Negative Zahlen

Man kann starten mit Aufgaben wie $7-3$, um dann bald überzugehen zu $7-10$. „Das geht doch gar nicht!“ – „Natürlich geht das. Gestern waren es 7°C, und nachts ist es um 10°C kälter geworden.“ Solche kontextgebundenen Aufgaben kann jeder lösen. Dann wird das Zahlenmaterial etwas variiert. Die Schülerinnen und Schüler haben das Gefühl, Aufgaben zu bekannten Sachverhalten zu lösen. Bei den Aufgabenstellungen wird man dann auch zum Guthaben-Schulden-Modell übergehen (man braucht es später zur Erklärung von „minus mal plus“).

„Wie groß ist $6\cdot(-3)$?“ – Die Orientierung am Guthaben-Schulden-Modell (bei 6 Leuten jeweils 3 € Schulden) klärt die Sache, und es können sich Übungen anschließen. Durch die enge Anbindung an den Sachkontext merken die Schülerinnen und Schüler wieder gar nicht, das sie etwas „Neues“ lernen. Nun weiß man als Lehrer, dass man auf „minus mal minus“ hinsteuern muss. Dies ist nur mit Mühe im Sachkontext deutbar. Hier ist das Permanenzprinzip eine didaktisch fruchtbare Lösung.

<u>Nach</u> der konkreten Verankerung von „plus mal minus“ bzw. von „minus mal plus“ schreibe man an die Tafel:

$$3\cdot 3=9$$
$$3\cdot 2=6$$
$$3\cdot 1=3$$
$$3\cdot 0=0$$
$$3\cdot(-1)=-3$$
$$3\cdot(-2)=-6$$

Die Schüler erkennen das Muster. Wichtig: Dieses Muster entsteht im Sachkontext!

Die (in einer Folgestunde gestellte) Frage „Wie groß ist $(-3)\cdot(-4)$?“ liefert vielleicht die richtige Antwort, die Anschlussfrage „Warum?“ nicht mehr. Aber einiges wissen wir schon:

$$(-3)\cdot 3=-9$$
$$(-3)\cdot 2=-6$$
$$(-3)\cdot 1=-3$$
$$(-3)\cdot 0=0$$
$$(-3)\cdot(-1)=?$$

Die Schülerinnen und Schüler sehen selbst, wie es weitergeht. Es schließen sich mehrere variierende mündliche Übungen an.

Warum das Permanenzprinzip?

So lange es geht, werden die Rechnungen semantisch an Temperaturen oder Schulden angebunden. Dabei ergibt sich ein Muster. Dieses wird auf syntaktischer Ebene fortgesetzt auch in Bereiche hinein, die (zunächst) semantisch nicht erklärt werden können. Dieses Fortsetzen von Mustern, der Übergang von Semantik zu Syntax ist für die Mathematik typisch. Insbesondere stellt dieser Übergang auch ein fruchtbares heuristisches Prinzip dar.
Natürlich kann dieser Übergang auch schief gehen:

$$\frac{3}{3}=1;\ \frac{2}{2}=1;\ \frac{1}{1}=1;\ \text{also}\ "\frac{0}{0}=1"$$

Hierüber sollte man mit Schülern reden (aber noch nicht bei der Erstbegegnung!).

Dass heuristische Erkenntnisverfahren unsicher sein können, sieht man - in einem anderen Sachzusammenhang - auch beim Satz von Cavalieri; trotz der mit diesem Satz verbundenen Problematik unterrichtet man ihn.

Permanenzreihen brauchen auch nicht eindeutig zu sein, wie man am klassischen Schulbuchbeispiel „Was ist 0^0 ?“ sieht. Die Permanenzreihe $3^0 = 1;\ 2^0 = 1;\ 1^0 = 1$ führt auf „$0^0 = 1$“; die Permanenzreihe $0^3 = 0;\ 0^2 = 0;\ 0^1 = 0$ führt dagegen auf „$0^0 = 0$“.

Übrigens: Später sieht man in anderen Sachkontexten, dass die obige Musterverfolgung bei negativen Zahlen sinnvoll war. Beispiel: Bei der Bestimmung des Abstands eines Punktes zum Ursprung ist es gut, dass auch bei Punkten, die nicht im I. Quadranten liegen, eine positive Länge herauskommt. Das sich verselbständigt habende Muster weist durchaus wieder semantische Bezüge auf, allerdings nicht auf der ursprünglichen Ebene.

Dass es sinnvoll sein kann, wenn sich Muster verselbständigen und keine enge semantische Anbindung mehr haben, wissen die Schülerinnen und Schüler (hoffentlich) schon:
- Multiplikation muss keine Vergrößerung bedeuten, Division (Aufteilen!) keine Verkleinerung.
- Addition muss keine Vergrößerung bedeuten, Wegnehmen keine Verkleinerung.

Und später lernen sie am Beispiel irrationaler Zahlen:
- Zahlen müssen nichts mit Zählen zu tun haben.