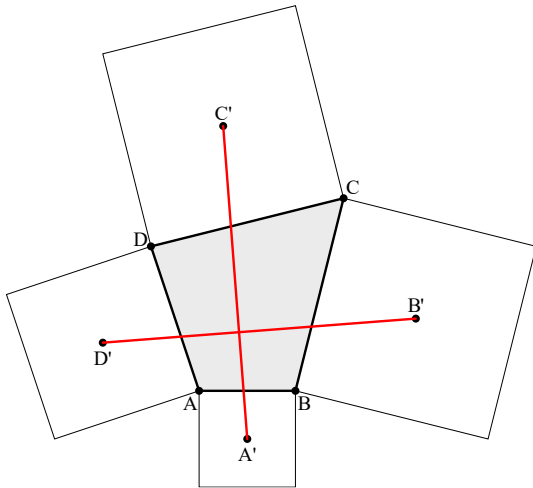


Der Satz von VAN AUBEL vektoriell und verwandte Sätze

Inhalt

1. Der Satz von van Aubel für Vierecke	1
2. Ein Quadrat im Viereck.....	2
3. Degenerierte Vierecke.....	2
4. Quadrate über Dreiecksseiten	3
5. Literatur	3

1. Der Satz von van Aubel für Vierecke



Über den Seiten eines Vierecks ABCD werden nach außen Quadrate errichtet mit den Mittelpunkten A' , B' , C' , D' .

Es sei $i \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ die 90°-Rotation in

mathematisch positivem Sinn. Klar: $i^2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

$$\text{Dann } A' = \frac{A+B}{2} - i \cdot \frac{B-A}{2} = \frac{(1+i) \cdot A + (1-i) \cdot B}{2}$$

$$B' = \frac{(1+i) \cdot B + (1-i) \cdot C}{2}, \quad C' = \frac{(1+i) \cdot C + (1-i) \cdot D}{2}$$

$$D' = \frac{(1+i) \cdot D + (1-i) \cdot A}{2}$$

$$\text{und } C'-A' = \frac{(1+i) \cdot (C-A) + (1-i) \cdot (D-B)}{2}; \quad B'-D' = \frac{(1+i) \cdot (B-D) + (1-i) \cdot (C-A)}{2}$$

$$\text{und daher } i \cdot (B'-D') = \frac{(i-1) \cdot (B-D) + (i+1) \cdot (C-A)}{2} = C'-A'.$$

$B'D'$ und $A'C'$ haben also gleiche Länge und sind zueinander orthogonal. Das ist der Satz von Henricus Hubertus VAN AUBEL (1830-1906).

Insbesondere gilt auch: $A'+B'+C'+D' = A+B+C+D$; ABCD und $A'B'C'D'$ haben also den gleichen Ecken-Schwerpunkt E.

2. Ein Quadrat im Viereck

Der Mittelpunkt von AC ist $\frac{A+C}{2}$, der

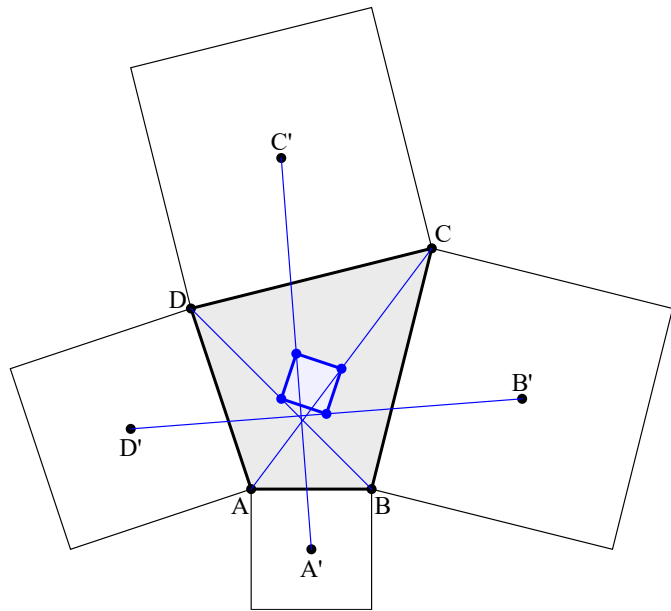
Mittelpunkt von BD ist $\frac{B+D}{2}$, der

Mittelpunkt von B'D' ist

$E+i \cdot \frac{-A+B-C+D}{4}$, der Mittelpunkt von

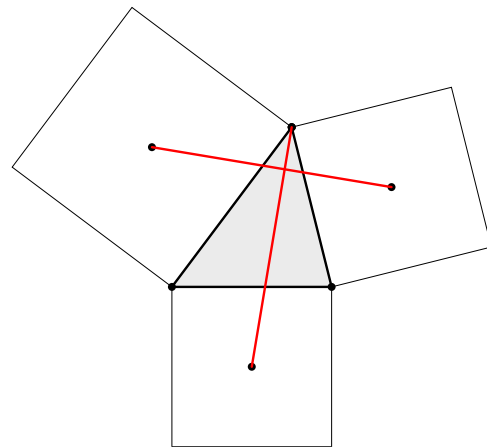
A'C' ist $E+i \cdot \frac{A-B+C-D}{4}$. Die

Mittelpunkte bilden daher ein Quadrat.

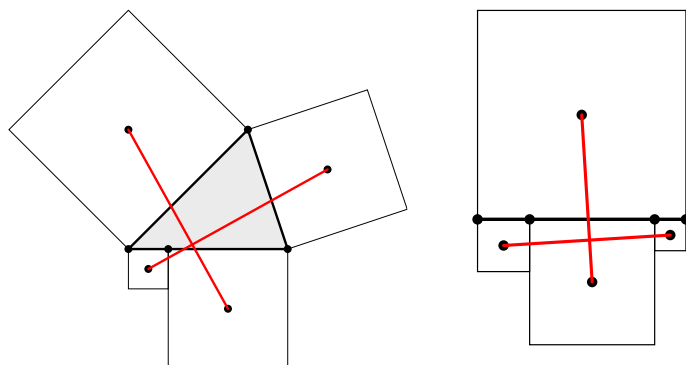


3. Degenerierte Vierecke

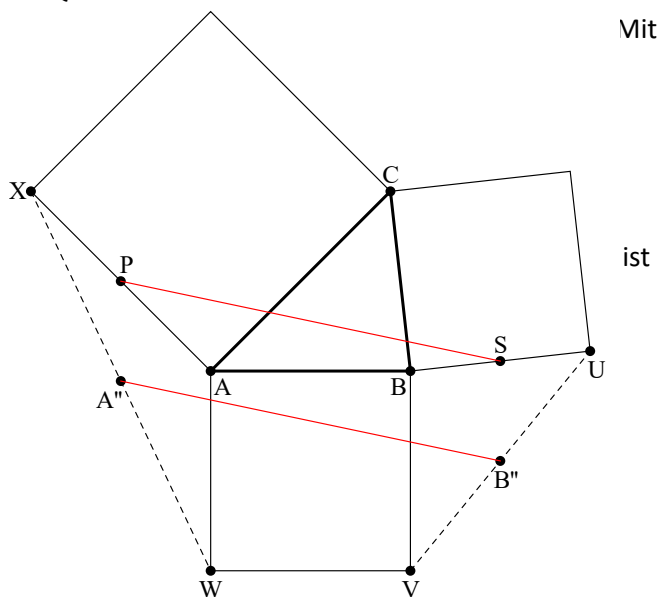
Über A, B, C, D wurde nichts vorausgesetzt; es können auch zwei Punkte zusammenfallen.



Es können auch drei Punkte kollinear oder sogar alle vier Punkte kollinear sein.



4. Quadrate über Dreiecksseiten



Mit

$$U = B - i \cdot (C - B)$$

$$V = B + i \cdot (A - B)$$

$$W = A + i \cdot (A - B)$$

$$X = A + i \cdot (C - A)$$

ist

$$B'' = \frac{U+V}{2} = B + i \cdot \frac{A-C}{2}$$

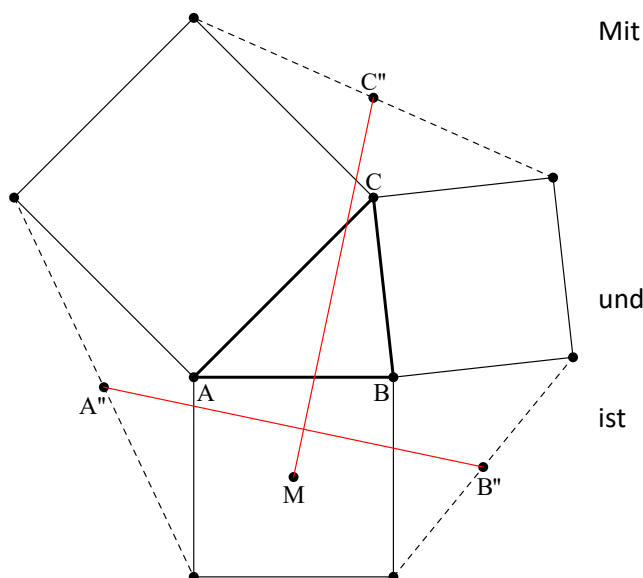
$$A'' = \frac{W+X}{2} = A + i \cdot \frac{C-B}{2}$$

$$S = \frac{B+U}{2} = B + i \cdot \frac{B-C}{2}$$

$$P = \frac{A+X}{2} = A + i \cdot \frac{C-A}{2}$$

und deshalb $B'' - A'' = B - A + i \cdot \frac{A+B-2 \cdot C}{2}$ und $S - P = B - A + i \cdot \frac{A+B-2 \cdot C}{2}$.

Die Strecken $A''B''$ und PS haben demnach gleiche Länge und sind zueinander parallel.



Mit

$$A'' = A - i \cdot \frac{B-C}{2}$$

$$B'' = B - i \cdot \frac{C-A}{2}$$

$$C'' = C - i \cdot \frac{A-B}{2}$$

und

$$M = \frac{(1+i) \cdot A + (1-i) \cdot B}{2}$$

ist

$$B'' - A'' = B - A + i \cdot \frac{A+B-2 \cdot C}{2}$$

$$M - C'' = \frac{A+B-2 \cdot C}{2} + i \cdot (A-B)$$

und daher $i \cdot (M - C'') = B'' - A''$.

Die Strecken $A''B''$ und MC'' haben also gleiche Länge und stehen aufeinander senkrecht.

5. Literatur

R. Fritsch, G. Pickert: Schwerpunkte von Vierecken. In: Die Wurzel, Heft 2 / 2014, 35-41.