

## Über einige n-Ecke

### Worum geht es?

Dreiecke sind arithmetische Mittel zweier gleichseitiger Dreiecke, Parallelogramme sind arithmetische Mittel zweier Quadrate, Fünfecke sind arithmetische Mittel von regelmäßigen Pentagonen und Pentagrammen. Dabei bezieht sich der Ausdruck „arithmetisches Mittel“ auf die entsprechenden Eckpunkte.

Begonnen wird mit Parallelogrammen als dem einfachsten Fall, dann folgen Dreiecke und Fünfecke. An Vorkenntnissen benötigt man zunächst nur elementare Punkt-Geometrie; bei Fünfecken wird es sich als sinnvoll erweisen, mit komplexen Zahlen zu arbeiten.

Angeregt zu dieser kurzen Note wurde ich durch F. Bachmann / E. Schmidt: n-Ecke, 1970 Mannheim usw.: BI; allerdings benutze ich nicht die Begrifflichkeit dieses Buchs, sondern orientiere mich an dessen Resultaten, die ich mit einfachen Beweisen versee.

### Notation, Teil 1

Es sei O der Ursprung und  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ein Punkt.

Die schwerfällige Ausdrucksweise „Ein Dreieck mit Schwerpunkt O ist arithmetische Mittel zweier gleichseitiger Dreiecke, die beide den Schwerpunkt O haben“ wird ersetzt durch „Ein Dreieck ist **isobares Mittel** zweier gleichseitiger Dreiecke“.

### Parallelogramme sind isobare Mittel zweier (gegenseitiger) Quadrate

Es sei  $i(P) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  das Resultat der Drehung von P um O um  $90^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn.

Ein beliebiges zu O symmetrisches **Parallelogramm** hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge A, B,  $-A$ ,  $-B$  und wird mit  $p(A, B)$  bezeichnet.

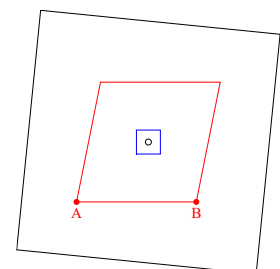
Ein beliebiges zu O symmetrisches **Quadrat** hat die Eckenfolge U,  $i(U)$ ,  $-U$ ,  $-i(U)$ , wenn es gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Dann wird es mit  $q_1(U)$  bezeichnet.

Wird das Quadrat mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen, hat es die Eckenfolge U,  $-i(U)$ ,  $-U$ ,  $i(U)$  und wird mit  $q_2(U)$  bezeichnet.

Dann gilt die Beziehung  $p(A, B) = \frac{q_1(U) + q_2(V)}{2}$  mit  $U = A - i(B)$  und

$V = A + i(B)$ . Es reicht, dies an den Eckpunkten A und B nachzurechnen:

$$A = \frac{A - i(B) + A + i(B)}{2}; \quad B = \frac{i(A - i(B)) - i(A + i(B))}{2} = \frac{i(A) + B - i(A) + B}{2}.$$



## Dreiecke sind isobare Mittel zweier (gegenseitiger) gleichseitiger Dreiecke

Es sei  $\zeta(P) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x+y\sqrt{3} \\ -x\sqrt{3}+y \end{pmatrix}$  das Resultat der

Drehung von  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  um O um  $120^\circ$  gegen den Uhrzeigersinn. Man beachte, dass

$$P + \zeta(P) + \zeta^2(P) = O \text{ ist}$$

Ein beliebiges **Dreieck** mit Schwerpunkt O hat die Eckenfolge A, B,  $-(A+B)$  gegen den Uhrzeigersinn und wird mit  $d(A, B)$  bezeichnet.

Ein **gleichseitiges Dreieck** mit Schwerpunkt O hat die Eckenfolge U,  $\zeta(U)$ ,  $\zeta^2(U)$ , wenn es gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Es wird mit  $t_1(U)$  bezeichnet.

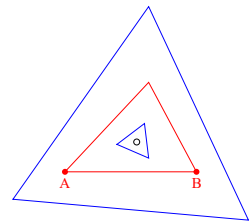
Wird es mit dem Uhrzeigersinn durchlaufen, hat es die Eckenfolge U,  $\zeta^2(U)$ ,  $\zeta(U)$  und wird mit  $t_2(U)$  bezeichnet.

Der Ansatz  $d(A, B) = \frac{t_1(U) + t_2(V)}{2}$  führt bezüglich der Eckpunkte auf  $A = \frac{U+V}{2}$ ;  $B = \frac{\zeta(U) + \zeta^2(V)}{2}$ .

Beim Lösen dieses Gleichungssystems wird man auf

$$2 \cdot (\zeta(A) - B) = (2 \cdot \zeta(V) + V) \text{ geföhrt. Wegen } 2 \cdot \zeta(P) + P = \begin{pmatrix} -y \cdot \sqrt{3} \\ x \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3} \cdot i(P)$$

erhält man  $V = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot i(B - \zeta(A))$  und  $U = 2 \cdot A - V$ .



## Notation, Teil II

Eine entsprechende Aussage wie in den letzten beiden Abschnitten ist auch für die affinen Bilder regelmäßiger Fünfecke richtig. Deren Behandlung erweist sich jedoch als deutlich transparenter,

wenn man die Ebene als Ebene der komplexen Zahlen auffasst. Zu jedem Punkt  $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  gehört dann

die komplexe Zahl  $p = x + i \cdot y$ , zur Abbildung  $P \mapsto i(P)$  gehört die Multiplikation  $p \mapsto i \cdot p$ , und zur Abbildung  $P \mapsto \zeta(P)$  gehört die Multiplikation  $p \mapsto \zeta \cdot p$  mit der dritten Einheitswurzel

$$\zeta = \exp\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{3}\right) = \cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ = \frac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

## Noch einmal das Dreieck

Ein beliebiges Dreieck  $d(a, b)$  mit Schwerpunkt O hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge a, b,  $-(a+b)$ , und ein gleichseitiges Dreieck  $t_1(u)$  mit O als Schwerpunkt hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge u,  $\zeta \cdot u$ ,  $\zeta^2 \cdot u$ ;  $t_2(u)$  hat mit dem Uhrzeigersinn die Eckenfolge u,  $\zeta^2 \cdot u$ ,  $\zeta \cdot u$ .

Dann ist  $d(a, b) = \frac{t_1(u) + t_2(v)}{2}$ , was auf das Gleichungssystem

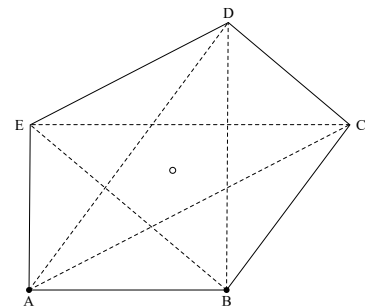
$$2 \cdot a = u + v; \quad 2 \cdot b = \zeta \cdot u + \zeta^2 \cdot v; \quad -2 \cdot (a+b) = \zeta^2 \cdot u + \zeta \cdot v$$

führt. Wegen  $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$  ist die dritte Gleichung die negative Summe der ersten beiden Gleichungen; letztere führen auf  $v = 2 \cdot \frac{\zeta \cdot a - b}{\zeta - \zeta^2} = 2 \cdot \frac{\zeta \cdot a - b}{2 \cdot \zeta + 1}$ . Wegen  $2 \cdot \zeta + 1 = i \cdot \sqrt{3}$  hat man das frühere Resultat.

### Affin-reguläre Pentagone sind isobare Mittel zweier regulärer (gegenläufiger) Pentagone

Ein beliebiges Fünfeck ist nicht isobares Mittel zweier regulärer Fünfecke. Die Aussage ist jedoch korrekt für affine Bilder regulärer Fünfecke. Bei diesen sind die Diagonalen parallel zu den entsprechenden Seiten, und die Diagonalenlängen sind das  $g$ -fache der Längen der dazu parallelen Seiten, wobei  $g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  mit der Gleichung  $g^2 = g + 1$  der **Goldene Schnitt** ist. Mitunter wird auch  $k = \frac{1}{g} = g - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  mit der Gleichung  $k^2 + k = 1$  als Goldener Schnitt bezeichnet.

Ein beliebiges **affin-reguläres Pentagon**  $f(a, b)$  mit Schwerpunkt  $O$  hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge  $A, B, C, D, E$  mit  $C = -A + k \cdot B; D = -k \cdot (A + B), E = k \cdot A - B$ .



Ein **reguläres Pentagon**  $p_1(u)$  mit Schwerpunkt  $O$  hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge  $u, \omega \cdot u, \omega^2 \cdot u, \omega^3 \cdot u, \omega^4 \cdot u$  mit  $\omega = \exp\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{5}\right) = \cos 72^\circ + i \cdot \sin 72^\circ$ .

Das reguläre Fünfeck in umgekehrter Eckenreihenfolge heißt  $p_2(u)$ .

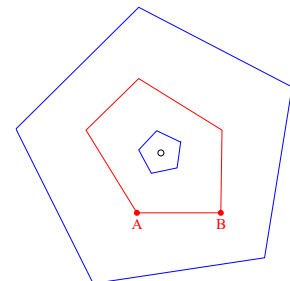
Der Ansatz  $f(a, b) = \frac{p_1(u) + p_2(v)}{2}$  führt auf das Gleichungssystem

$$2 \cdot a = u + v; \quad 2 \cdot b = \omega \cdot u + \omega^4 \cdot v; \quad 2 \cdot (-a + k \cdot b) = \omega^2 \cdot u + \omega^3 \cdot v$$

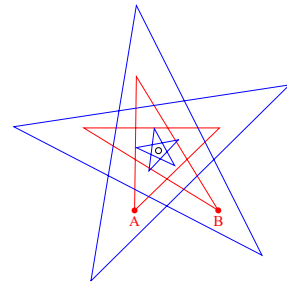
$$-2 \cdot k \cdot (a + b) = \omega^3 \cdot u + \omega^2 \cdot v; \quad 2 \cdot (k \cdot a - b) = \omega^4 \cdot u + \omega \cdot v$$

Für alle affin-regulären Fünfecke mit  $O$  als Schwerpunkt gilt, dass  $C, D, E$  Linearkombinationen mit den oben angegebenen Koeffizienten von  $A$  und  $B$  sind. Man muss sich also nur um die beiden ersten Gleichungen kümmern.

Aus diesen folgt  $v = 2 \cdot \frac{\omega \cdot a - b}{\omega - \omega^4}; u = 2 \cdot \frac{b - \omega^4 \cdot a}{\omega - \omega^4}$  mit dem Nenner  $\omega - \omega^4 = 2 \cdot i \cdot \sin 72^\circ$ .



Die obigen Überlegungen treffen nicht nur für Pentagone zu, sondern auch für **Pentagramme**.  
Auch hier haben die beiden regulären Pentagramme verschiedene Umlaufsinn.



## Ein beliebiges Pentagon ist isobares Mittel eines affin-regulären Pentagons und eines affin-regulären Pentagramms

Ein beliebiges Pentagon mit Schwerpunkt  $O$  hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge  $A, B, C, D, -(A+B+C+D)$ .

Ein affin-reguläres Pentagon hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge  $U, V, -U+k \cdot V, -k \cdot (U+V), k \cdot U-V$ .

Ein affin-reguläres Pentagramm hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge  $X, -X+k \cdot Y, k \cdot X-Y, Y, -k \cdot (X+Y)$ .

Der Ansatz

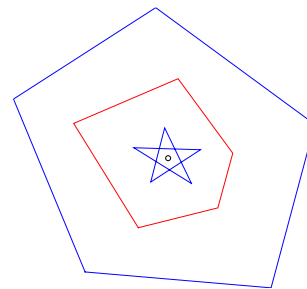
$$2 \cdot A = U + X; \quad 2 \cdot B = V - X + k \cdot Y$$

$$2 \cdot C = -U + k \cdot V + k \cdot X - Y; \quad 2 \cdot D = -k \cdot U - k \cdot V + Y$$

liefert die Lösung

$$U = 2 \cdot \frac{k \cdot A - C - D}{2 \cdot k + 1}; \quad V = 2 \cdot \frac{(2-k) \cdot A + (2 \cdot k + 1) \cdot B + (2-k) \cdot C}{5 \cdot k}$$

$$X = 2 \cdot \frac{(k+1) \cdot A + C + D}{2 \cdot k + 1}; \quad Y = 2 \cdot \frac{k \cdot A + k \cdot B + D}{2-k}$$



Damit ist jedes Pentagon isobares Mittel eines affin-regulären Pentagons und eines affin-regulären Pentagramms. Dahinter steckt nur ein simples lineares Gleichungssystem.

Zusammenfassend gilt:

Jedes Pentagon ist isobares Mittel zweier regulärer (gegenläufiger) Pentagone und zweier regulärer (gegenläufiger) Pentagramme.

Das lässt sich auch direkt einsehen:

Ein beliebiges Pentagon mit Schwerpunkt  $O$  hat gegen den Uhrzeigersinn die (komplexe) Eckenfolge  $a, b, c, d, -(a+b+c+d)$ .

Ein reguläres Pentagon hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenfolge  $u, \omega \cdot u, \omega^2 \cdot u, \omega^3 \cdot u, \omega^4 \cdot u$ .

Ein reguläres Pentagon hat mit dem Uhrzeigersinn die Eckenfolge  $v, \omega^4 \cdot v, \omega^3 \cdot v, \omega^2 \cdot v, \omega \cdot v$ .

Ein reguläres Pentagramm hat gegen den Uhrzeigersinn die Eckenreihenfolge  $x, \omega^2 \cdot x, \omega^4 \cdot x, \omega \cdot x, \omega^3 \cdot x$ .

Ein reguläres Pentagramm hat mit dem Uhrzeigersinn die Eckenreihenfolge  $y, \omega^3 \cdot y, \omega \cdot y, \omega^4 \cdot y, \omega^2 \cdot y$ .

Das lineare Gleichungssystem

$$4 \cdot a = u + v + x + y$$

$$4 \cdot b = \omega \cdot u + \omega^4 \cdot v + \omega^2 \cdot x + \omega^3 \cdot y$$

$$4 \cdot c = \omega^2 \cdot u + \omega^3 \cdot v + \omega^4 \cdot x + \omega \cdot y$$

$$4 \cdot d = \omega^3 \cdot u + \omega^2 \cdot v + \omega \cdot x + \omega^4 \cdot y$$

hat eine eindeutige Lösung.