Jörg MEYER, Hameln 10. 1. 2015

Potenzsummen anders

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt auch für endliche Summen:

Mit $f(k)=F(k+1)-F(k)$ ist $\sum\limits_{k=a}^{b} f(k)=\sum\limits_{k=a}^{b} \left(F(k+1)-F(k)\right)=F(b+1)-F(a)$.

Potenzsummen

Zu $f(k)=k$ gehört $F(k)=\binom{k}{2}$, also $\sum\limits_{k=1}^{b} k=F(b+1)-F(1)=\boxed{\binom{b+1}{2}=\sum\limits_{k=1}^{b} k}$.

Zu $f(k)=\binom{k}{2}$ gehört $F(k)=\binom{k}{3}$, also $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{b}\binom{k}{2}=\binom{b+1}{3}}$.

Wegen $k^2=2\cdot\binom{k}{2}+1\cdot\binom{k}{1}$ ist

$$\sum_{k=1}^{b} k^2=2\cdot\sum_{k=1}^{b}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{b} k=2\cdot\binom{b+1}{3}+\binom{b+1}{2}=\boxed{\frac{b\cdot(b+1)\cdot(2\cdot b+1)}{6}=\sum_{k=1}^{b} k^2}.$$

Zu $f(k)=\binom{k}{3}$ gehört $F(k)=\binom{k}{4}$, also $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{b}\binom{k}{3}=\binom{b+1}{4}}$.

Wegen $k^3=6\cdot\binom{k}{3}+6\cdot\binom{k}{2}+\binom{k}{1}$ ist

$$\sum_{k=1}^{b} k^3=6\cdot\sum_{k=1}^{b}\binom{k}{3}+6\cdot\sum_{k=1}^{b}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{b} k=6\cdot\binom{b+1}{4}+6\cdot\binom{b+1}{3}+\binom{b+1}{1}=\boxed{\frac{b^2\cdot(b+1)^2}{4}=\sum_{k=1}^{b} k^3}.$$

Und so weiter.