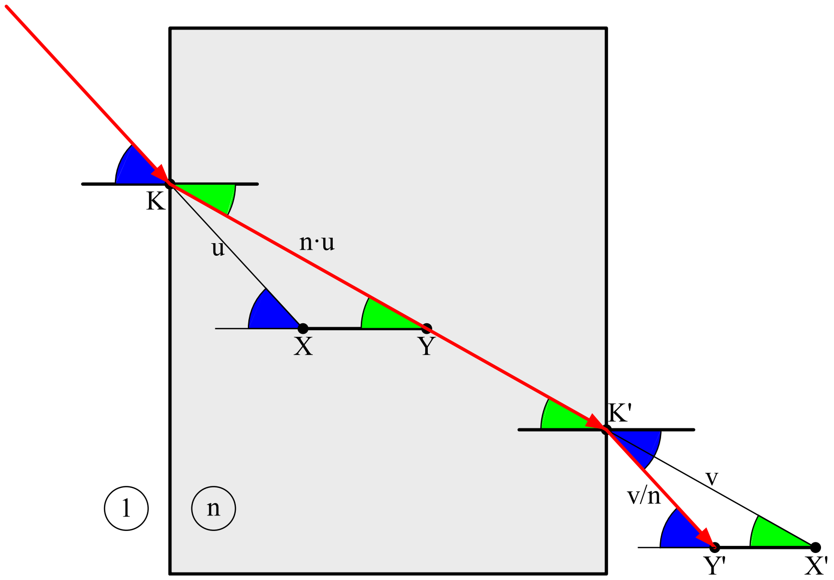
Jörg MEYER, Hameln 14.10.2024

Hyperbeln und Ellipsen bei Linsenformen

Trifft ein Lichtstrahl auf eine Linse, so wird er gebrochen. Das geschieht auch, wenn der Lichtstrahl die Linse wieder verlässt.

Zur Konstruktion des gebrochenen Strahls

Das wohl einfachste Verfahren stammt von Ferdinand LIPPICH (1838 - 1913)[1]; es wird an einer planparallelen Platte aus Linsenmaterial mit dem Brechungsindex n erläutert.

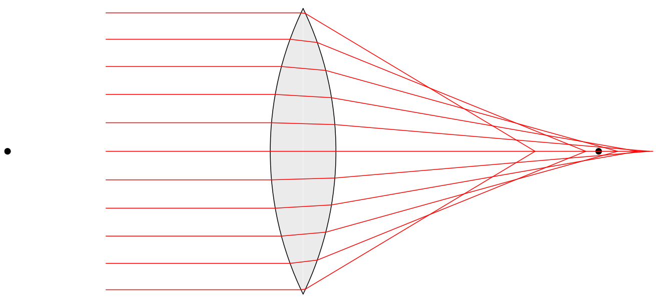


Ein von links oben kommender Lichtstrahl trifft die Platte in K. Die Normale in K ist fett. Der Einfallswinkel ist blau. X liegt irgendwo auf der Verlängerung des Lichtstrahls. XY ist zur Normalen in K parallel, und es sei $KY = n \cdot KX$. Der Brechungswinkel ist grün. Im Dreieck XYK ist $\frac{\sin(\text{grün})}{1} = \frac{\sin(\text{blau})}{n}$, also gilt für KY das Brechungsgesetz, und KY ist der gebrochene Strahl.

Dieser trifft in K‘ wieder die Platte. X‘ liegt irgendwo auf der Verlängerung von KY. Y’X‘ sei zur Normalen in K‘ parallel, und es sei $K'Y' = \frac{K'X'}{n}$. Im Dreieck Y’X’K‘ gilt $\frac{\sin(\text{grün})}{1/n} = \frac{\sin(\text{blau})}{1}$, daher gilt für K’Y‘ das Brechungsgesetz, und K’Y‘ ist der gebrochene Strahl. Dieser ist zum Ausgangsstrahl parallel.

Strahlengang einer sphärischen bikonvexen Linse

Im Querschnitt hat man Kreisbögen, deren Mittelpunkte markiert sind. Obwohl die Linse nicht sehr dick ist, ist zu sehen, dass achsenparallele Strahlen nach dem Durchlaufen der Linse sich nicht alle in einem Punkt versammeln.



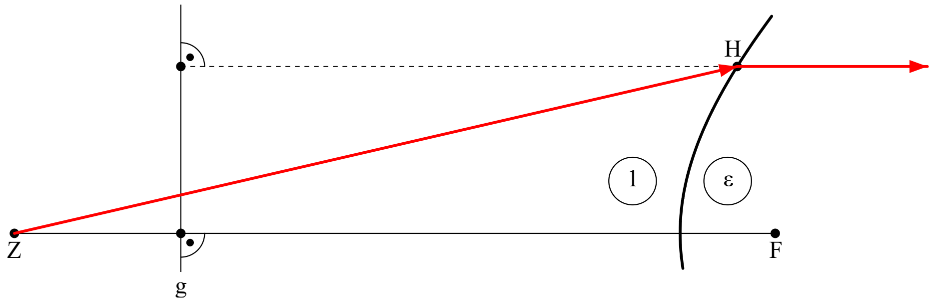
Ein besseres Verhalten gelingt mit einer plankonvexen hyperbolischen Linse:

Hyperbolische Linsen

Eine Hyperbel habe die Brennpunkte Z und F und die Exzentrizität ε. Die zu Z gehörige Leitgerade sei g. Das Linsenmaterial habe den Brechungsindex $\varepsilon > 1$. Dann gilt für jeden Hyperbelpunkt H, dass dessen Abstand zu Z genau ε-mal so groß ist wie dessen Abstand zu g.

[1] W. Hinrichs (1911): Einführung in die geometrische Optik. Leipzig: G.J.Göschen’sche Verlagshandlung.

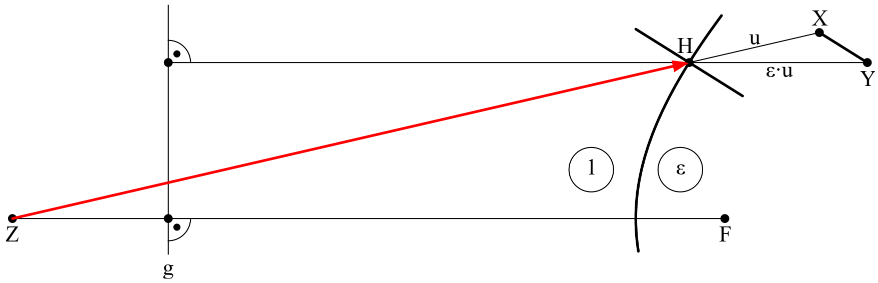
Ein von Z ausgehender Lichtstrahl treffe die Hyperbel in H. Dann ist der in H gebrochene Strahl parallel zu ZF.



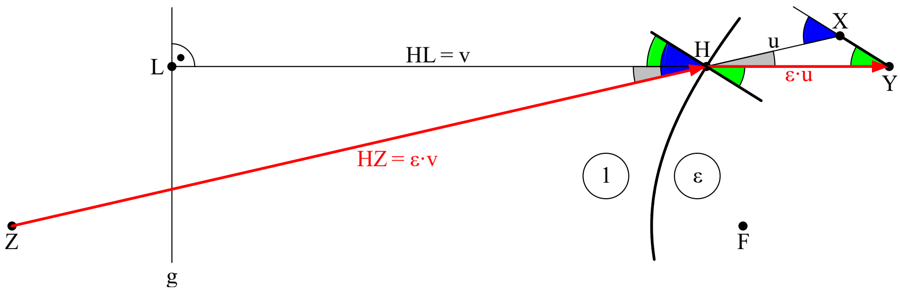
D.h.: Alle von Z ausgehenden Strahlen werden am rechten Hyperbel-Ast so gebrochen, dass sie rechts vom Ast parallel verlaufen. Warum ist das so?

Um zu begründen, dass HY tatsächlich der gebrochene Strahl ist, müssen Einfalls- und Brechungswinkel, die beide gegen die Normale in H gemessen werden, berücksichtigt werden.

Die Normale ist fett.
X sei irgendwo auf der Verlängerung von ZH.
XY ist zur Normalen parallel, und es gelte $HY = \varepsilon \cdot HX$.



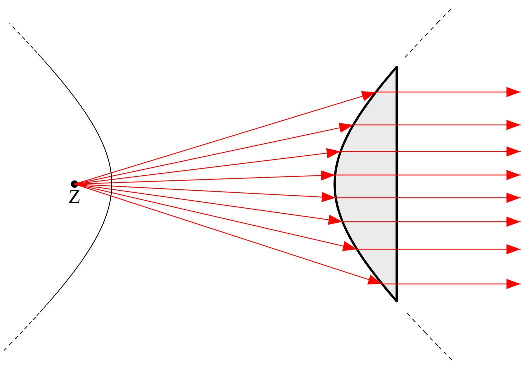
Der Einfallswinkel ist blau und der Brechungswinkel grün. Dass der grüne Winkel tatsächlich der Brechungswinkel ist, sieht man am Dreieck HYX, in dem



$\frac{\sin(\text{blau})}{\varepsilon} = \frac{\sin(\text{grün})}{1}$ und damit das Brechungsgesetz gilt. Damit ist HY der gebrochene Strahl.

Dass HY senkrecht zu g verläuft, sieht man daran, dass die grauen Winkel beide die Größe blau – grün haben und die Dreiecke HYX und ZHL zueinander ähnlich sind.

Damit gibt es eine (plankonvexe) Linse, die alle von einem Punkt ausgehenden Lichtstrahlen parallelisiert.
Die Linse wird von einer Schale eines zweischaligen Rotations-Hyperboloids und von einer Ebene begrenzt.

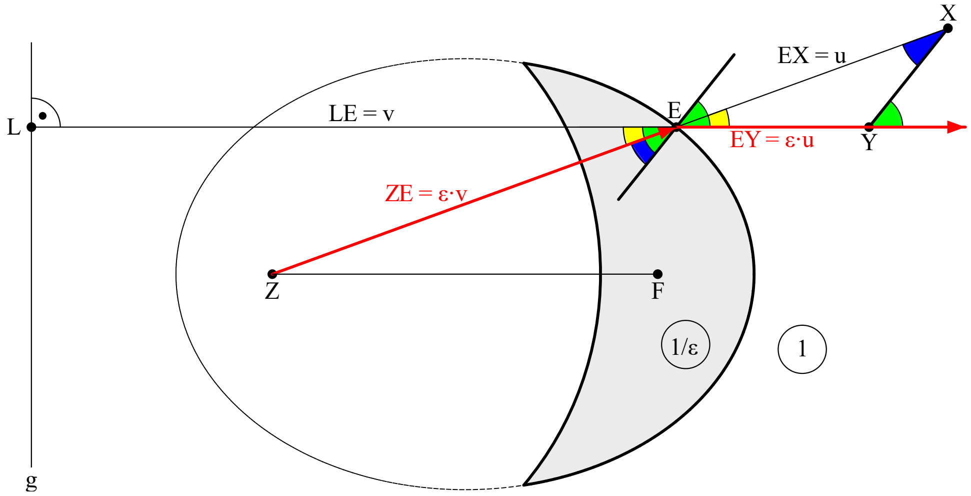


Elliptische Linsen

Dass von einem Punkt ausgehende Strahlen parallelisiert werden, gelingt auch mit einer Ellipse:

Eine Ellipse habe die Brennpunkte Z und F und die Exzentrizität ε(<1). Die zu Z gehörige Leitgerade sei g. Der Abstand von jedem Ellipsenpunkt zu Z ist ε-mal so groß wie der Abstand zu g. Das

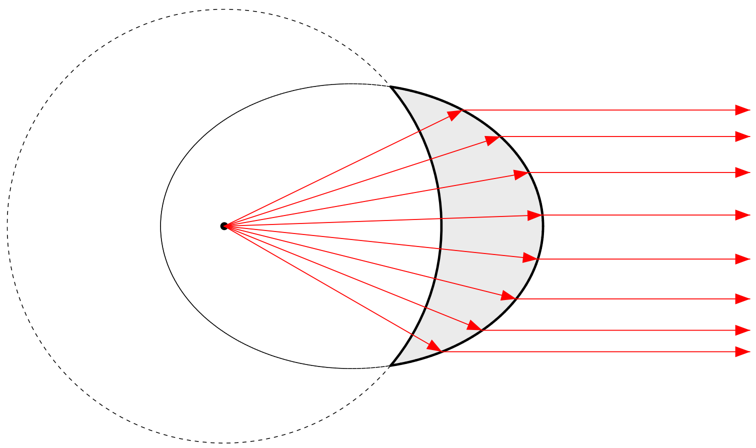
Linsenmaterial habe den Brechungsindex $\frac{1}{\varepsilon}(>1)$. Die Linse wird vom zugehörigen Rotations-Ellipsoid begrenzt und von einer Kugel mit Z als Mittelpunkt. Die Skizze zeigt den Querschnitt:



Trifft ein von Z kommender Lichtstrahl auf den Kreis um Z, wird er gar nicht gebrochen. Danach trifft er auf die Ellipse in E. Die Normale zu E ist fett. X liege irgendwo auf der Verlängerung von ZE.

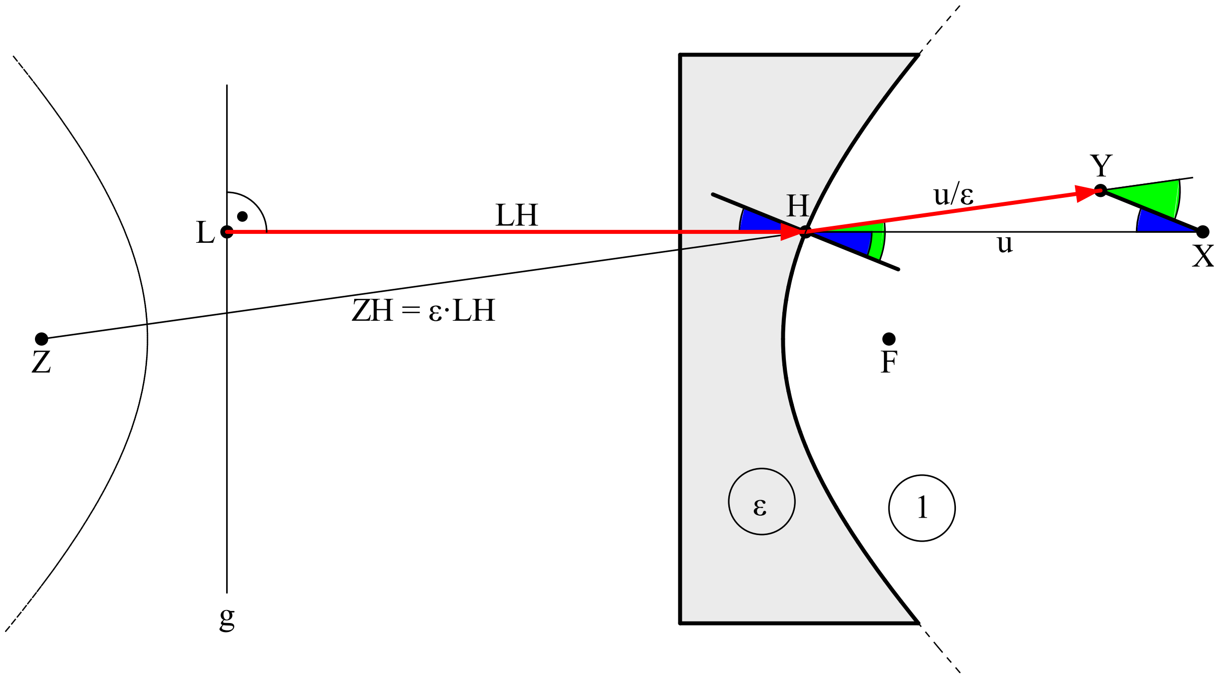
Der Einfallswinkel ist blau, der Brechungswinkel ist grün. XY sei parallel zur Ellipsen-Normalen in E, und zwar so, dass $EY = \varepsilon \cdot EX$ gilt. Wegen $\frac{\sin(\text{blau})}{\varepsilon} = \frac{\sin(\text{grün})}{1}$ im Dreieck EYX ist EY der gebrochene Strahl. Beide grauen Winkel haben die Größe grün – blau. Da die Dreiecke EYX und LZE zueinander ähnlich sind, ist EY zu h senkrecht. Somit gilt:

Bei einer sphäro-elliptischen Konvexlinse werden alle von Z ausgehenden Strahlen durch die Brechung parallelisiert.



Hyperbolische Konkavlinsen

Es gibt auch hyperbolische Konkavlinsen, hier ein Querschnitt:



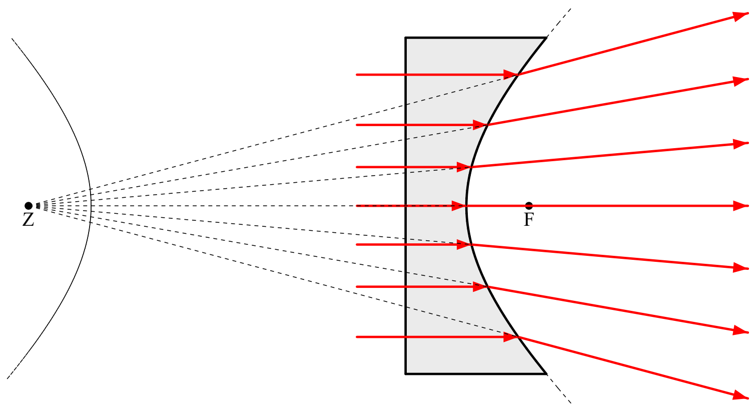
Ausgangspunkt ist eine Hyperbel mit den Brennpunkten Z und f, der Exzentrizität ε und mit der zu Z gehörigen Leitgeraden g. Das Linsenmaterial habe den Brechungsindex ε,

Für jeden Punkt H auf der Hyperbel gilt, dass der Abstand zu Z genau ε-mal so groß ist wie der Abstand zur Leitgeraden g.

Ein achsenparalleler Strahl trifft die Hyperbel in H X liegt irgendwo auf dessen Verlängerung. XY ist zur Hyperbel-Normalen in H parallel, und es sei $HY = \frac{HX}{\varepsilon}$. Ist der Einfallswinkel blau und der Brechungswinkel grün, so gilt im Dreieck HXY die Beziehung $\frac{\sin(\text{blau})}{1/\varepsilon} = \frac{\sin(\text{grün})}{1}$, also das Brechungsgesetz; mithin ist HY der gebrochene Strahl.

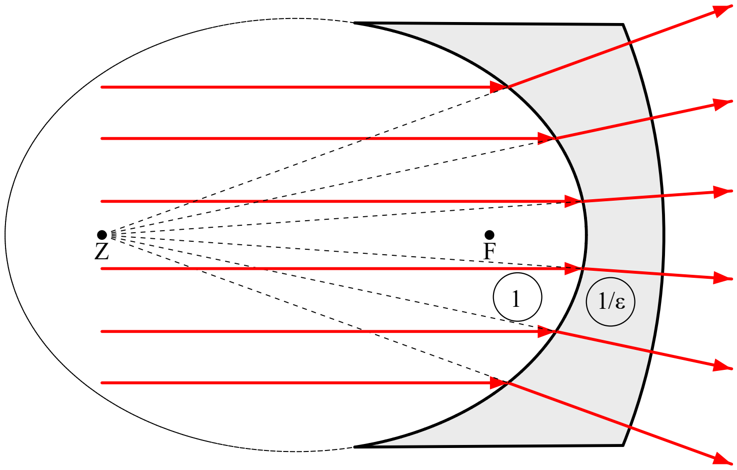
Da die Dreiecke ZHL und HXY zueinander ähnlich sind, geht die Verlängerung von HY durch Z.

Alle achsenparallelen Strahlen werden daher so gebrochen, dass sie nach der Brechung von Z zu kommen scheinen.
Damit werden parallele Lichtstrahlen divergent gemacht.



Man kann diesen Effekt auch mit einer Ellipse erreichen:

Sphäro-elliptische Konkavlinsen



Die Ellipse habe die Brennpunkte Z und F sowie die Exzentrizität ε. Das Linsenmaterial habe den Brechungsindex 1/ε.
Die Linse wird im Querschnitt links von der angegebenen Ellipse begrenzt und rechts von einem Kreis um Z.
Achsenparallele Strahlen werden so gebrochen, dass ihre rückwärtige Verlängerung durch Z geht.