Jörg MEYER, Hameln

7.1.2023

Binomialkoeffizienten und Trigonometrie

Da die binomische Formel auch im Komplexen gilt, ist

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot i^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot i^{2\cdot k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot i^{2\cdot k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot (-1)^k + i\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-1)^k$$

$$(1-i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-i)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot (-i)^{2\cdot k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-i)^{2\cdot k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot (-1)^k - i\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-1)^k$$

Andererseits ist $1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\pi/4}$ und $1-i=\sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot\pi/4}$, also

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot e^{i\cdot n\cdot\pi/4} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot (-1)^k + i\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-1)^k$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot e^{-i\cdot n\cdot\pi/4} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot (-1)^k - i\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-1)^k$$

Die Addition beider Gleichungen liefert

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \frac{e^{i\cdot n\cdot\pi/4} + e^{-i\cdot n\cdot\pi/4}}{2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot (-1)^k$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{n\cdot\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{n\cdot\pi}{4}\right)}{2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot (-1)^k$$

und damit $\boxed{\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \cos\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k} \cdot (-1)^k}$.

Die Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \frac{e^{i\cdot n\cdot\pi/4} - e^{-i\cdot n\cdot\pi/4}}{2} = i\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-1)^k$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \frac{\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) - \cos\left(-\frac{n\cdot\pi}{4}\right) - i\cdot\sin\left(-\frac{n\cdot\pi}{4}\right)}{2} = i\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-1)^k$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot i\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) = i\cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-1)^k$$

und damit $\boxed{\left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \sin\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2\cdot k+1} \cdot (-1)^k}$.

Allgemein gelten für $a+i\cdot b=r\cdot e^{i\cdot\varphi}$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}(a+i\cdot b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot i^k\cdot b^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k}\cdot a^{n-2\cdot k}\cdot i^{2\cdot k}\cdot b^{2\cdot k}+i\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k+1}\cdot a^{n-2\cdot k-1}\cdot i^{2\cdot k}\cdot b^{2\cdot k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k}\cdot a^{n-2\cdot k}\cdot(-1)^k\cdot b^{2\cdot k}+i\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k+1}\cdot a^{n-2\cdot k-1}\cdot(-1)^k\cdot b^{2\cdot k+1}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a-i\cdot b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot(-i)^k\cdot b^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k}\cdot a^{n-2\cdot k}\cdot(-i)^{2\cdot k}\cdot b^{2\cdot k}-i\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k+1}\cdot a^{n-2\cdot k-1}\cdot(-i)^{2\cdot k}\cdot b^{2\cdot k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k}\cdot a^{n-2\cdot k}\cdot(-1)^k\cdot b^{2\cdot k}-i\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k+1}\cdot a^{n-2\cdot k-1}\cdot(-1)^k\cdot b^{2\cdot k+1}\end{aligned}$$

Addition liefert

$$\frac{(a+i\cdot b)^n-(a-i\cdot b)^n}{2}=r^n\cdot\frac{e^{i\cdot n\cdot\varphi}+e^{-i\cdot n\cdot\varphi}}{2}=\boxed{r^n\cdot\cos(n\cdot\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k}\cdot a^{n-2\cdot k}\cdot(-1)^k\cdot b^{2\cdot k}},$$

Subtraktion liefert

$$\frac{(a+i\cdot b)^n-(a-i\cdot b)^n}{2}=i\cdot r^n\cdot\sin(n\cdot\varphi)=i\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k+1}\cdot a^{n-2\cdot k-1}\cdot(-1)^k\cdot b^{2\cdot k+1},$$

also

$$\boxed{r^n\cdot\sin(n\cdot\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k+1}\cdot a^{n-2\cdot k-1}\cdot(-1)^k\cdot b^{2\cdot k+1}}$$

mit $r^2=a^2+b^2$ und $\tan\varphi=\frac{b}{a}$ und $n\in\mathbb{N}$.

Für $n=1$ ist erwartungsgemäß $r\cdot\cos(\varphi)=a$ und $r\cdot\sin(\varphi)=b$.

Einsetzen von $a=r\cdot\cos(\varphi)$ und $b=r\cdot\sin(\varphi)$ in die zuletzt eingekastelten Formeln liefert

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos(n\cdot\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k}\cdot\cos^{n-2\cdot k}\varphi\cdot(-1)^k\cdot\sin^{2\cdot k}\varphi\\ &\sin(n\cdot\varphi)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2\cdot k+1}\cdot(-1)^k\cdot\cos^{n-2\cdot k-1}\varphi\cdot\sin^{2\cdot k+1}\varphi\end{aligned}}$$

Für $n=2$ bekommt man die Doppelwinkelformeln

$$\cos(2\cdot\varphi)=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{2\cdot k}\cdot\cos^{2-2\cdot k}\varphi\cdot(-1)^{k}\cdot\sin^{2\cdot k}\varphi=\cos^{2}\varphi-\sin^{2}\varphi$$

$$\sin(2\cdot\varphi)=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{2\cdot k+1}\cdot(-1)^{k}\cdot\cos^{2-2\cdot k-1}\varphi\cdot\sin^{2\cdot k+1}\varphi=2\cdot\cos\varphi\cdot\sin\varphi$$

und für $n=3$ die Beziehungen

$$\cos(3\cdot\varphi)=\sum_{k=0}^{3}\binom{n}{2\cdot k}\cdot\cos^{3-2\cdot k}\varphi\cdot(-1)^{k}\cdot\sin^{2\cdot k}\varphi=\cos^{3}\varphi-3\cdot\cos\varphi\cdot\sin^{2}\varphi=4\cdot\cos^{3}\varphi-3\cdot\cos\varphi$$

$$\sin(3\cdot\varphi)=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{2\cdot k+1}\cdot(-1)^{k}\cdot\cos^{3-2\cdot k-1}\varphi\cdot\sin^{2\cdot k+1}\varphi=3\cdot\cos^{2}\varphi\cdot\sin\varphi-\sin^{3}\varphi=3\cdot\sin\varphi-4\cdot\sin^{3}\varphi$$