Jörg MEYER, Hameln 30. 5. 2024

Zur Ungleichung von arithmetischem und geometrischem Mittel

Behauptung: Für nichtnegative a, b ist $\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}}$.

Man setze $a = A^2$, $b = B^2$; dann hat man die Äquivalenzkette

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$
$$A^2 + B^2 \geq 2 \cdot A \cdot B$$
$$(A - B)^2 \geq 0$$

Behauptung: Für nichtnegative a, b, c ist $\boxed{\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}}$.

Man setze $a = A^3$ usw., wegen $(A+B+C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3 \cdot (A+B) \cdot (B+C) \cdot (C+A)$ hat man dann die Äquivalenzkette

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$
$$A^3 + B^3 + C^3 \geq 3 \cdot A \cdot B \cdot C$$
$$(A+B+C)^3 \geq 3 \cdot A \cdot B \cdot C + 3 \cdot (A+B) \cdot (B+C) \cdot (C+A)$$
$$(A+B+C)^3 \geq 3 \cdot (A+B+C) \cdot [A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A]$$
$$(A+B+C)^2 \geq 3 \cdot (A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A)$$
$$A^2 + B^2 + C^2 \geq A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$
$$\frac{A^2 + B^2}{2} + \frac{B^2 + C^2}{2} + \frac{C^2 + A^2}{2} \geq A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

Die letzte Aussage ist wahr wegen der allerersten Behauptung.

Behauptung: Für nichtnegative a, b, c, d ist $\boxed{\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d}}$.

Wegen $\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a \cdot b} + \sqrt{c \cdot d}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt{c \cdot d}} = \sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d}$ ist die Behauptung korrekt.

Mit $d := \frac{a+b+c}{3}$ folgt auch

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot \frac{a+b+c}{3}}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[4]{a\cdot b\cdot c}\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{1/4}$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{3/4} \geq \left(a\cdot b\cdot c\right)^{1/4}$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \left(a\cdot b\cdot c\right)^{1/3}$$

Generell gilt: Aus $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}}$ folgt $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$,

denn für $a_{n+1} := \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ hat man

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\right)^{1/(n+1)}\cdot\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{1/(n+1)}$$

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n/(n+1)} \geq \left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\right)^{1/(n+1)}$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\right)^{1/n}$$

Für eine andere Zugangsweise sei auf http://mathematik-meyer.de/Materialien/AGM.pdf verwiesen.