

Die binomische Formel für negative ganzzahlige Exponenten

Binomialkoeffizienten lassen sich auch mit negativem ganzzahligen oberem Argument gemäß

$$\binom{-n}{k} = \frac{(-n) \cdot (-n-1) \cdot \dots \cdot (-n-(k-1))}{k!} = (-1)^k \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot \dots \cdot (n+k-1)}{k!} = (-1)^k \cdot \binom{n-1+k}{k}$$

für $n \in \mathbb{N}$ bilden. Dann ist aufgrund der (für $|q| < 1$ konvergenten) TAYLOR-Entwicklung

$$(-q+1)^{-n} = \sum_{k \geq 0} \binom{-n}{k} \cdot (q)^k = \sum_{k \geq 0} \binom{n-1+k}{k} \cdot q^k.$$

Dies kann man auch ohne TAYLOR wie folgt einsehen: Leitet man die Summenformel der geometrischen Reihe mehrmals ab und ist $n \in \mathbb{N}$, ergibt sich

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k \geq 0} q^k; \quad \frac{dS}{dq} = \sum_{k \geq 1} k \cdot q^{k-1}; \quad \frac{d^2 S}{dq^2} = \sum_{k \geq 2} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} = 2! \cdot \sum_{k \geq 2} \binom{k}{2} \cdot q^{k-2}; \\ \frac{d^3 S}{dq^3} &= \sum_{k \geq 3} k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot q^{k-3} = 3! \cdot \sum_{k \geq 3} \binom{k}{3} \cdot q^{k-3} \\ &\dots \\ \frac{d^n S}{dq^n} &= n! \cdot \sum_{k \geq n} \binom{k}{n} \cdot q^{k-n} = n! \cdot \sum_{t \geq 0} \binom{n+t}{n} \cdot q^t \end{aligned}$$

Andererseits hat man

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{1-q}; \quad \frac{dL}{dq} = \frac{1}{(1-q)^2}; \quad \frac{d^2 L}{dq^2} = \frac{2}{(1-q)^3}; \quad \frac{d^3 L}{dq^3} = \frac{2 \cdot 3}{(1-q)^4} \\ &\dots \\ \frac{d^n L}{dq^n} &= \frac{n!}{(1-q)^{n+1}} \end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(1-q)^{n+1}} &= n! \cdot \sum_{t \geq 0} \binom{n+t}{n} \cdot q^t \\ \frac{1}{(1-q)^{n+1}} &= \sum_{t \geq 0} \binom{n+t}{n} \cdot q^t \end{aligned}$$

bzw.

$$\boxed{\frac{1}{(1-q)^n} = \sum_{t \geq 0} \binom{n-1+t}{n} \cdot q^t.}$$

Insbesondere ist wegen

$$\frac{1}{(1-q)^{n+1}} = \sum_{t \geq 0} \binom{-n-1}{t} \cdot (-q)^t = \sum_{t \geq 0} \binom{n+t}{t} \cdot q^t = \sum_{t \geq 0} \binom{n+t}{n} \cdot q^t$$

auch

$$\frac{q^n}{(1-q)^{n+1}} = \sum_{t \geq 0} \binom{n+t}{n} \cdot q^{n+t} = \boxed{\sum_{s \geq n} \binom{s}{n} \cdot q^s = \frac{q^n}{(1-q)^{n+1}}}.$$

Für $q = \frac{1}{2}$ hat die rechte Seite stets den Wert 2 für alle n .

Für $n=0$ hat man die geometrische Reihe $\sum_{s \geq 0} q^s = \frac{1}{1-q}$.

Für $n=1$ bekommt man $\sum_{s \geq 0} s \cdot q^s = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Mit der Indexverschiebung $s = n+t$ hat man $\boxed{\sum_{t \geq 0} \binom{n+t}{n} \cdot q^t = \frac{1}{(1-q)^{n+1}}}$.