Zum Mathematikunterricht[1]

Die Frage, warum die Gesellschaft ein Interesse daran hat (oder daran haben sollte), die Schüler am Mathematikunterricht teilnehmen zu lassen, ist bei näherem Hinsehen zunächst gar nicht so einfach zu beantworten. Natürlich kann man sich auf die Tradition berufen: Was man schon immer so gemacht hat, wird wohl sinnvoll und richtig sein. Ein weiteres „Argument", das vielleicht als skurril erscheinen mag, aber dennoch seinen wahren Kern hat, bezieht sich auf die Mathematik als Selektionsfach: Noch heute filtern Ingenieure und Wirtschaftswissenschaftler ihre ungeeigneten Studenten mit Hilfe von Mathematikprüfungen heraus, und in kleinerem Maßstab geschieht das ja auch in der Schule. Aber warum gerade mit Hilfe der Mathematik? Daß sie als „schwierig" gilt, kann nicht der Grund sein (man könnte sich schwierige Mindestanforderungen im Stabhochsprung ausdenken; trotzdem sähen selbst die Sportler dies nicht als eine angemessene Lebensvorbereitung an). Dann hört man, der Mathematikunterricht fördere das „logische" Denken (was man auch dem Lateinunterricht nachsagt) oder das „Abstraktionsvermögen"; Schüler mit guten Mathematikzensuren hätten eine hohe „Frustrationstoleranz" (d.h. sie können es aushalten, wenn ein Problem nicht gleich zu einer Lösung führt) und seien daher hartnäckig im Verfolgen von Zielen. Die Mathematiklehrer führen natürlich als Grund an, daß die Mathematik derartig schön sei, daß man sie schon deshalb den Schülern beibringen müsse (auch der Musik- oder der Kunstunterricht will ja die Schüler für Schönheit empfänglich machen); nun ist dies Argument aber für die Liebhaber des Faches so selbstverständlich und für die Nichtliebhaber so unverständlich, daß ich mich im folgenden damit nicht befassen werde.

Lassen wir also die Schönheit beiseite und konzentrieren wir uns auf die Nützlichkeit. Immerhin braucht man Mathematik; Musik braucht man nicht. Daß das für mathematiknahe Berufe gilt, wird jeder einsehen; für andere Berufe will ich kurz Beispiele angeben:

Ich beginne mit Juristen. Sie müssen einen konkreten Fall nach abstrakten Kriterien beurteilen (darum geht meistens der Streit: Ist es noch dieser Tatbestand oder schon jener?) und dabei Definitionen anwenden, sie müssen fiktiv fragen können: „Was wäre, wenn ... ?" und somit hieb- und stichfeste Folgerungen ziehen und verteidigen können. Sie müssen auch Theorien bilden können; denken wir zum Beispiel an Erbauseinandersetzungen. Beispiel:

Anton und Berta sind zwei Geschwister und erben zusammen ein Haus. Anton hat in seinem Leben finanzielles Pech gehabt, zudem wurde ihm gerade seine Mietwohnung gekündigt. Da er zudem in der Nähe des geerbten Hauses wohnt, könnte er dort gut einziehen. Berta hingegen bewohnt weit entfernt ein fast bezahltes Eigenheim; sie würde das geerbte Objekt verkaufen wollen.

Ein gängiges Verfahren besteht darin, das geerbte Haus schätzen zu lassen. Wenn Anton das Haus bekommt, muß er an seine Schwester als Ausgleich die Hälfte des Schätzpreises bezahlen.

In Anbetracht der Situation ist das folgende Verfahren vielleicht gerechter: Beide lassen das Haus nicht von einer dritten Person schätzen, sondern beide bestimmen subjektiv den Wert. Dem Anton ist das Haus a = DM 600.000 wert; er gibt einen verschlossen Umschlag mit der Zahl a bei einem Notar ab. Der Berta ist das Haus dagegen nur b = DM 400.000 wert; sie gibt einen verschlossenen Umschlag mit der Zahl b bei dem Notar ab. Da Anton den höheren Preis genannt hat, bekommt er das Haus zugesprochen. Die Ausgleichszahlung gestaltet sich aber jetzt anders: Anton zahlt an seine Schwester

$$\frac{b}{2}+\frac{a-b}{4}=\frac{400.000}{2}+\frac{600.000-400.000}{4}=250.000$$

Das hat folgende Vorteile: Der Berta ist das Haus DM 400.000 wert; sie bekommt als Ausgleichszahlung mehr als die Hälfte davon und ist daher sehr zufrieden.

Dem Anton ist das Haus DM 600.000 wert; er muß weniger als die Hälfte davon an seine Schwester bezahlen und ist daher auch sehr zufrieden.

Nun muß der Jurist beurteilen, ob dies Verfahren wirklich besser ist als das gängige. Kann vielleicht eines der Geschwister eine Strategie entwickeln, die Vorteile bringt? Gibt es negative Konsequenzen, die man auf den ersten Blick nicht vermuten würde?

Lernen Juristen solche Überlegungen nicht auch im Mathematikunterricht? (Übrigens waren die großen Mathematiker Fermat und Cayley im Hauptberuf Juristen; vermutlich gibt es noch mehr Beispiele dafür.) Sicherlich brauchen Juristen (meines Wissens) keine Ableitung ausrechnen zu können, aber ist nicht eine sinnvoll durchgeführte Kurvendiskussion für die Entwicklung logisch-abstrakten Denkens förderlich? Die Fragezeichen sind nicht ganz von der Hand zu weisen. Natürlich ist es nicht so, daß aus einem guten Mathematikschüler später ein guter Jurist werden wird, und gute Juristen müssen keine guten Mathematikschüler gewesen sein. So eng darf man den Zusammenhang nicht interpretieren. Aber auch ein nicht so guter Mathematikschüler wird im Unterricht Verfügungswissen erworben haben, das ihm hilft, Erbprobleme zu behandeln: Vollständige Fallunterscheidung, Erkennen des Allgemeinen im Besonderen, elementares Hantieren

[1] Erschien in der Festschrift des Albert - Einstein - Gymnasiums Hameln 1997, S. 66 - 68.

mit abstrakten Symbolen oder operativer Umgang mit Nichtwissen (Anton weiß nicht, wie groß Bertas Wertschätzung des Hauses ist, aber er kann in jedem Fall mit dem Teilungsverfahren zufrieden sein) .

Ein nächstes Beispiel betrifft die Politologen.
Betrachten wir den Fall, daß auf einem Kurstreffen Getränke angeboten werden sollen, aber, um Kosten zu sparen, nur eine Sorte. Alle 15 Schüler sollen einen Erstwunsch und einen Zweitwunsch angeben. Das Ergebnis ist:

	6	5	4
Erstwunsch	Saft	Bier	Cola
Zweitwunsch	Cola	Cola	Bier
Nicht gewünscht	Bier	Saft	Saft

Die Mehrheit hat sich also für Saft entschieden, und nur die kleinste Minderheit will Cola. Ein Schüler wird in einen Getränkemarkt geschickt. Aus unverständlichen Gründen gibt es dort keinen Saft mehr. Da es kurz vor Geschäftsschluß ist, kauft der Schüler Bier (dies war der zweite Sieger bei der Mehrheitsentscheidung), um dann bei dem Kurstreffen abends zu erlahren, daß unter diesen Umständen die Mehrheit lieber Cola gehabt hätte.
Dies ist keineswegs eine realitätsferne Spielerei! Unvermutete paradoxe Effekte bei Wahlen gibt es in Hülle und Fülle, und Aufgabe von Politologen ist es, Wahlverfahren zu beurteilen und solche auszuwählen, bei denen es solche Paradoxien möglichst nicht gibt. {Man kann übrigens beweisen, daß jedes Verfahren irgendwelche Defekte hat.)
Wahlverfahren haben mit der Konkretisierung vor „besser als“ zu tun. Daß dies reichhaltige Probleme liefert, zeigt schon die Frage, welcher der beider Schülerinnen Amelie und Barbara besser ist: Die Noten der Mathematikarbeiten im ersten Halbjahr warer

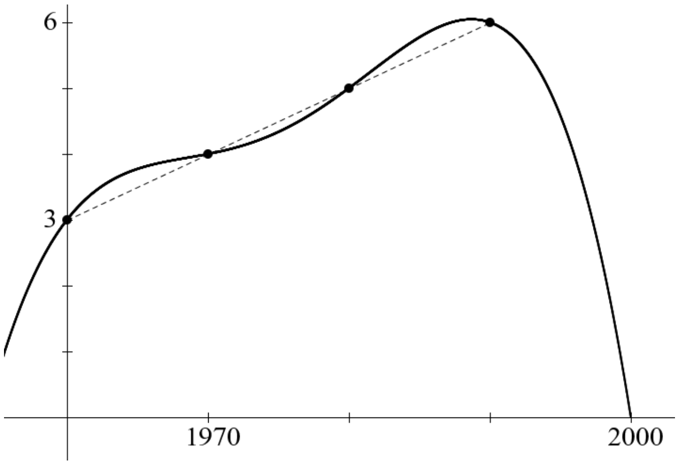
Amelie:	3	6	2	(Durchschnitt: 3, 7)
Barbara:	4	3	3	(Durchschnitt: 3,3)

Barbara hat den besseren Durchschnitt, aber: Meistens hat Amelie die bessere Arbeit geschrieben! Wenn es der Mathematikunterricht schafft, daß auch nicht so gute Schüler mitbekommen, daß „besser als“ nichts Absolutes darstellt, sondern sehr vielfältig konkretisiert werden kann, so hat er ein Element von Allgemeinbildung vermittelt. Denn wo kann Allgemeinbildung auf der Schule anders vermittelt werden, wenn nicht im Fachunterricht?

Ein weiteres Beispiel betrifft den allgemeinen Zeitungsleser. Er liest eine Pressemitteilung des Verbandes zur Förderung von roter Grütze, daß der Verbrauch {in irgendeiner sinnvollen Einheit) in den letzten Jahren folgendermaßen angestiegen sei:

Jahr	Verbrauch
1960	3
1970	4
1980	5
1990	6

Da ist doch jedem klar, wie es weitergeht: Im Jahr 2000 wird der Grützeverbrauch bei 7 liegen. Aber: Das ist überhaupt nicht klar! Solange man keine kausale Theorie über den Grützeverbrauch hat, sondern allein die obigen 4 Daten, kann es beliebig weitergehen! Man kann aus der Tatsache, daß alle 4 Meßpunkte auf einer Geraden liegen, überhaupt nicht schließen, daß auch der 5. Punkt auf derselben Gerade liegt, denn die 4 Meßpunkte liegen auch auf anderen Kurven:



Mithin ist - ohne Theorie - die „wissenschaftlich begründete“ Aussage, im Jahre 2000 liege der Grützeverbrauch bei 7, reine Kaffeesatzleserei, ebenso natürlich, der Verbrauch liege bei 0. Wie sagte schon der Physiker Niels Bohr: Prediction is difficult, especially prediction of the future.

Auch dies ist eine allgemeinbildende Funktion des Mathematikunterrichts: Wissen, daß Prognosen nur sinnvoll sein können, wenn alle Begleitumstände so bleiben (was ja niemals der Fall ist). Daher muß in jedem Fall der Wert einer Prognose abgeschätzt und neu beurteilt werden.

In der Hannoverschen Allgemeinen Zeitung vom 8. Februar 1997 konnte man auf Seite 3 im Zusammenhang mit einem Gutachten zur Verwaltungsreform lesen: „Vor allem verärgerte ihn (gemeint ist der Niedersächsische Ministerpräsident Schröder) eine theoretische Annahme, die das brisante Problem der Verschuldung verdeutlichen sollte: Wenn die Neuverschuldung jährlich 2,3 Milliarden Mark betrüge, was gemessen im Vergleich der vergangenen Jahre noch wenig wäre, dann hätte das Land in 20 Jahren doppelt so viel Schulden angehäuft wie heute, nämlich 120 Milliarden Mark - das ist dreimal so viel wie der Umfang des Landeshaushalts. Statt knapp 4 Milliarden müsse man dann 8 Milliarden Mark für Zinsen berappen. (...) Eine derart drastische Schilderung muß Schröder in Rage gebracht haben (...) Den plötzlichen Wutausbruch des Regierungschefs müssen die Mitautoren des Gutachtens als Anweisung verstanden haben, die düsteren Prognosen zur Finanzlage bitteschön nicht in den Text aufzunehmen.“ Wieso Wutausbruch? Diese einfache Zinsaufgabe aus Klasse 7 sollte erkennen helfen, was passiert, wenn man so weitermacht wie bisher. Hier sieht man, wie die Mathematik als gut geeignetes Prognose-Instrument zur Vorwarnung dient. Daß man die Folgerungen nicht wahrhaben will, ist eine andere Sache ...

Zur Rechnung (alle Angaben im Text): Schulden jetzt 60 Milliarden, Zinsen jetzt 4 Milliarden, Zinssatz also $6\frac{2}{3}$ Prozent. Dann berechnet man leicht folgende Tabelle (alle Geldangaben in Milliarden(!) Mark):

Jahr	Schulden am 1.1.	Zinsen	Neuverschuldung
1997	60	4,00	2,3
1998	66,30	4,42	2,3
1999	73,02	4,87	2,3
2000	80,19	5,35	2,3
2001	87,83	5,86	2,3
2002	95,99	6,40	2,3
2003	104,69	6,98	2,3
2004	113,97	7,60	2,3
2005	123,87	8,26	2,3

Die Zeitung hat sich also geirrt: Wenn alle Angaben im Text stimmen, ist es noch viel schlimmer! Wo liegt der Fehler?

Diese Beispiele sollten verdeutlichen, inwiefern auch mathematikferne Berufe mathematiknahe Überlegungen anstellen. „Mathematiknah“ heißt in diesem Fall nicht, daß konkrete Inhalte wie z. B. der Sinussatz verwendet würden. Vielmehr geht es darum, allgemeinere Vorgehensweisen aus dem Mathematikunterricht in andere Sachverhalte zu transferieren sowie ihre Angemessenheit zu beurteilen; es geht also weniger um Verfügungswissen, sondern um Orientierungswissen. Daß man im Mathematikunterricht andererseits Verfügungswissen braucht, um Orientierungswissen lehren zu können (wie man auch Stricken nur lernen kann, wenn Wolle da ist), macht eine der Schwierigkeiten dieses Faches aus.