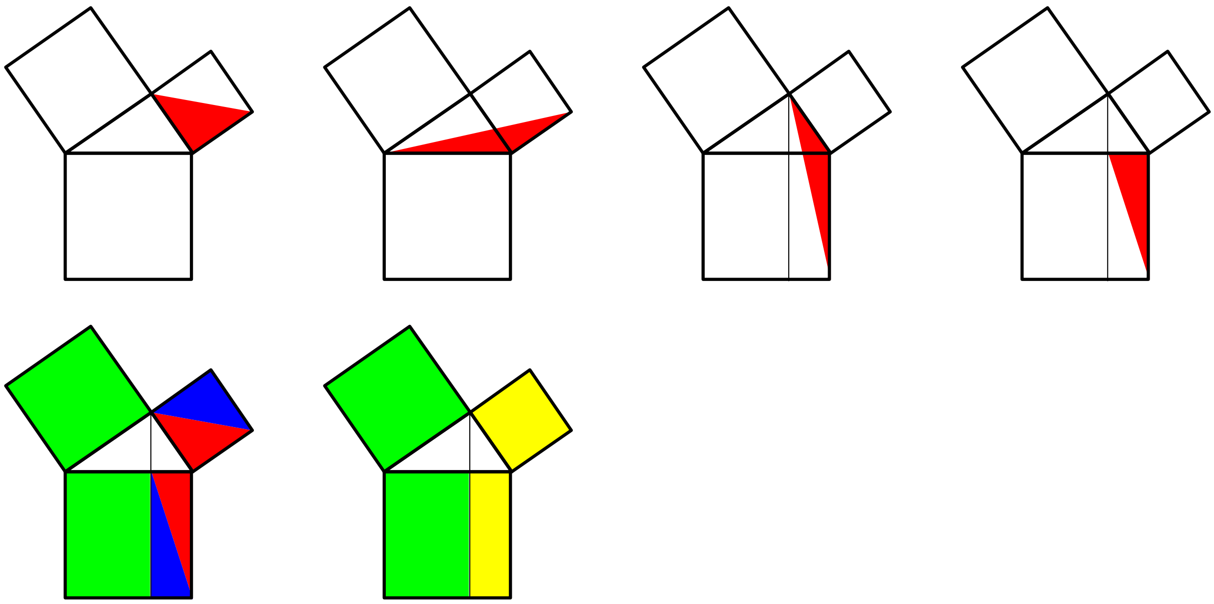
Zum Satz des Pythagoras

Beweis Nr. 1

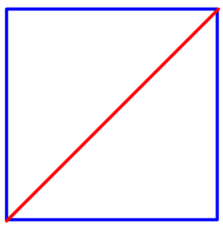
Einfacher und übersichtlicher als der Euklidische Beweis[1] ist der folgende[2], der nur die Bekanntschaft mit dem Flächeninhalt eines Dreiecks voraussetzt:



Gleichwohl bleibt bei Schülerinnen und Schülern die Frage „Ja, und?“. Bis zur Verwendung dieser Flächenaussage zur Abstandsberechnung ist noch ein gewisser Weg zurückzulegen. Anders formuliert: Der Spannungsbogen von der (kaum zu motivierenden) Betrachtung obiger Figuren bis zum Abstand zweier Punkte wird recht lang.
Daher kann man sich bemühen, gleich mit der Abstandsgewinnung zu beginnen.

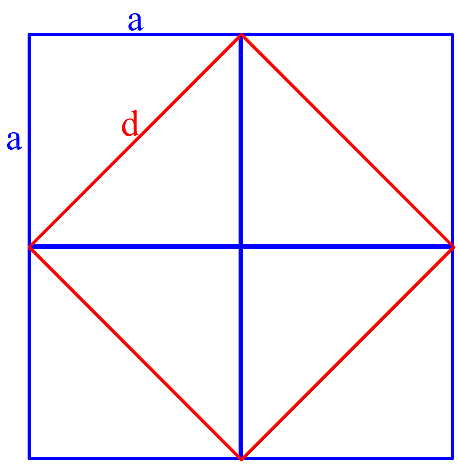
Beweis Nr. 2

Ausgangsfrage: Wie lang ist die Diagonale eines Rechtecks?
Heuristische Strategie: Mit dem Einfachsten beginnen, also mit dem Quadrat.

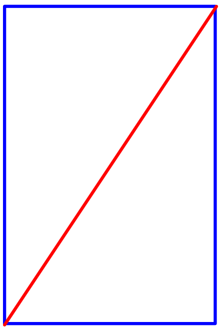


Weitere heuristische Strategie: Symmetrien ausnutzen!
Aber: Die Figur hat keine fruchtbaren Symmetrien.
Also: Die Figur „symmetrisch machen“:

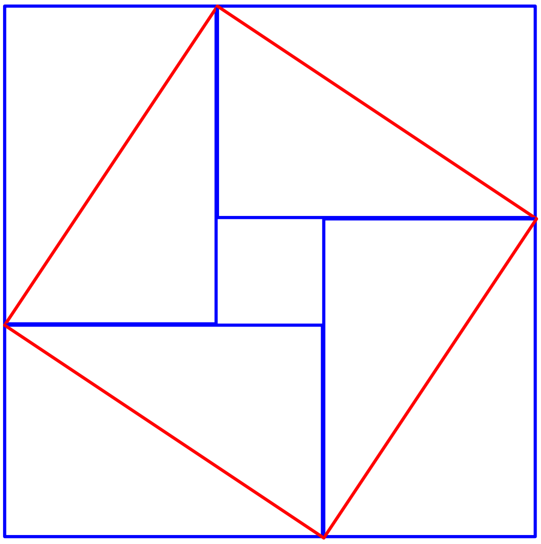
[1] Euklid, Elemente, Buch I.
[2] J. Stillwell, The Four Pillars of Geometry, 2005: Springer; S. 33.



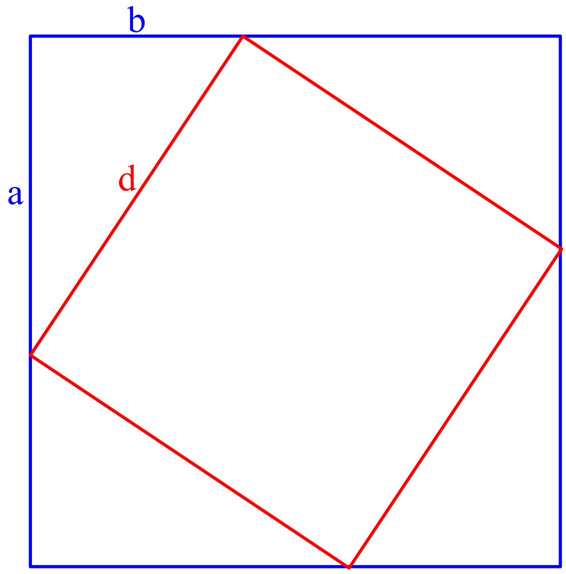
Nun ist $(2 \cdot a)^2 = 2 \cdot d^2$, also $d = a \cdot \sqrt{2}$.
Geht das auch beim Rechteck?



Hier ist die Ausgangsfigur sogar noch unsymmetrischer als beim Quadrat.
Aber: Derselbe Trick hilft trotzdem weiter:

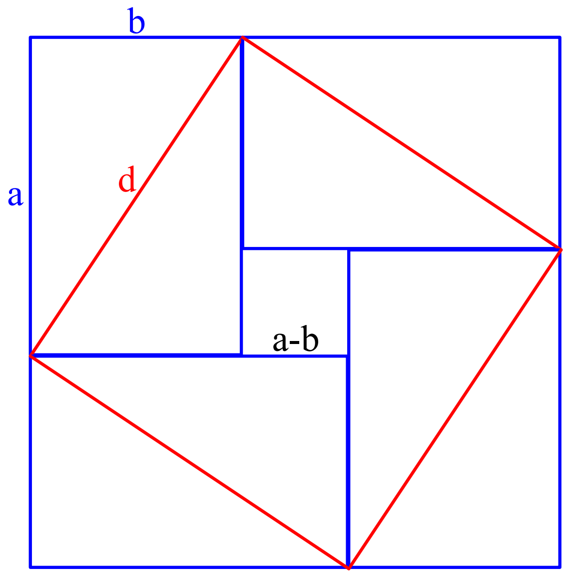


Diese Figur hat sogar <u>zweierlei</u> Struktur:



Der Flächeninhalt des blauen Quadrats ist einerseits $(a+b)^2$ und andererseits $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + d^2$, woraus man d berechnen kann.

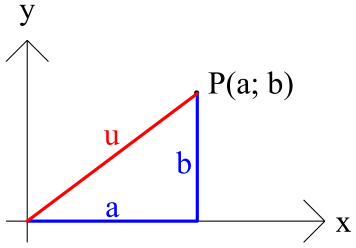
Man hätte die Figur aber auch so benutzen können:



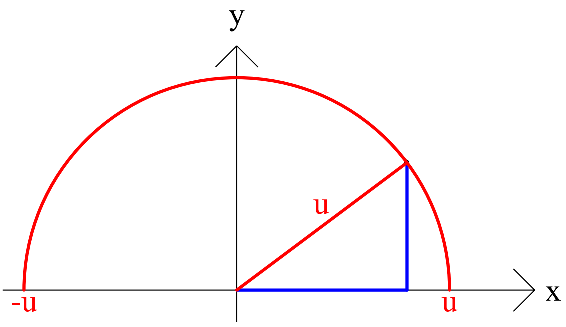
Der Flächeninhalt des roten Quadrats ist einerseits d^2 und andererseits $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + (a-b)^2$, woraus man d ebenfalls berechnen kann.

<u>Beweis Nr. 3</u>[3]

Ausgangsfrage: Wie groß ist der Abstand u des Punktes $P=(a;\quad b)$ zum Ursprung?

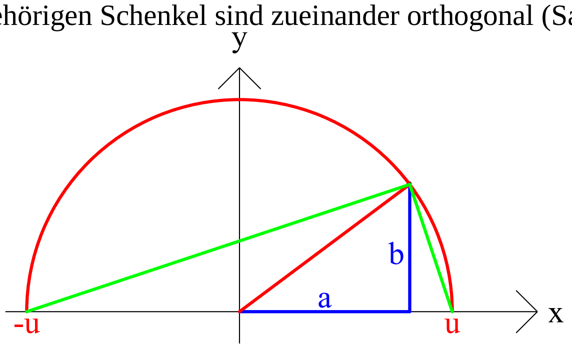


Der gesuchte Abstand u tritt an vielen Stellen auf:



Jeder Punkt P auf dem Kreis hat die beiden Eigenschaften:

- Er hat den Abstand u zum Ursprung
- Die beiden zugehörigen Schenkel sind zueinander orthogonal (Satz des Thales):



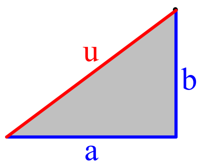
Der linke grüne Schenkel hat die Steigung $\frac{b}{a+u}$, der rechte grüne Schenkel hat die Steigung $\frac{-b}{u-a}$; da beide aufeinander senkrecht stehen, gilt

$$\frac{b}{a+u}\cdot\frac{-b}{u-a}=-1$$

und damit

$$u^2=a^2+b^2.$$

Dies ist der <u>Satz des Pythagoras</u> für das graue Dreieck:



[3] J. Meyer, Zum Satz des Pythagoras, MNU **50** (1997), S. 76 – 79.

Man sieht: *Der Satz des Pythagoras ist (nur) die Übersetzung des Satzes von Thales* in Koordinaten. (Man kann auch den Satz des Thales wieder einfach aus dem Satz des Pythagoras gewinnen; dies ist aber für die Schule nicht von Belang.)

Die Deutung der Formel

$$u^2 = a^2 + b^2$$

als Aussage über Flächeninhalte kann später erfolgen; sie steht nicht im Vordergrund.

Zwar muss man bei Beweis Nr. 3 wissen, wie man mit zueinander orthogonalen Geraden umgeht, kann dafür aber gut den Steigungsbegriff wiederholen.

Die Orthogonalität von Geraden ist einfach zu haben: Dreht man ein Steigungsdreieck („1 nach rechts, m nach oben“) um 90°, bekommt man ein neues Steigungsdreieck, bei dem man nun „m nach links und 1 nach oben“ gehen muss, also die Steigung $-\frac{1}{m}$ erhält: