Jörg Meyer, Hameln

Der „Quaderecken-Pythagoras"

Der Satz des Pythagoras handelt von Strecken und einem rechten Winkel. Im Dreidimensionalen wird das Analogon von (Dreiecks-)Flächen und einem Raumwinkel handeln, den man in einer Quaderecke findet.

Dorthin kann man den Ursprung O eines Koordinatensystems legen, so dass das im Raum liegende Dreieck die Ecken $U=\begin{pmatrix}u\\0\\0\end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix}0\\v\\0\end{pmatrix}, W=\begin{pmatrix}0\\0\\w\end{pmatrix}$ hat.

Der Flächeninhalt Δ_{UVW} von UVW berechnet sich mit dem Kreuzprodukt

$$(V-U)\times(W-U)=\begin{pmatrix}-u\\v\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-u\\0\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v\cdot w\\w\cdot u\\u\cdot v\end{pmatrix} \text{ zu } 4\cdot\Delta_{UVW}^2=u^2\cdot v^2+v^2\cdot w^2+w^2\cdot u^2\,.$$

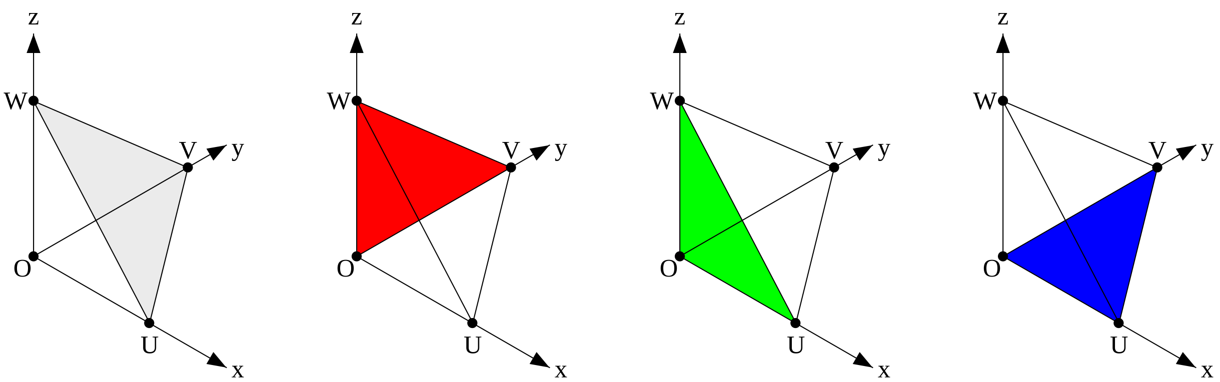
Die Summenden sind wieder Quadrate von doppelten Dreiecksflächen, es gilt nämlich

$$u^2\cdot v^2=4\cdot\Delta_{OUV}^2,\; v^2\cdot w^2=4\cdot\Delta_{OVW}^2,\; w^2\cdot u^2=4\cdot\Delta_{OWU}^2,$$

so dass insgesamt

$$\boxed{\Delta_{UVW}^2=\Delta_{OUV}^2+\Delta_{OVW}^2+\Delta_{OWU}^2}$$

gilt.



Wie ist es, wenn man bei O keine Quaderecke hat, wenn also OU, OV und OW nicht paarweise aufeinander senkrecht stehen? Dann kann der Quaderecken-Pythagoras trotzdem gelten, wie Walser 2019 ausführt.

Literatur:

Ehrenborg, Richard 1984: Heron's Formula from a Pythagoras-Type Theorem. In: The Mathematical Gazette 68, S. 124 – 126.

Walser, Hans 2019: Satz des Pythagoras im Raum. In: mathematik lehren 216, S. 44-46.