Jörg MEYER, Hameln

Juni 2022

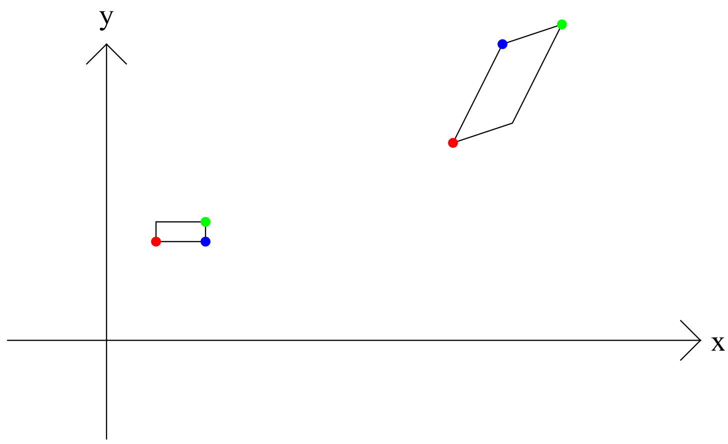
Die allgemeine Scherung

Die Scherung längs der x-Achse hat die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und die Scherung längs der y-Achse hat die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$.

Man könnte meinen, dass die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & v \\ u & 1 \end{pmatrix}$ eine allgemeine Scherung beschreibt. $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird abgebildet auf $P' = \begin{pmatrix} x + v \cdot y \\ y + u \cdot x \end{pmatrix}$. Nur der Ursprung $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Fixpunkt, was schon beweist, dass $\begin{pmatrix} 1 & v \\ u & 1 \end{pmatrix}$ keine Scherung sein kann.

Die Gerade durch O und $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ mit der Steigung m wird unter $\begin{pmatrix} 1 & v \\ u & 1 \end{pmatrix}$ abgebildet auf die Gerade durch O und $\begin{pmatrix} 1 + v \cdot m \\ m + u \end{pmatrix}$ mit der Steigung $m' = \frac{m + u}{1 + v \cdot m}$. Es handelt sich um eine Fixgerade, falls $m' = m$ ist, also für $m = \pm\sqrt{\frac{u}{v}}$.

Man sieht am nebenstehenden Beispiel, dass der Umlaufsinn nicht unbedingt erhalten bleibt und dass die Abbildung auch nicht den Charakter einer Scherung hat.

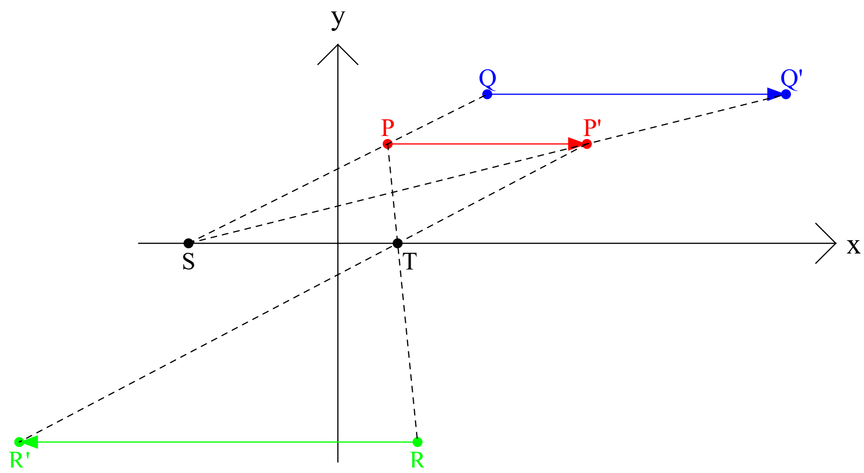


Bei der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & u \\ -u & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\varphi \\ \tan\varphi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ handelt es sich um eine Drehstreckung.

Wie schert man längs einer beliebigen Ursprungsgeraden?

Orientieren wir uns an der Scherung längs der x-Achse mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die den Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ abbildet auf $\begin{pmatrix} x+v\cdot y \\ y \end{pmatrix}$. Die Gerade mit $y=0$ ist Fixpunktgerade.

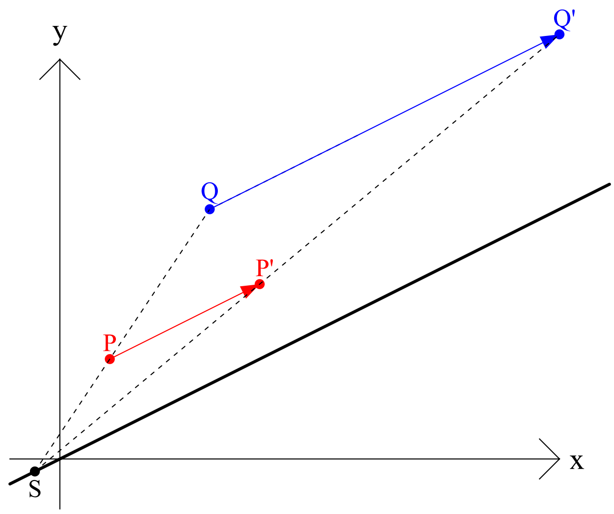
Gibt man P, P‘ und Q vor, so bekommt man Q‘ wie folgt:



PQ schneidet die Fixpunktgerade in S. Dann ist Q‘ der Schnittpunkt von SP‘ mit der Parallelen zur Fixpunktgeraden durch Q. Analog bekommt man das Bild R‘ eines anderen Punktes R. Die Orientierung bleibt erhalten.

Wir analogisieren die Vorgehensweise, indem wir die Fixpunktgerade durch die Ursprungsgerade mit $y=m\cdot x$ ersetzen.

Wieder muss man P und P‘ vorgeben, wobei PP‘ parallel sein muss zur Fixpunktgeraden.



Mit $P=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ und $v\neq m\cdot u$ sei $P'=\begin{pmatrix} u+h \\ v+m\cdot h \end{pmatrix}$.

Die Abkürzung $w=\dfrac{v-m\cdot u}{h}$ wird sich als sinnvoll erweisen.

Mit $Q=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und $y_0\neq m\cdot x_0$ hat S als Schnittpunkt von PQ mit der Fixpunktgeraden die Gestalt $S=\dfrac{u\cdot y_0-v\cdot x_0}{y_0-m\cdot x_0-h\cdot w}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Damit ist $\boxed{Q'=\dfrac{1}{w}\cdot\begin{pmatrix} x_0\cdot(w-m)+y_0 \\ y_0\cdot(w+m)-m^2\cdot x_0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{w}\cdot\begin{pmatrix} w-m & 1 \\ -m^2 & w+m \end{pmatrix}\cdot Q}$.

Alternativ hätte man bei vergleichbarem Aufwand auch erst das Koordinatensystem drehen können, dann scheren und dann zurückdrehen, hätte auf diese Weise jedoch nicht die Konstruktionsvorschrift kennengelernt.