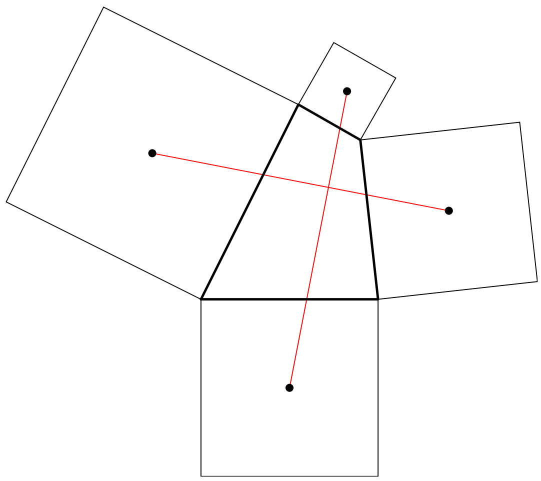
Jörg MEYER, Hameln 22. 10. 2023

Der Satz von VAN AUBEL: Verallgemeinerungen und Ergänzungen

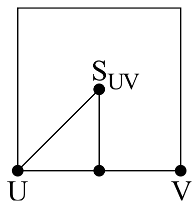
Inhalt

Der Satz und ein Beweis

Der Satz[1] von Henricus Hubertus VAN AUBEL (1830-1906) handelt von einem Viereck (rechts fett gezeichnet), über dessen Seiten nach außen Quadrate errichtet werden.
Dann sind die (roten) Verbindungsstrecken gegenüber liegender Quadrat-Mittelpunkte von gleicher Länge und zueinander orthogonal.



Ein analytischer Beweis liegt auf der Hand: Mit der Vierteldrehung[2] $i:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$ ist der Quadrat-Mittelpunkt über UV gegeben durch $S_{UV}=\frac{U+V}{2}+\frac{1}{2}\cdot i(V-U)$.



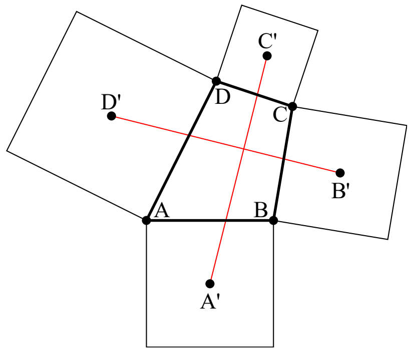
[1] Ein Weg zum Satz und ein synthetischer Beweis finden sich in J. Meyer (2023): Zwei Quadrate mit einem gemeinsamen Eckpunkt. In: Der Mathematikunterricht **69**(3), S. 37-48.
[2] Fasst man die Ebene als komplexe Ebene auf, entspricht die Anwendung von i der Multiplikation mit i.

Es ist also

$$A'=\frac{A+B}{2}+\frac{1}{2}\cdot i(A-B),\ B'=\frac{B+C}{2}+\frac{1}{2}\cdot i(B-C),$$

$$C'=\frac{C+D}{2}+\frac{1}{2}\cdot i(C-D),\ D'=\frac{D+A}{2}+\frac{1}{2}\cdot i(D-A)$$

Und damit



$$C'-A'=\frac{C+D-A-B}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\cdot(B+C-A-D)=\frac{1}{2}\cdot\left(X+i(Y)\right)$$

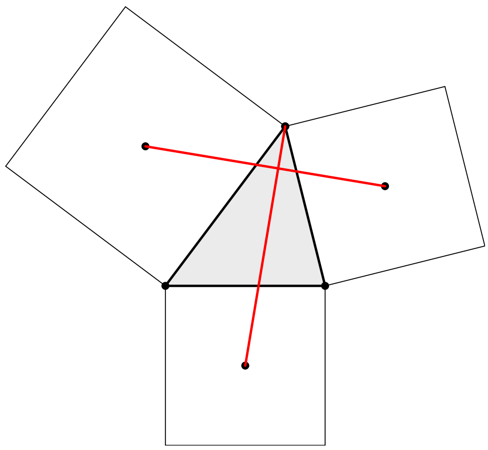
$$B'-D'=\frac{B+C-A-D}{2}+\frac{1}{2}\cdot i(A+B-C-D)=\frac{1}{2}\cdot\left(Y-i(X)\right)$$

Und deshalb $i(B'-D')=C'-A'$, was die Behauptung darstellt.

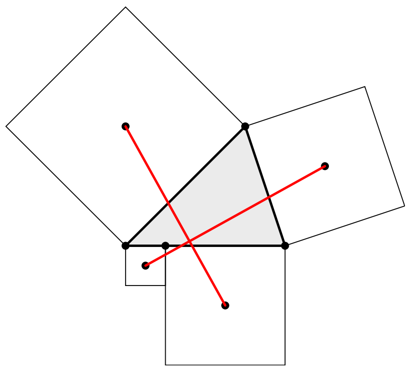
Die Gestalt des Vierecks ABCD ist irrelevant; das Viereck kann auch konkav sein oder ausgeartet.

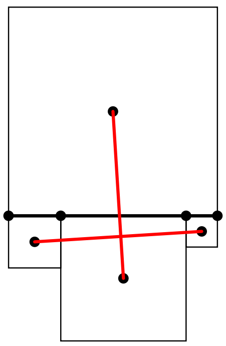
Ausgeartete Vierecke

Über A, B, C, D wurde nichts vorausgesetzt; es können auch zwei Punkte zusammenfallen.



Es können auch drei Punkte kollinear oder sogar alle vier Punkte kollinear sein.





Die Seiten-Mittelpunkte von A’B’C’D‘

Mit dem Schwerpunkt $E=\frac{A+B+C+D}{4}$ von ABCD bilden von A’B’C’D‘die Seiten-Mittelpunkte

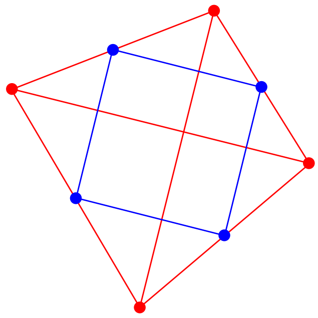
$$A'':=\frac{A'+B'}{2}=E+\frac{B-D}{4}+i\left(\frac{A-C}{4}\right);\ B'':=\frac{B'+C'}{2}=E+\frac{C-A}{4}+i\left(\frac{B-D}{4}\right)$$
$$C'':=\frac{C'+D'}{2}=E+\frac{D-B}{4}+i\left(\frac{C-A}{4}\right);\ D'':=\frac{D'+A'}{2}=E+\frac{A-C}{4}+i\left(\frac{D-B}{4}\right)$$

wegen

$$A''-B''=\frac{A+B-C-D}{4}+i\left(\frac{A+D-B-C}{4}\right)=D''-C''=-i\left(B''-C''\right)$$
$$B''-C''=\frac{B+C-D-A}{4}+i\left(\frac{A+B-C-D}{4}\right)=A''-D''$$

ein Quadrat.

Rechts sieht man in rot das Quadratmitten-Viereck A'B'C'D' mit seinen zueinander orthogonalen Diagonalen gleicher Länge und in blau dessen Mittenquadrat A''B''C''D''.



Dass die blauen Mittelpunkte der Seiten von A'B'C'D' ein Quadrat bilden, sieht man synthetisch leicht ein: Zunächst bilden die blauen Mittelpunkte ein (nach VARIGNON benanntes) Parallelogramm, da die blauen Seiten jeweils zu einer roten Diagonalen parallel sind.

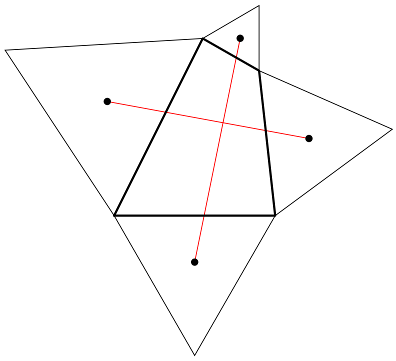
Da die roten Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind auch die blauen Seiten zueinander orthogonal; das blaue Parallelogramm ist mithin ein Rechteck.

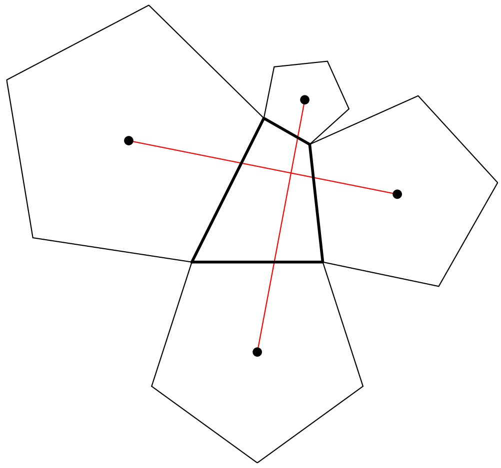
Da die roten Diagonalen gleiche Länge haben und die blauen Seiten jeweils halb so lang sind wie die entsprechenden roten Diagonalen, haben die blauen Seiten alle gleiche Länge. Das blaue Parallelogramm ist mithin eine Raute.

Rechteckige Rauten sind aber Quadrate.

Variation: Die Quadrate auf den Vierecksseiten werden ersetzt durch regelmäßige n-Ecke

Was passiert, wenn m man keine regelmäßigen Vierecke, sondern regelmäßige Dreiecke oder Fünfecke nimmt und deren Schwerpunkte A', B', C', D' nimmt?

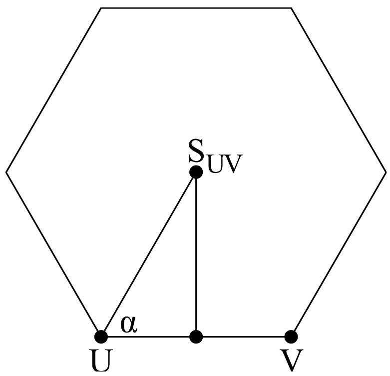




Ausmessen zeigt, dass i.a. die roten Strecken hier nicht von gleicher Länge sind und dass i.a. auch keine Orthogonalität besteht. Was zeichnet die Quadrate gegenüber anderen regelmäßigen n-Ecken aus?

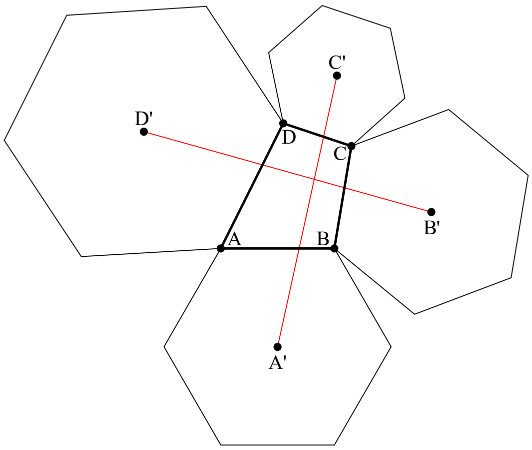
In einem regelmäßigen n-Eck über UV haben die Innenwinkel die Größe $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$. Daher gehört zum Mittelpunkt S_{UV} der Winkel $\alpha=\frac{n-2}{n}\cdot 90°$. Mit $t:=\tan\alpha$ ist dann

$$S_{UV}=\frac{U+V}{2}+\frac{t}{2}\cdot i(V-U).$$



Über den Seiten des Vierecks ABCD werden regelmäßige n-Ecke errichtet. Deren Schwerpunkte sind

$$A'=\frac{A+B}{2}+\frac{t}{2}\cdot i(A-B)$$
$$B'=\frac{B+C}{2}+\frac{t}{2}\cdot i(B-C)$$
$$C'=\frac{C+D}{2}+\frac{t}{2}\cdot i(C-D)$$
$$D'=\frac{D+A}{2}+\frac{t}{2}\cdot i(D-A)$$



Mit

$$C'-A'=\frac{C+D-A-B}{2}+\frac{t}{2}\cdot i\cdot(B+C-A-D)=\frac{1}{2}\cdot(X+t\cdot i(Y))$$

$$B'-D'=\frac{B+C-A-D}{2}+\frac{t}{2}\cdot i(A+B-C-D)=\frac{1}{2}\cdot(Y-t\cdot i(X)).$$

ist

$$(C'-A')\cdot(B'-D')=\frac{1}{4}\cdot\left(X\cdot Y-t\cdot\underbrace{X\cdot i(X)}_{0}+t\cdot\underbrace{Y\cdot i(Y)}_{0}-t^2\cdot\underbrace{i(X)\cdot i(Y)}_{X\cdot Y}\right)=\frac{X\cdot Y}{4}\cdot\left(1-t^2\right).$$

Nur für $t^2=1$ oder für $X\cdot Y=0$ hat man Orthogonalität der roten Strecken.

Ferner ist

$$\begin{aligned}(C'-A')^2-(B'-D')^2&=\frac{1}{4}\cdot\left(X+t\cdot i(Y)\right)^2-\frac{1}{4}\cdot\left(Y-t\cdot i(X)\right)^2\\&=\frac{1}{4}\cdot\left(X^2-Y^2+2\cdot t\cdot X\cdot i(Y)+2\cdot t\cdot Y\cdot i(X)+t^2\cdot Y^2-t^2\cdot X^2\right)\\&=\frac{1}{4}\cdot\left(\left(1-t^2\right)\cdot\left(X^2-Y^2\right)+2\cdot t\cdot\left(\underbrace{X\cdot i(Y)+Y\cdot i(X)}_{0}\right)\right)\end{aligned}$$

Nur für $t^2=1$ oder für $X^2=Y^2$ sind die roten Strecken von gleicher Länge.

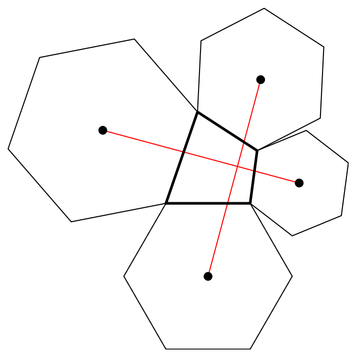
Ist $t=1$, führt das auf $\alpha=45°$ und damit auf $n=4$.

Ist $t=-1$, führt das auf $\alpha=-45°$ und darauf, dass die Quadrate nach innen errichtet werden.

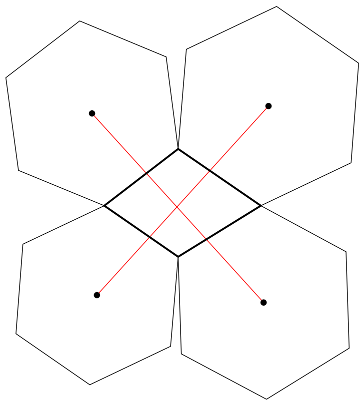
Fazit 1: Errichtet man regelmäßige n-Ecke und ist die Gestalt des Vierecks ABCD irrelevant, so müssen es Quadrate sein, die aber auch nach innen errichtet werden können.

Spezielle Vierecke

Man hat Orthogonalität der roten Strecken auch für $X\cdot Y=0$. Diese Bedingung bedeutet, dass die Diagonalen $C-A$ und $D-B$ gleiche Länge haben müssen.

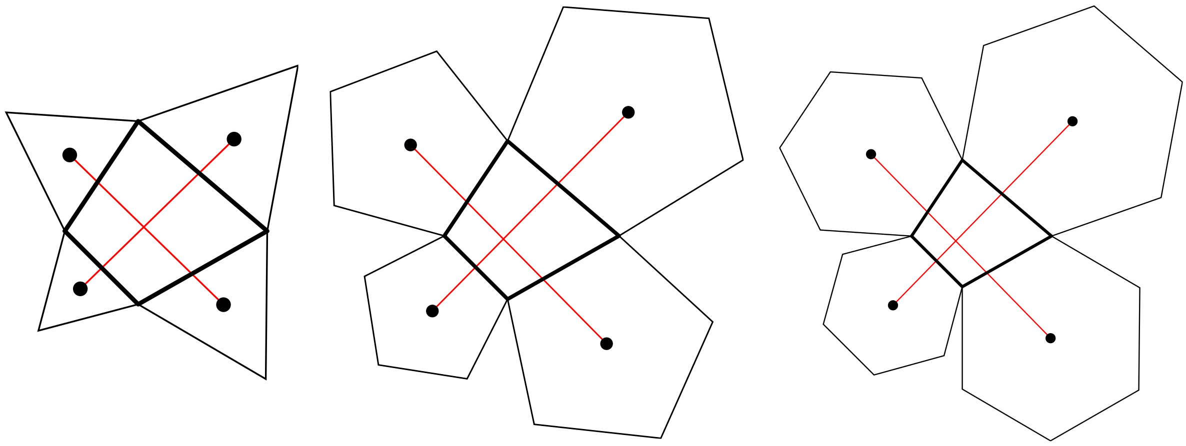


Die roten Strecken sind auch von gleicher Länge für $X^2=Y^2$. Diese Bedingung bedeutet, dass die Diagonalen $C-A$ und $D-B$ aufeinander senkrecht stehen müssen.

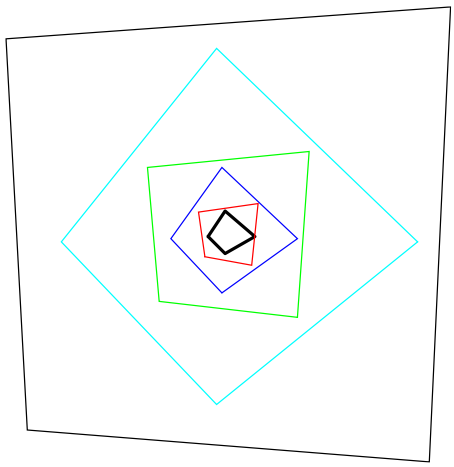


Fazit 2: Stehen die Diagonalen von ABCD aufeinander senkrecht, so haben die Diagonalen von $A'B'C'D'$ gleiche Länge. Haben die Diagonalen von ABCD gleiche Länge, so stehen die Diagonalen von $A'B'C'D'$ aufeinander senkrecht.

Fazit 3: Hat das (fette) Viereck ABCD zueinander senkrechte Diagonalen gleicher Länge und errichtet man über den Seiten regelmäßige n-Ecke, so sind die (roten) Strecken zwischen gegenüberliegenden Schwerpunkten der n-Ecke zueinander senkrecht und von gleicher Länge.



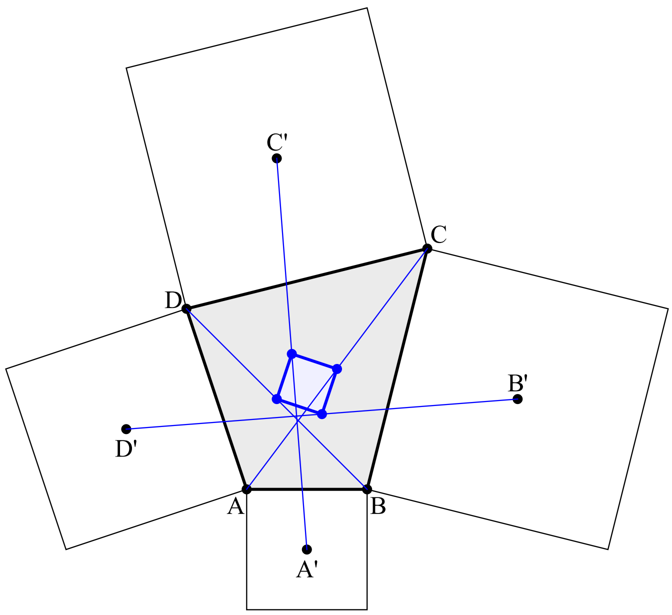
Rechts wird für für $n=5$ der Übergang von ABCD zu A'B'C'D' (Abfolge von innen nach außen) iteriert.



Zurück zu aufgesetzten Quadraten: Ein Quadrat im Viereck

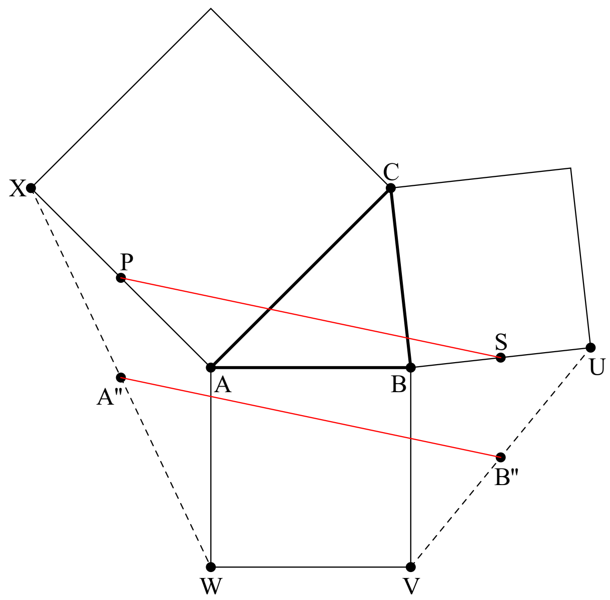
Wegen $A'+B'+C'+D'=A+B+C+D$ haben ABCD und A'B'C'D' haben den gleichen Ecken-Schwerpunkt E.

Der Mittelpunkt von AC ist $\frac{A+C}{2}$, der Mittelpunkt von BD ist $\frac{B+D}{2}$, der Mittelpunkt von B'D' ist $E+i\left(\frac{-A+B-C+D}{4}\right)$, der Mittelpunkt von A'C' ist $E+i\left(\frac{A-B+C-D}{4}\right)$. Diese Mittelpunkte bilden daher ein Quadrat[3].



[3] R. Fritsch, G. Pickert: Schwerpunkte von Vierecken. In: Die Wurzel, Heft 2 / 2014, 35-41.

Quadrate über Dreiecksseiten



Mit

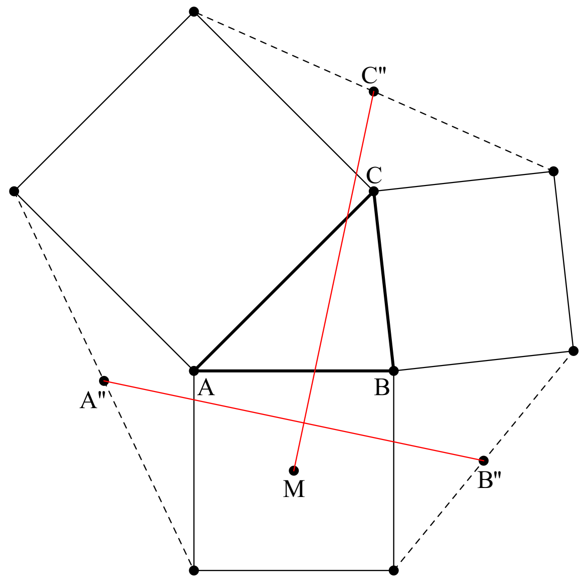
$$U = B - i(C - B)$$
$$V = B + i(A - B)$$
$$W = A + i(A - B)$$
$$X = A + i(C - A)$$

ist

$$B'' = \frac{U+V}{2} = B + i\left(\frac{A-C}{2}\right)$$
$$A'' = \frac{W+X}{2} = A + i\left(\frac{C-B}{2}\right)$$
$$S = \frac{B+U}{2} = B + i\left(\frac{B-C}{2}\right)$$
$$P = \frac{A+X}{2} = A + i\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

und deshalb $B'' - A'' = B - A + i\left(\frac{A+B-2\cdot C}{2}\right)$ und $S - P = B - A + i\left(\frac{A+B-2\cdot C}{2}\right)$.

Die Strecken A''B'' und PS haben demnach gleiche Länge und sind zueinander parallel.



Mit

$$A'' = A - i\left(\frac{B-C}{2}\right)$$
$$B'' = B - i\left(\frac{C-A}{2}\right)$$
$$C'' = C - i\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

und

$$M = \frac{A+B+i(A-B)}{2}$$

ist

$$B'' - A'' = B - A + i\left(\frac{A+B-2\cdot C}{2}\right)$$
$$M - C'' = \frac{A+B-2\cdot C}{2} + i(A-B)$$

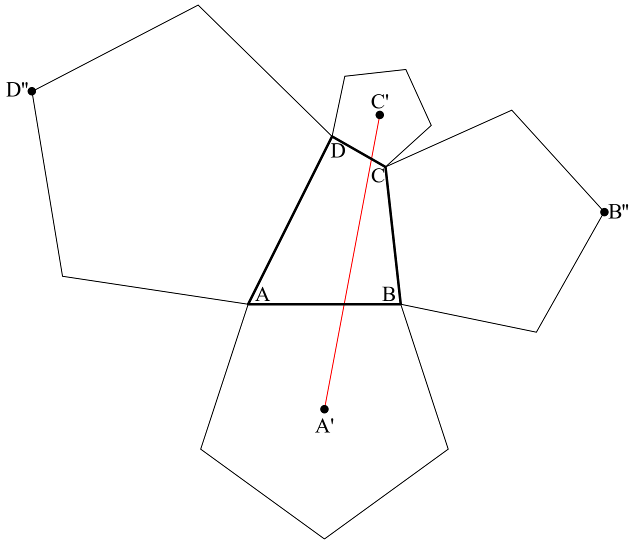
und daher $i(M - C'') = B'' - A''$.

Die Strecken A''B'' und MC'' haben also gleiche Länge und stehen aufeinander senkrecht.

(2n+1)-Ecke

Bei Dreiecken oder bei Fünfecken sind die Strecken zwischen gegenüberliegenden Schwerpunkten i.a. weder gleich lang noch zueinander orthogonal.

Betrachten wir die Strecke zwischen $A' = \frac{A+B}{2} + \frac{t}{2}\cdot i(A-B)$ und $C' = \frac{C+D}{2} + \frac{t}{2}\cdot i(C-D)$.



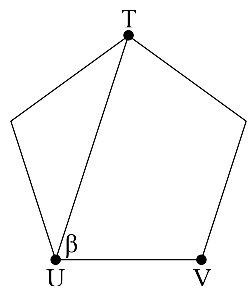
Die äußeren Eckpunkte B‘‘ und D‘‘ haben die Form $B''=\frac{B+C}{2}+\frac{s}{2}\cdot i(B-C)$ und $D''=\frac{D+A}{2}+\frac{s}{2}\cdot i(D-A)$ mit passendem s. Dann ist

$$(C'-A')\cdot(B''-D'')=\frac{1}{4}\cdot\left(\underbrace{C+D-A-B}_{U}+t\cdot i\left(\underbrace{C+B-D-A}_{V}\right)\right)\cdot\left(\underbrace{B+C-D-A}_{V}+s\cdot i\left(\underbrace{A+B-C-D}_{-U}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(U\cdot V-s\cdot\underbrace{U\cdot i(U)}_{0}+t\cdot\underbrace{V\cdot i(V)}_{0}-t\cdot s\cdot\underbrace{i(V)\cdot i(U)}_{U\cdot V}\right)=\frac{U\cdot V}{4}\cdot(1-t\cdot s)$$

Für ein allgemeines Viereck stehen A’C‘ und B‘‘D‘‘ genau dann aufeinander senkrecht, wenn $s\cdot t=1$ ist.

Für ein n-Eck war $\alpha=\frac{n-2}{n}\cdot 90°$. Der Innenwinkel eines n-Ecks beträgt $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$, für $n>3$ ist daher $\beta=\frac{n-2}{n}\cdot 270°-90°$, und für $n=3$ ist $\beta=60°$.
Für $n=5$ ist $t\cdot s>1$ und für $n\geq 7$ ist $t\cdot s<0$.
Daher gilt: Nur für $n=3$ stehen bei einem allgemeinen Viereck die Strecken A’C‘ und B‘‘D‘‘ aufeinander senkrecht. Allerdings haben diese Strecken nicht die gleiche Länge.



Analog stehen bei einem allgemeinen Viereck ABCD auch B’D‘ und A‘‘C‘‘ aufeinander senkrecht.