 + c^2 : b^2 - a^2\right]$.

Der allgemeine Parabelpunkt ist $P(t) = \left(s^2 : t^2 : 2 \cdot s \cdot t\right)$. Liegt er auf der Achse, muss

$$s^2 \cdot \left(a^2 + 3 \cdot b^2 - c^2\right) + t^2 \cdot \left(-3 \cdot a^2 - b^2 + c^2\right) + 2 \cdot s \cdot t \cdot \left(b^2 - a^2\right) = 0$$

sein, was auf

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 - 3 \cdot b^2 - a^2}{c^2 - 2 \cdot b^2 - 2 \cdot a^2} = \frac{b^2 + a \cdot b \cdot \cos\gamma}{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$

führt. Damit hat man den Parameter des Scheitelpunkts gefunden.