Archimedes: Ein interaktives Programm zur Raumgeometrie[1]

Abstract: Das Raumgeometrie-Programm „Archimedes Geo3D“ wird vorgestellt und es wird erläutert, wie man mit seiner Hilfe einige Standardaufgaben lösen kann. Diese sind im geometrischen Teil des Komplexes „Analytische Geometrie / Lineare Algebra“ angesiedelt.

0 Einleitung

Die Raumgeometrie-*Software*[2] *„Archimedes Geo3D“* wurde analog zu dynamischen (d.h. interaktiven) Programmen zur ebenen Geometrie wie Euklid DynaGeo oder GeoGebra konzipiert. *Archimedes* wird hier anhand von drei Standardaufgaben zur Analytischen Geometrie vorgestellt:

1. Wie bestimmt man den Schnittpunkt einer (Raum-)Gerade mit einer Ebene?
2. Wie bestimmt man den Abstand eines Punktes von einer (Raum-)Geraden)?
3. Was kann man über alle Punkte sagen, die von einem festen Punkt und einer festen (Raum-)Geraden den gleichen Abstand haben?

Da bisher noch nicht ausreichend Erfahrungen über den Unterrichtseinsatz von *Archimedes* vorliegen, werden in diesem Artikel keine didaktischen Aussagen über dies Programm gemacht, wohl aber wird auf die Potenzen von *Archimedes* hingewiesen. Eine Gegenüberstellung von *Archimedes* und Cabri3 bietet sich nicht an, da man im letztgenannten Programm die Objekte nicht durch Koordinaten eingeben kann.

Ein Wort noch zur Bezeichnung: In diesem Artikel wird bezeichnungstechnisch nicht zwischen Punkten und Vektoren unterschieden, eine Gerade hat also den allgemeinen Punkt

$$X(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

1 Schnitt von Gerade und Ebene

Gegeben seien eine Gerade g in Parameterform und eine Ebene E in Koordinatenform.
Will man etwa den Schnittpunkt Q der Gerade g mit der Ebene E ermitteln, so sind dazu folgende Schritte erforderlich:

1. Die Lernenden stellen sich im Kopf eine Ebene und eine Gerade vor, ggf. mit allen möglichen Lagebeziehungen. Hierzu braucht man die entsprechende Raumvorstellung.
2. In der Aufgabenstellung ist die Gerade g in Parameterform gegeben. Hier muss das Wissen reaktiviert werden, dass jeder Punkt auf g umkehrbar eindeutig zu einem gewissen Parameter gehört. Andererseits lassen sich Punkte auf E nicht jeweils eindeutig einem einzigen Parameter zuordnen. Es ist also vermutlich sinnvoll, mit den Punkten auf g zu arbeiten. Hier braucht man eine gewisse (auch heuristische) Erfahrung, wie mit Problemen dieser Art umzugehen ist.
3. Nun ist zu klären, wodurch sich der gesuchte Schnittpunkt Q auszeichnet: Es ist der einzige Punkt auf g, der auch in E liegt. Hier werden die Tätigkeiten aus den Schritten 1. und 2. zusammengeführt.
4. Die Tatsache, dass ein beliebiger Punkt auf g auch in E liegt, lässt sich durch eine Gleichung ausdrücken. Hier ist ein Repräsentationswechsel (geometrisches Problem zu algebraischem Problem) erforderlich. Es ist zu klären, welchen Aspekt der in der Gleichung auftretende Parameter hat: Es ist die zu ermittelnde Unbekannte.

---

[1] Erschien in: Praxis der Mathematik in der Schule **30** (Dezember 2009 / 51. Jahrgang); S. 36 - 39.

[2] Das Programm wurde von StR Andreas Goebel (Göttingen) geschrieben. Näheres findet man unter www.raumgeometrie.de.

5. Das Lösen der in 4. angesprochenen Gleichung erfordert algebraische Kompetenzen. Man kann das Lösen zwar an ein CAS delegieren, benötigt dafür aber entsprechende Werkzeugkompetenz.
6. Schließlich ist der in 5. gefundene Parameter zu verarbeiten und zu klären, was er mit dem ursprünglichen Problem zu tun hat; hier findet ein Rückbezug zu 1. statt.
7. Gegebenenfalls findet noch eine Probe statt: Q muss auf beiden geometrischen Objekten liegen. Die Probe verlangt wieder algebraische Kompetenzen.

Diese sechs Punkte beleuchten die Schwierigkeiten, die Schülerinnen und Schüler mit dieser Aufgabe haben können. Die erfahrene Lehrperson wird gut daran tun, gerade bei der Erstbegegnung mit einer solchen Aufgabe ein Realmodell parat zu haben. Erstaunlich viele Lernende benutzen das Realmodell tatsächlich, um die Punkte 1., 2. und 3. zu klären.

Selbstverständlich muss der Unterricht die Schülerinnen und Schüler befähigen, die Schritte 1. bis 6. (oder 7.) durchlaufen zu können. Mit Objekten im Raum rechnen zu können und Rechnungen auf Objekte im Raum beziehen zu können, also zwischen Algebra und Raumgeometrie in beiden Richtungen übersetzen zu können, ist eine überall geforderte Kompetenz. Sie ist nicht nur inhaltsbezogen, sondern, wenn man sie als Repräsentationswechsel auffasst, auch prozessbezogen.

Die Arbeit mit einem 3-dimensionalen Realmodell ist, wie schon erwähnt, für die Erstbegegnung unabdingbar. Ganz verkehrt wäre es, hier schon ein Computerprogramm einzusetzen: Die zweidimensionale Bildschirmdarstellung will ja erst decodiert werden, und das gelingt nur, wenn der 3-dimensionale Sachverhalt hinreichend vertraut ist.

Ganz anders sieht die Sache aus, wenn die Lernenden mit Aufgaben diesen Typs schon Erfahrungen haben. Da will man vielleicht nicht immer die obigen 6 bis 7 Punkte durchlaufen, sondern ein Werkzeug haben, das die Überlegungen abkürzt. Es lohnt sich nicht, in einem CAS den Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene fest zu implementieren, zumal damit keine Variationsmöglichkeiten und keinerlei heuristisches Potential verbunden ist. Außerdem wäre es eine Implementierung auf der algebraischen Seite; schöner wäre ein Werkzeug auf der geometrischen Seite.

Mit *Archimedes* gestaltet sich die Lösung einer konkreten Aufgabe obigen Typs so:

Gegeben sei die Gerade g mit dem allgemeinen Punkt $X\ \lambda = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ und die Ebene E mit der Gleichung $2\cdot x + 3\cdot y - 4\cdot z = 0$. Man bestimme den Schnittpunkt Q von g mit E.

In „Typische Aufgaben“ kann man die Geradengleichung und die Ebenengleichung eingeben (Abb. 1 und 2).

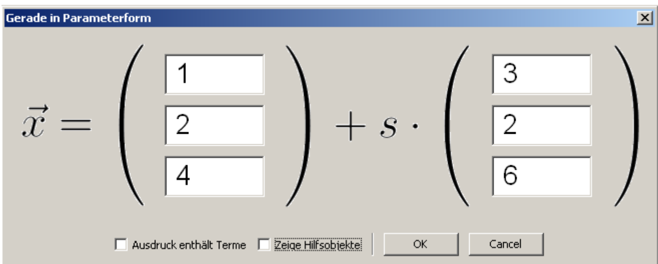

Abb. 1

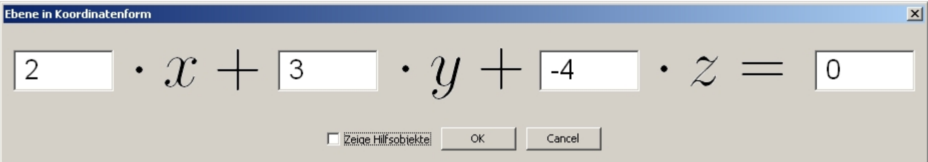

Abb. 2

Es erscheint ein Bild von g und E im rechten Fenster (Abb. 3); mit der Maus kann das Bild gedreht und verschoben werden. (Am besten blendet man das Koordinatensystem aus, weil es die Zeichnung überfrachtet.) Nach Markieren von g und E liefert der Schnitt-Button den Schnittpunkt Q.

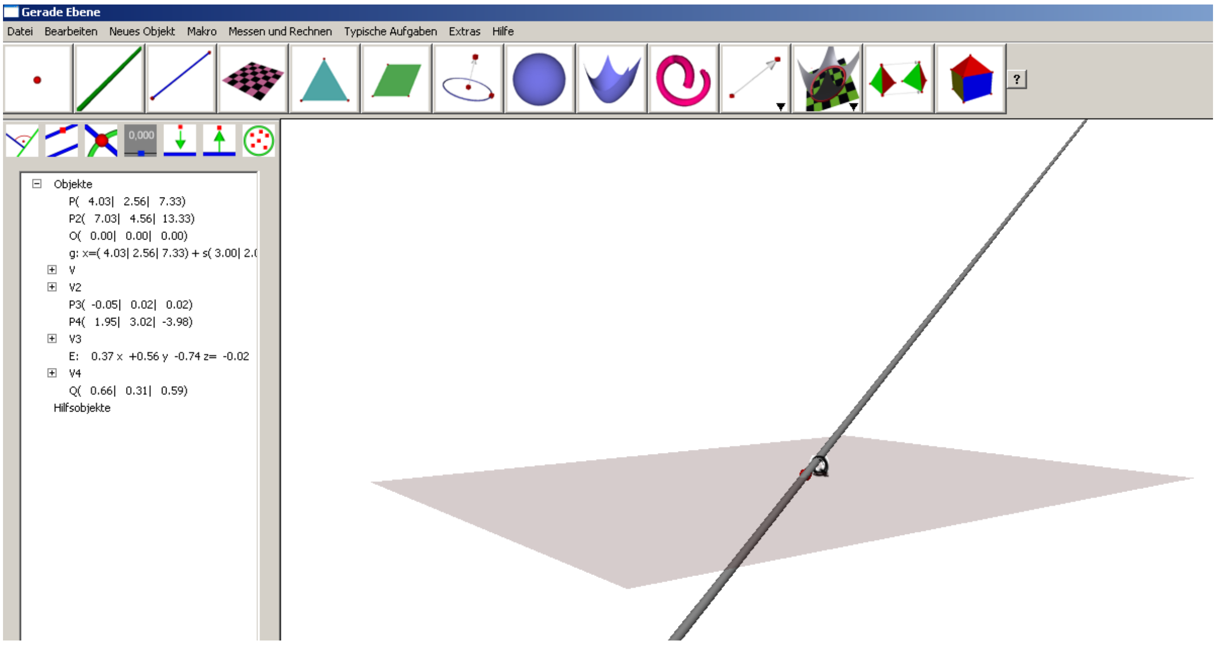

Abb. 3

Nun lohnt sich ein Blick auf das linke Fenster (Abb. 4).

Objekte
P(1.000| 2.000| 4.000)
P2(4.000| 4.000| 10.000)
O(0.000| 0.000| 0.000)
g: x=(1.0| 2.0| 4.0) + s(3.0| 2.0| 6.0)
V
V2
P3(0.000| 0.000| 0.000)
P4(2.000| 3.000| -4.000)
V3
E: 0.371 x +0.557 y -0.743 z= 0.000
V4
Q(-1.000| 0.667| -0.000)

Abb. 4

Man erkennt in g die Gerade und in E die (auf Normalform gebrachte) Ebene E. Der Schnittpunkt Q erscheint mit seinen Koordinaten.

Hieran sieht man schon einige Vor- und die Nachteile des Einsatzes von *Archimedes*:

- Weil die Visualisierung von g und E gleich mitgeliefert wird, ist zum Decodieren des zweidimensionalen Bildes bereits Raumanschauung erforderlich. Man wird also *Archimedes* nicht unbedingt in der Anfangsphase der Raumgeometrie einsetzen. Aber auch später wird man nicht jedes raumgeometrische Problem an *Archimedes* delegieren. Hier ist die Situation analog zum CAS-Einsatz, der auch nur dann sinnvoll und fruchtbar ist, wenn er in angemessener Dosierung vorgenommen wird. Bei dem hier behandelten Problem (Schnitt von Gerade und Ebene) hat die Visualisierung auch eher Kontrollfunktion; erkenntnisfördernd kann sie werden, wenn das räumliche Vorstellungsvermögen (bei anderen Problemen wie in Kapitel 3 dargestellt) an seine Grenzen stößt.
- Die zur angemessenen Verwendung von Archimedes notwendige Werkzeugkompetenz ist nicht zu vernachlässigen; dies trifft allerdings auf jedes Werkzeug zu.

2 Abstand zwischen Punkt und Gerade

Gegeben sei die Gerade g mit dem allgemeinen Punkt $X\ \lambda = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ sowie der Punkt

$R = \begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$, der nicht auf g liegt. Man bestimme den Abstand von R zu g.

Hier kann man die *(geometrische) Idee* haben, durch R eine zu g orthogonale Ebene E zu legen und den Schnittpunkt Q von g mit E zu berechnen. Der Abstand zwischen R und Q ist dann der gesuchte Abstand. Eine solche Idee lässt sich gut durch ein ein Realmodell befördern. Es liegen m.W. bisher keine Erfahrungen vor, inwiefern man *Archimedes* zur Ideenfindung einsetzen kann.
Wenn man die eben erwähnte geometrische Idee hat, dann hat der Einsatz von *Archimedes* hier einen großen Vorteil: Man kann sich nämlich auf die geometrische Strategie konzentrieren. (Herkömmlicherweise muss man die geometrische Idee erst in Algebra übersetzen.)
Die Eingabe von R lässt sich unten im linken Fenster vornehmen (Abb. 5).

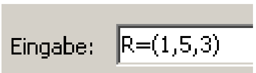

Abb. 5

Man kann sich im rechten Fenster optisch davon überzeugen, dass R tatsächlich nicht auf g liegt. Das soll nicht bedeuten, dass solche Überprüfungen grundsätzlich an den Computer delegiert werden; gleichwohl ist es sinnvoll, dass die Lernenden wissen, wie man etwaige Überprüfungen *auch* mit dem Programm vornehmen können.
Die Ebene E bekommt man über „Neues Objekt / Ebene / Lotebene oder parallele Ebene“ nach Anklicken von R und g. Wie man E mit g schneidet, wurde schon erläutert; dies zum Schnittpunkt Q führende Werkzeug lässt sich hier nutzen.
Konstruiert man noch die Strecke (oder auch den Vektor) von Q nach R, so bekommt man in „Messen und Rechnen / Länge“ den gesuchten Abstand (3,16; Abb. 6).

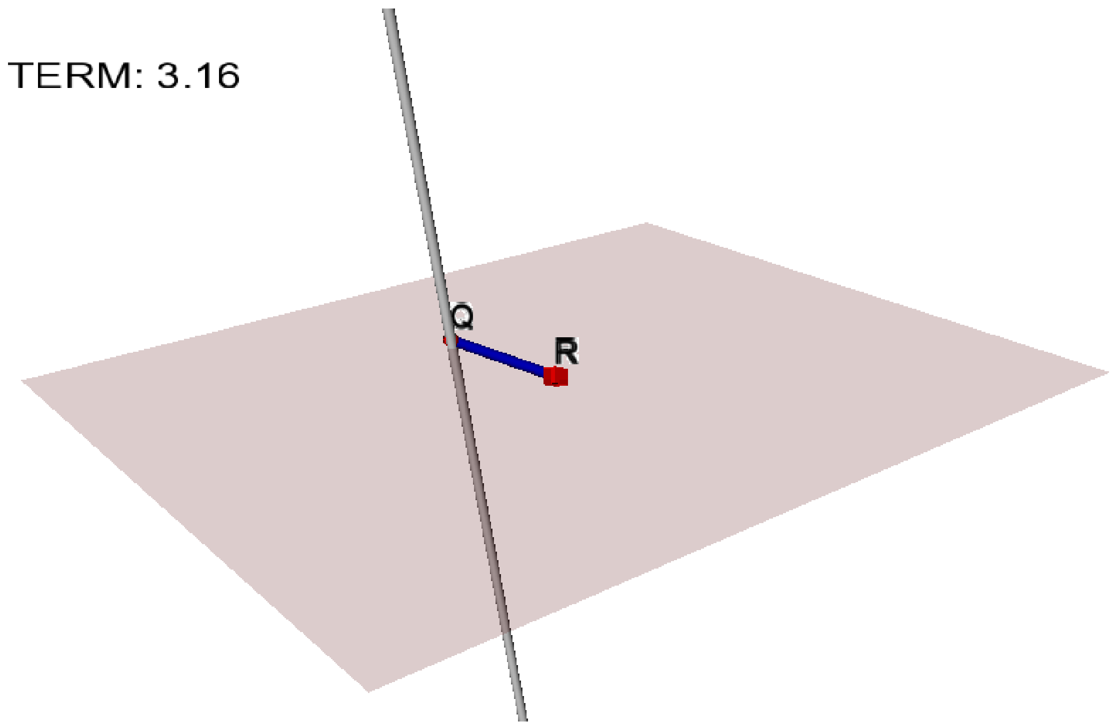

Abb. 6

Wieder lassen sich einige Vor- und Nachteile des Software-Einsatzes erkennen:

- Die Übersetzbarkeit von Geometrie in Algebra und umgekehrt wird durch *Archimedes* kaum gefördert; allerdings müssen die Elemente im Termfenster richtig identifiziert und interpretiert werden.
- Andererseits kann man sich im Unterricht auf die geometrische Strategie konzentrieren und diese dadurch stärken, indem man sie von fast jeglicher Termumformung befreit. Das Durchführen alternativer geometrischer Strategien wird nicht mehr von fehlenden algebraischen Kompetenzen, sondern höchstens durch fehlende Werkzeugkompetenzen behindert.

3 Eine Ortsfläche

Dass *Archimedes* auch die geometrische Imagination befördern kann, soll das folgende Beispiel zeigen:
Was kann man über alle Punkte sagen, die zu einem gegebenen Punkt F und zu einer gegebenen Geraden g (die nicht durch F geht) den gleichen Abstand haben?

Zunächst stößt hier das räumliche Vorstellungsvermögen an Grenzen, zumal die Lösungsfläche auch überraschende Aspekte aufweist.

Nach der (sowohl für *Archimedes* als auch für eine algebraische Behandlung) notwendigen Koordinatisierung $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g: \; X(\lambda) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ kann man sich für das Finden der geometrischen Grundidee am analogen (aus der Sek I bekannten) zweidimensionalen Problem orientieren:

Alle Punkte, die zu einem festen Punkt F und zu einer festen Gerade g den gleichen Abstand haben, liegen auf einer Parabel (Abb. 7).

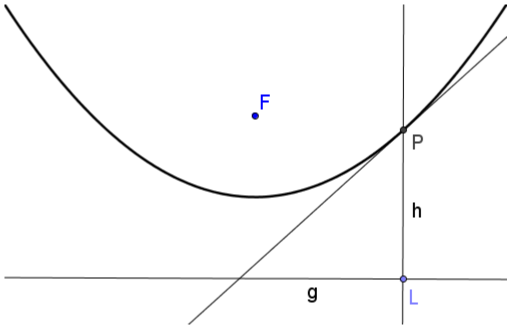

Abb. 7

Konstruktions-Idee: Wenn L die Gerade g durchläuft, so liegt auf der Senkrechten h zu g durch L irgendwo ein Punkt der gesuchten Kurve. Dieser muss den gleichen Abstand zu F und zu g (d.h. also: zu L) haben und liegt mithin auf der Mittelsenkrechten zu F und L. Der Schnittpunkt P dieser Mittelsenkrechten mit h ist ein Punkt der gesuchten Kurve, und man bekommt alle solchen Punkte, wenn L die Gerade g durchläuft.

Diese Konstruktions-Idee lässt sich auf das räumliche Problem direkt übertragen:
Wenn L die Gerade g durchläuft, so liegt auf der zu g senkrechten Ebene E durch L irgendwo ein Punkt der gesuchten Fläche. Dieser muss den gleichen Abstand zu F und zu g (d.h. also: zu L) haben und liegt mithin auf der Mittelebene zu F und L. Die Schnittgerade s dieser Mittelebene mit E ist eine Gerade der gesuchten Fläche, und man bekommt alle solchen Geraden, wenn L die Gerade g durchläuft.

Zwei Bedienungshinweise:
Wenn man in *Archimedes* einen Punkt auf einer Geraden haben will, muss man die Gerade erst anklicken und dann den Punkt-Button betätigen.
Man bekommt Mittelebenen in Makro/Konstruktionen. In Abb. 8 ist die Mittelebene nicht eingezeichnet.

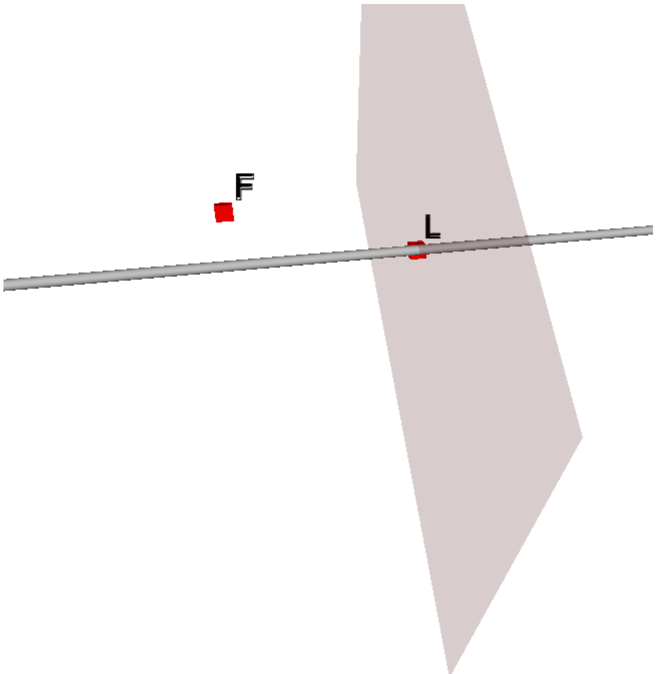

Abb. 8

Wenn L die Gerade g durchläuft, entsteht eine Parabelrinne (Abb. 9); diese wird wesentlich deutlicher, wenn man nicht nur ein statisches Bild hat, sondern interaktiv alles drehen kann.

Die Parabelrinne liegt überraschenderweise anders als man vielleicht denkt:

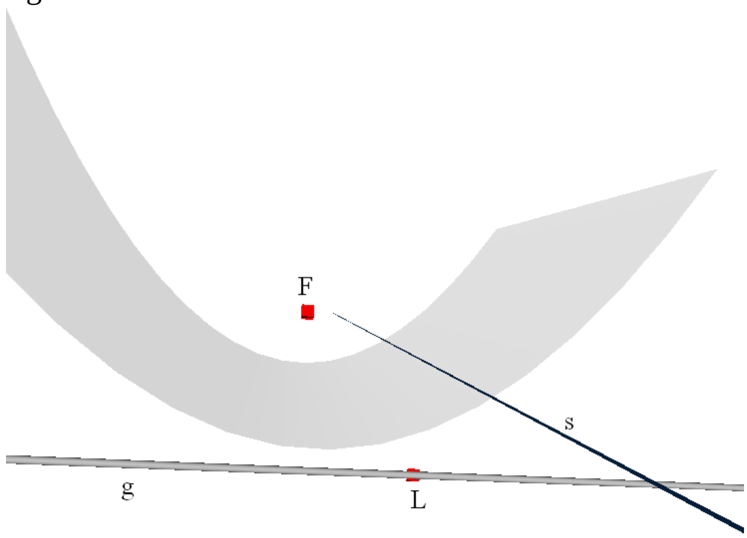

Abb. 9

Man hätte die Fläche auch ausrechnen können (wie im Parabelfall) und die entstehende Gleichung in einem CAS visualisieren können. In *Archimedes* lässt sie sich zusätzlich interaktiv verändern, indem man etwa den Abstand zwischen F und g variiert.

Hier sind die Vor- und Nachteile des Software-Einsatzes ähnlich wie in Kapitel 2:

- Die Werkzeugkompetenz muss vorhanden sein.
- Das Zusammenspiel von Geometrie und Algebra wird nicht gefördert.
- Die geometrische Strategie kann im Vordergrund stehen, insbesondere die Analogisierung der 2- und 3-dimensionalen Probleme.

4 Schlussbemerkung

Welchen Effekt die durch *Archimedes* mögliche Konzentration auf geometrische Vorgehensweisen hat undwelches weitere methodische Potential in der Verwendung der Software liegt, ist noch zu erforschen. Bisher liegen zu wenige Unterrichtserfahrungen vor, um zu belastbaren Aussagen zu kommen.