

Jörg MEYER, Hameln

20. 3. 2022

Zum Schnitt der Tetraeder-Höhen

Das Tetraeder ABCD braucht nicht regelmäßig zu sein.

Wenn sich die Höhen durch A und durch B schneiden, dann hat der Schnittpunkt H einerseits die Darstellung $H = A + \lambda \cdot ((B-D) \times (D-C))$ und andererseits die Darstellung $H = B + \mu \cdot ((A-D) \times (D-C))$.

Dann ist $H - A \perp D - C$ und $H - B \perp D - C$, also $(H - A) - (H - B) = \boxed{B - A \perp D - C}$.

Nun sei umgekehrt $(B - A) \cdot (D - C) = 0$. Die Höhe durch A liegt in den Ebenen mit $(X - A) \cdot (B - D) = 0$ und $(X - A) \cdot (D - C) = 0$, und die Höhe durch B liegt in den Ebenen mit $(X - B) \cdot (A - D) = 0$ und $(X - B) \cdot (D - C) = 0$.

Wegen $B \cdot (D - C) = A \cdot (D - C)$ liegen beide Höhen in der Ebene mit $X \cdot (D - C) = A \cdot (D - C) = B \cdot (D - C)$. Da die Höhen nicht zueinander parallel sind, müssen sie sich schneiden.

Somit gilt: Die Höhen durch A und durch B schneiden einander genau dann, wenn AB zur Gegenkante CD senkrecht steht.