Jörg MEYER, Hameln

Zweireihige Matrizen

… werden als Abbildungen verstanden.

Worum geht es?

Drehungen lassen sich auf Scherungen zurückführen und Scherungen auf Drehungen und Achsenstreckungen.

> (Der Begriff der Scherung wird hier eingeschränkt auf Scherungen parallel zu den (zueinander orthogonalen) Koordinatenachsen.
>
> Unter einer Achsenstreckung wird eine Kombination einer Streckung in x- Richtung mit einer in y-Richtung (mit unterschiedlichen Streckfaktoren) verstanden.)

Genauer gilt (Symbole wie σ, τ oder Δ werden weiter unten erläutert):

Jede invertierbare Matrix lässt sich zerlegen in eine Achsenstreckung, gefolgt von einer Scherung, gefolgt von einer Rotation:

$$\boxed{\begin{array}{l} M = Rot \circ Sch \circ Str \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \cdot \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cot(\sigma-\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \cdot \sin(\sigma-\tau) \end{pmatrix} \end{array}}$$

Jede invertierbare Matrix lässt sich zerlegen in eine Achsenstreckung, gefolgt von zwei Scherungen:

$$\boxed{\begin{array}{l} M = Sch_2 \circ Sch_1 \circ Str \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c \cdot d/\Delta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \end{array}}$$

Insbesondere: Jede Rotation lässt sich zerlegen in eine Achsenstreckung, gefolgt von zwei Scherungen:

$$\boxed{\begin{array}{l} Rot = Sch_2 \circ Sch_1 \circ Str \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\varphi \cdot \cos\varphi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\cos\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \end{array}}.$$

Jede Rotation lässt sich zerlegen in drei Scherungen:

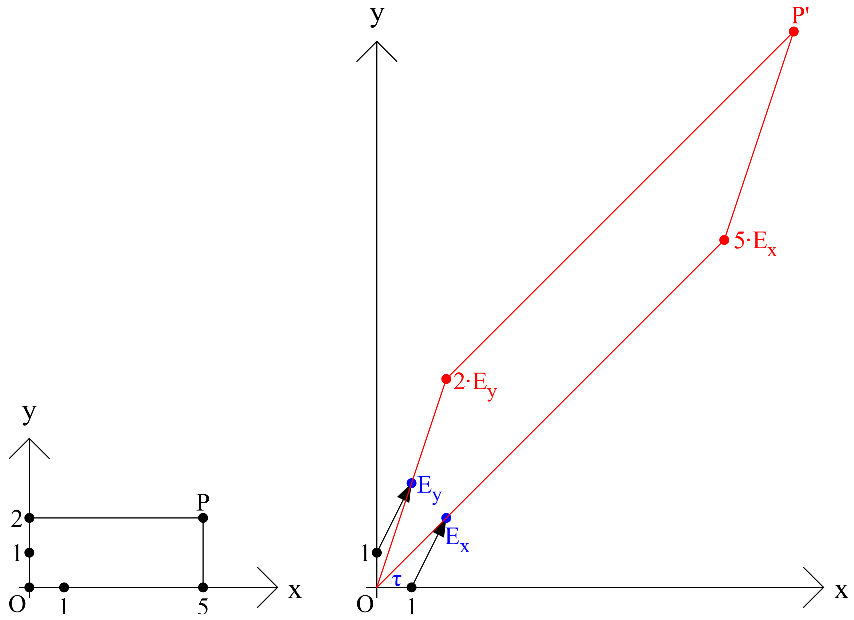
$$\boxed{\begin{array}{c} Rot = Sch_1 \circ Sch_2 \circ Sch_1 \\ \begin{pmatrix} \cos(2\cdot\varphi) & -\sin(2\cdot\varphi) \\ \sin(2\cdot\varphi) & \cos(2\cdot\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin(2\cdot\varphi) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\tan\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Jede Scherung lässt sich zerlegen in eine Drehung, gefolgt von einer Achsenstreckung, gefolgt von einer Drehung: $Sch = Rot_2 \circ Str \circ Rot_1$:

$$\boxed{\begin{array}{l} Sch = Rot_2 \circ Str \circ Rot_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot\cot(2\cdot\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tau-90°) & -\sin(\tau-90°) \\ \sin(\tau-90°) & \cos(\tau-90°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tan\tau & 0 \\ 0 & \cot\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} \end{array}}$$

Zum Bild einer zweireihigen Matrix

Der Punkt $P=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ ist eine Linearkombination mit den Basiselementen $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ mit den Koeffizienten u und v.



P wird mit der Matrix $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ abgebildet auf $P'=u\cdot\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$, ist also eine Linearkombination mit den Basiselementen $E_x=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $E_y=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ mit denselben Koeffizienten u und v (oben ist u=5 und v=2). Sind E_x und E_y linear unabhängig, ist M invertierbar.

M bewirkt also einen Basiswechsel. Man kann sich mit dieser Erkenntnis zufrieden geben und meinen, nun wüsste man alles über zweireihige Matrizen, begibt sich aber der Möglichkeit, mehrere Produktzerlegungen von M und deren geometrische Hintergründe kennenzulernen.

Wegen $E_x=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$ ist $\tan\tau=\frac{c}{a}$ und mit $|OE_x|=\sqrt{a^2+c^2}=:e$

ferner $\sin\tau=\frac{c}{e}$ und $\cos\tau=\frac{a}{e}$.

Wegen $E_y=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ ist $\tan\sigma=\frac{d}{b}$ und mit $|OE_y|=\sqrt{b^2+d^2}=:f$

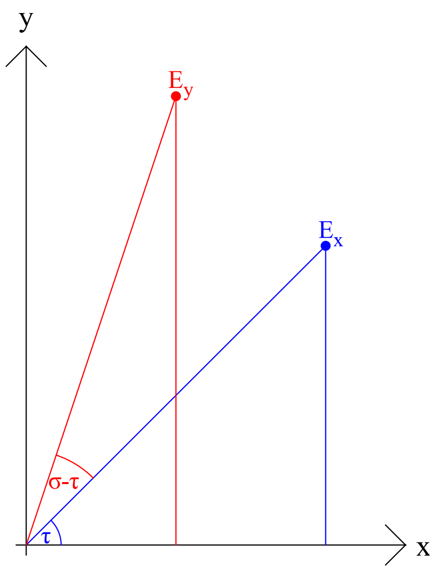
ferner $\sin\sigma=\frac{d}{f}$ und $\cos\sigma=\frac{b}{f}$.

Ferner sei

$\Delta=a\cdot d-b\cdot c=e\cdot\cos\tau\cdot f\cdot\sin\sigma-f\cdot\cos\sigma\cdot e\cdot\sin\tau=e\cdot f\cdot\sin(\sigma-\tau)$

die Determinante von M sowie

$a\cdot b+c\cdot d=e\cdot f\cdot(\cos\sigma\cdot\cos\tau+\sin\sigma\cdot\sin\tau)=e\cdot f\cdot\cos(\sigma-\tau)$.



Allgemeine Zerlegung einer invertierbaren Abbildung

Die durch M definierte Abbildung scheint mit einer Drehung um O mit dem Winkel τ zu tun zu haben.

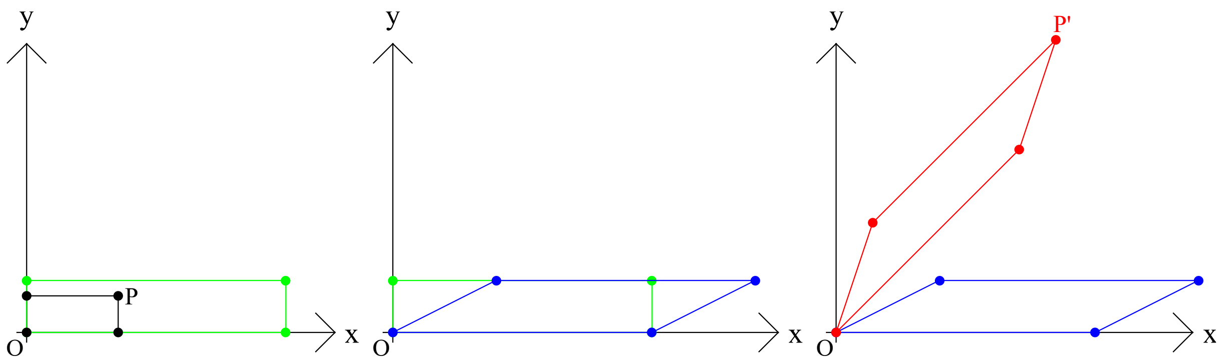
Diese Drehung mit der Matrix $\begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\cdot\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ wird durch $\begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}$

rückgängig gemacht; man bekommt daher die Matrix $\frac{1}{e}\cdot\begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\cdot\begin{pmatrix} e^2 & a\cdot b+c\cdot d \\ 0 & a\cdot d-b\cdot c \end{pmatrix}$.

Die letzte Matrix lässt sich weiter zerlegen in eine Streckung, gefolgt von einer Scherung gemäß

$\frac{1}{e}\cdot\begin{pmatrix} e^2 & a\cdot b+c\cdot d \\ 0 & a\cdot d-b\cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu\cdot t \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, was dann auf $\lambda = e$ und $\mu = \frac{\Delta}{e}$ sowie auf

$t = \frac{a\cdot b+c\cdot d}{\Delta} = \cot(\sigma-\tau)$ führt.



Das zu P gehörige schwarze Rechteck wird zum grünen gestreckt, dieses zum blauen Parallelogramm geschert und letzteres schließlich zum roten Parallelogramm gedreht.

Insgesamt hat man mit $e = \sqrt{a^2+c^2}$; $f = \sqrt{b^2+d^2}$ die Zerlegung in eine Achsenstreckung, eine Scherung und eine Drehung.

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{e}\cdot\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \cot(\sigma-\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f\cdot\sin(\sigma-\tau) \end{pmatrix}}.$$

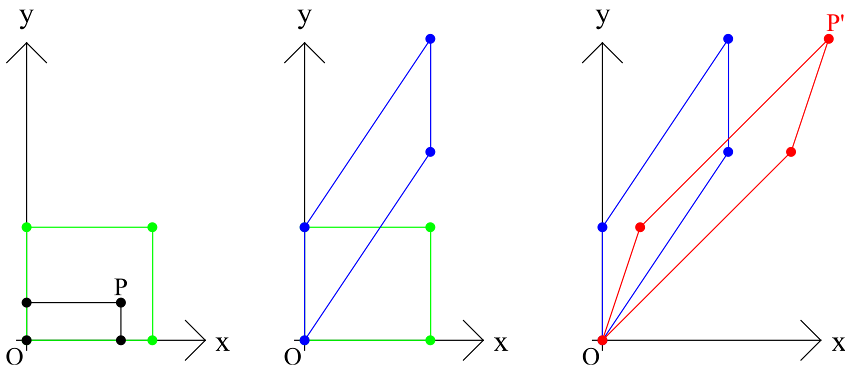
Allgemeine Zerlegung ohne Drehungen

Man kommt auch ohne Drehungen aus, denn wegen $\begin{pmatrix} 1 & -b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta/d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ und

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c\cdot d/\Delta & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \Delta/d & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ ist

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c\cdot d/\Delta & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \Delta/d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}$$

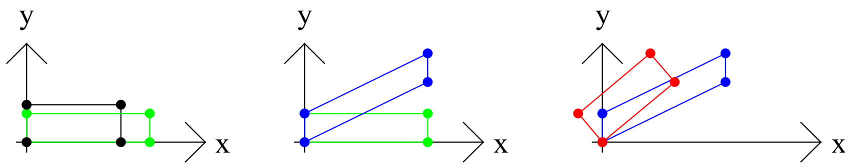
Produkt einer Streckung und zweier Scherungen.



Erste Zerlegung einer Drehung

Insbesondere ist eine Drehung darstellbar als Produkt einer Achsenstreckung und von zwei Scherungen:

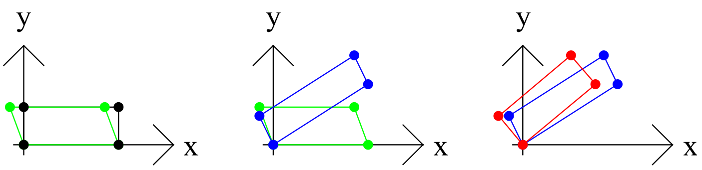
$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\varphi \cdot \cos\varphi & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\cos\varphi & 0 \\ 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}} :$$



Zweite Zerlegung einer Drehung

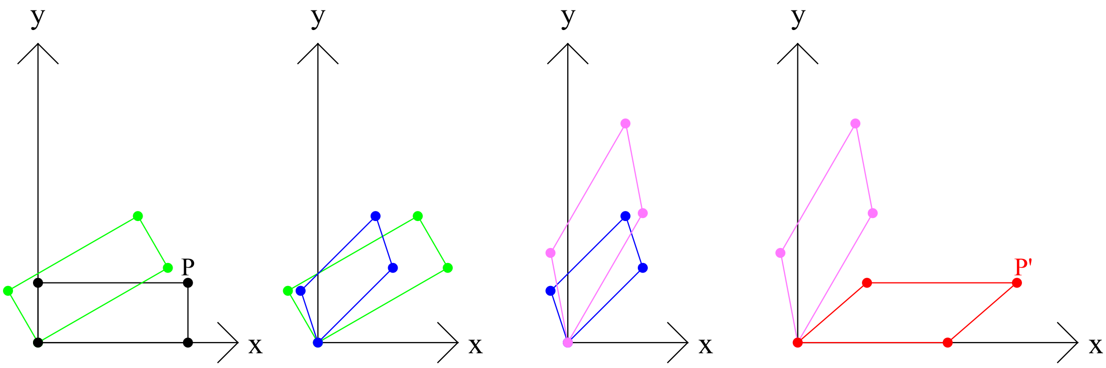
Nach einer Idee von Alan W. Paeth (1956-2018) kann man Drehungen auch durch drei Scherungen ersetzen:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \cos(2\cdot\varphi) & -\sin(2\cdot\varphi) \\ \sin(2\cdot\varphi) & \cos(2\cdot\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin(2\cdot\varphi) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\tan\varphi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} .$$



Zerlegung einer Scherung

Eine Scherung kann ersetzt werden durch eine Drehung, gefolgt von zwei Achsenstreckungen, gefolgt von einer Drehung:



Erst dreht man um den Ursprung um den Winkel τ mit der Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}$ (von rot nach grün), dann streckt man in x-Richtung um den Faktor $\tan\tau$ (von grün nach blau), dann streckt man in y-Richtung um den Faktor $\cot\tau$ (von blau nach lila), also insgesamt mit der Streckmatrix $\begin{pmatrix} \tan\tau & 0 \\ 0 & \cot\tau \end{pmatrix}$, dann dreht man um den Ursprung um den Winkel $\tau-90°$ mit der Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\tau-90°) & -\sin(\tau-90°) \\ \sin(\tau-90°) & \cos(\tau-90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90°-\tau) & \sin(90°-\tau) \\ -\sin(90°-\tau) & \cos(90°-\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\tau & \cos\tau \\ -\cos\tau & \sin\tau \end{pmatrix}.$$

Von schwarz bis lila hat man die Matrix $\begin{pmatrix} \tan\tau & 0 \\ 0 & \cot\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\tau & -\sin^2\tau/\cos\tau \\ \cos\tau & \cos^2\tau/\sin\tau \end{pmatrix}$ und insgesamt von schwarz bis rot die Scherungs-Matrix $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit

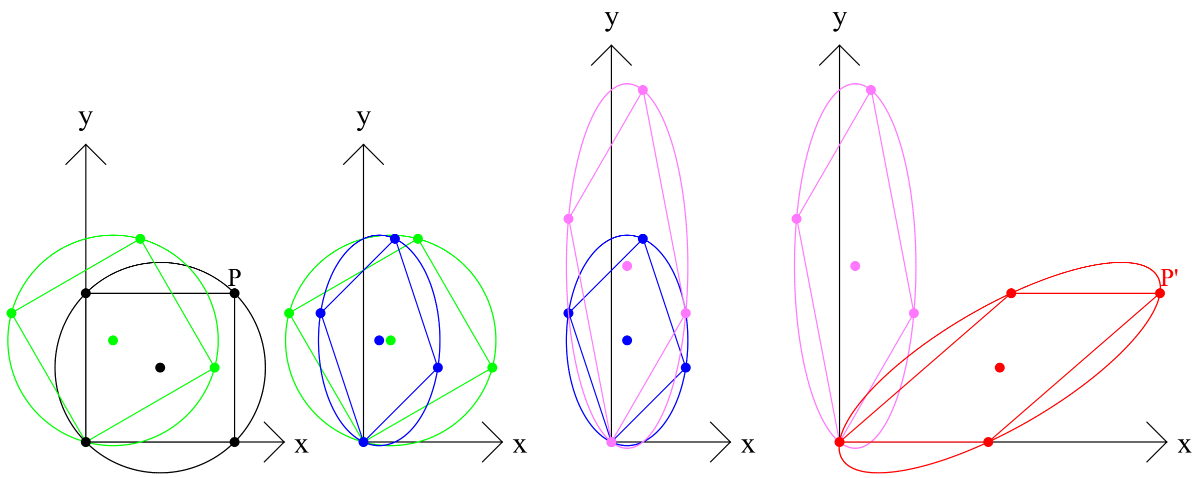
$$k = \frac{\cos^3\tau}{\sin\tau} - \frac{\sin^3\tau}{\cos\tau} = 2\cdot\frac{\cos^2\tau - \sin^2\tau}{2\cdot\sin\tau\cdot\cos\tau} = 2\cdot\frac{\cos(2\cdot\tau)}{\sin(2\cdot\tau)} = 2\cdot\cot(2\cdot\tau).$$

Damit ist

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2\cdot\cot(2\cdot\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\tau-90°) & -\sin(\tau-90°) \\ \sin(\tau-90°) & \cos(\tau-90°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tan\tau & 0 \\ 0 & \cot\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau \\ \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}}.$$

Insbesondere gilt:

Gescherte Kreise sind Ellipsen



Das schwarze Ausgangsquadrat mit Umkreis und schwarzem Umkreismittelpunkt wird um den Koordinatenursprung gedreht und ergibt die grüne Figur.

Das grüne Quadrat mit Umkreis und grünem Umkreismittelpunkt wird in x-Richtung gestreckt und ergibt das violette Parallelogramm und dessen Umellipse.

Das violette Parallelogramm mit Umellipse und deren Mittelpunkt wird in y-Richtung gestreckt und ergibt die blaue Figur.

Das blaue Parallelogramm mit Umellipse und deren Mittelpunkt wird um den Ursprung gedreht und ergibt die rote Figur, dessen Parallelogramm aus dem schwarzen Quadrat durch Scherung hervorgeht.

Man kann das schwarze Quadrat auch mittig zum Koordinatensystem anordnen: