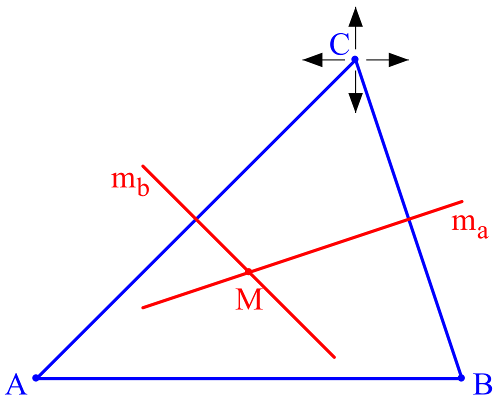
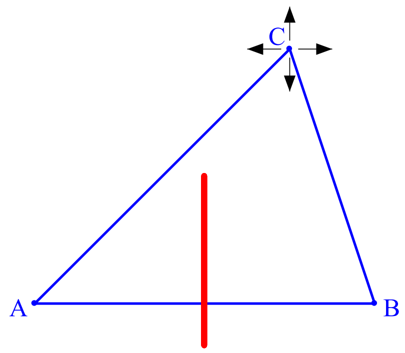
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem einzigen Punkt … und andere Transversalensätze

Natürlich könnte man starten mit der Aufforderung „Zeichnet mal alle ein Dreieck und tragt die drei Mittelsenkrechten ein“. Egal, ob man das mit Zirkel und Lineal oder mit Geometrie-Software durchführen lässt: Mit hoher Wahrscheinlichkeit wird den Schülerinnen und Schüler gar nichts auffallen. Und selbst wenn jemand das Faktum, dass sich alle Mittelsenkrechten in nur einem einzigen Punkt schneiden, für bemerkenswert halten sollte, so zeigt doch die beliebige Variierbarkeit der Ausgangsdreiecks, dass der angesprochene Sachverhalt wohl allgemein gilt.

Wenn dann die Lehrerin oder der Lehrer meint: „Das wollen (oder gar: Das müssen) wir jetzt beweisen“, so ist Unverständnis vorprogrammiert. Warum soll man denn diese Offensichtlichkeit beweisen? Man sieht es doch! Mathematik erscheint als das Schulfach, in dem Dinge, die völlig unstrittig sind, kompliziert und unverständlich „bewiesen“ werden, was immer auch „beweisen“ heißen mag. Am besten macht man erst wieder im Unterricht mit, wenn diese unsinnige Beweisphase vorbei ist.

Man hätte als Lehrperson eine viel bessere Ausgangsposition, wenn den Lernenden irgendetwas bei den Mittelsenkrechten als überraschend erscheinen würde, so dass ein Anlass zum Reden besteht. <u>Dass</u> die drei Mittelsenkrechten durch einen Punkt gehen, ist erfahrungsgemäß nicht überraschend.
Mit Hilfe von Geometrie-Software kann man aber folgendermaßen vorgehen:
Man konstruiere ein Dreieck ABC und <u>zwei</u> Mittelsenkrechten, etwa m_a und m_b. Dass die beiden Mittelsenkrechten sich schneiden, muss nicht problematisiert werden. Der Schnittpunkt sei M.
Nun kommt das Entscheidende: Man bewegt C mit der Maus und beobachtet, wie sich der Punkt M verhält. Dies Verhalten ist in der Tat überraschend: Obwohl C zweidimensional bewegt wird, bewegt sich M nur eindimensional! Wie kann man sich so etwas erklären?





Nun ist man – mit deutlich größerem Schülerinteresse – im Zentrum des klassischen Beweises:

Was wissen wir über M? M liegt auf m_b, also hat M denselben Abstand zu A und zu C.

M liegt auch auf m_a, also hat M denselben Abstand zu B und zu C.

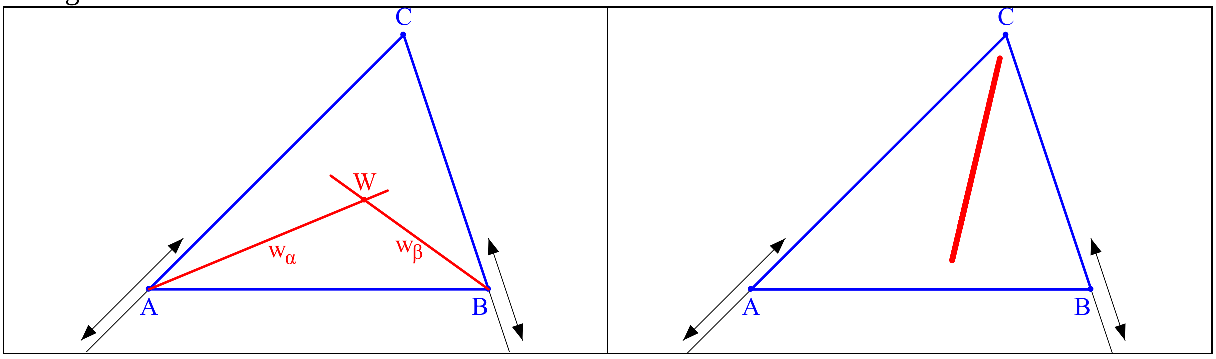
Dann hat M auch denselben Abstand zu A und zu B.

Daher liegt M auf der Mittelsenkrechten m_c.

Anders formuliert: Also geht auch m_c durch M.

Eine Übertragung dieser Vorgehensweise auf (Innen-)<u>Winkelhalbierende</u> ist ebenfalls möglich:
Bei den Mittelsenkrechten war c konstant; bei den Winkelhalbierenden muss entsprechend der Winkel γ konstant sein. Man beginne also mit zwei von C ausgehenden Halbgeraden, die den Winkel γ einschließen, und wähle A und B jeweils auf einer der Halbgeraden. Die beiden so konstruierbaren

Winkelhalbierenden w_α und w_β schneiden sich in W. Bewegt man A und B auf den Halbgeraden, so bewegt sich W auf einer Geraden.



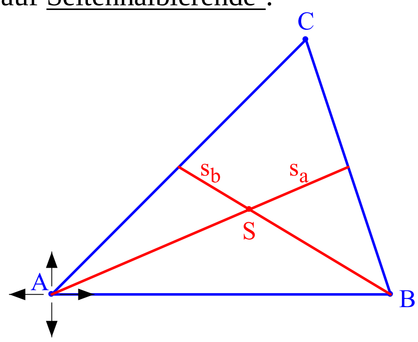
Nun kann man analog zu den Mittelsenkrechten argumentieren; es muss nur „Abstand von Punkt zu Punkt“ durch „Abstand von Punkt zu Gerade“ ersetzt werden.

Ebenfalls möglich ist eine Übertragung der Vorgehensweise auf Seitenhalbierende[1]:

Man beginne mit C und S_c, dem Mittelpunkt der Seite c. Ein beliebiger Punkt A wird an S_c gespiegelt, um B zu erhalten.

Die Seitenhalbierenden s_a und s_b schneiden sich in S. Bewegt man nun A zweidimensional, so ändert sich S überhaupt nicht. Wie ist das zu erklären?

Kann man die Seitenhalbierende auch als *Ortslinie* auffassen?



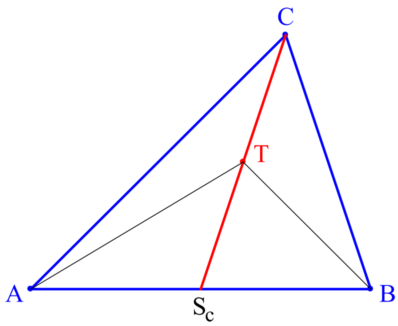
Bezeichnet man mit Fl den Flächeninhalt, so gilt einerseits $\mathrm{Fl}(AS_cC) = \mathrm{Fl}(S_cBC)$.

Genau für die Punkte T auf der Seitenhalbierenden s_c gilt außerdem

$\mathrm{Fl}(AS_cT) = \mathrm{Fl}(S_cBT)$.

Genau für die Punkte T auf der Seitenhalbierenden s_c gilt daher

$\mathrm{Fl}(ATC) = \mathrm{Fl}(TBC)$.



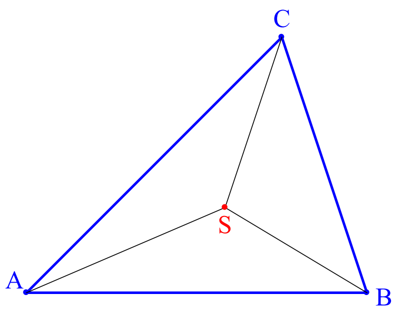
Damit ist die Charakterisierung der Punkte auf Seitenhalbierenden gefunden.

Nun sei wieder S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden s_a und s_b.

S liegt auf s_b, also ist $\mathrm{Fl}(ABS) = \mathrm{Fl}(BCS)$.

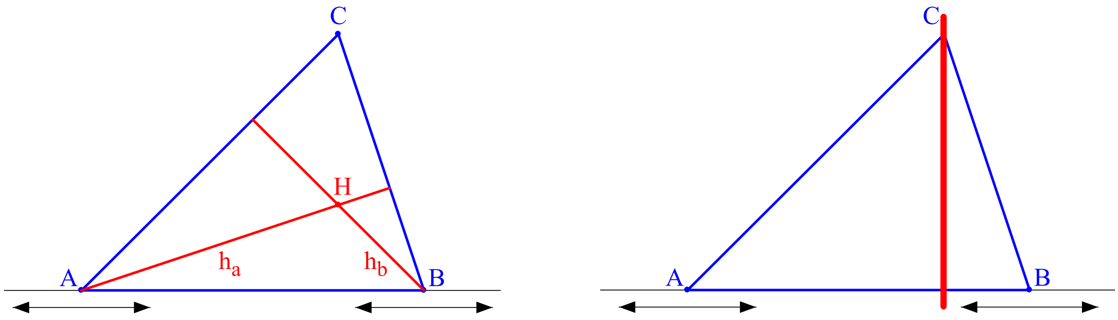
S liegt auf s_a, also ist $\mathrm{Fl}(ABS) = \mathrm{Fl}(CAS)$.

Daher ist $\mathrm{Fl}(BCS) = \mathrm{Fl}(CAS)$, also liegt S auf s_c.



[1] J. Meyer: Zur Kopunktalität der Seitenhalbierenden. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) **50** (6), S. 339 - 340 (1997).

Die Vorgehensweise lässt sich auch auf <u>Höhen</u> übertragen, allerdings nicht mehr in Klasse 7/8:
Man gehe aus vom Punkt C und einer beliebigen Geraden g, auf der C nicht liegt. Auf g wählen wir zwei Punkte A und B und bilden daraus das Dreieck ABC. Die beiden Höhen h_a und h_b schneiden sich in H. Bewegt man A und B auf g, so beschreibt H eine Gerade.



Nun muss die Höhe als *Ortslinie* beschrieben werden. Es sei T ein beliebiger Punkt auf h_c.
Fällt man von T aus Lote auf die Seiten a und b,

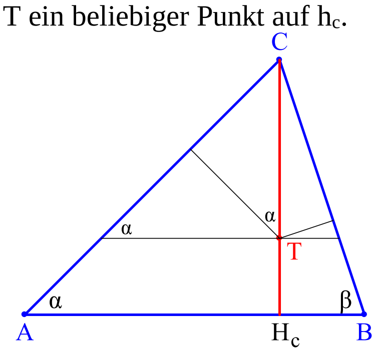
so gilt (mit dist als Abstand):

$\mathrm{dist}(T, b) = \overline{TC} \cdot \cos\alpha$

$\mathrm{dist}(T, a) = \overline{TC} \cdot \cos\beta$

und daher

$\mathrm{dist}(T, a) \cdot \cos\alpha = \mathrm{dist}(T, b) \cdot \cos\beta$.



Diese Beziehung ist für Punkte T auf h_c charakteristisch, wie man leicht sieht.

Nun sei wieder H der Schnittpunkt der Höhen h_a und h_b.

H liegt auf h_b, also ist $\mathrm{dist}(H, c) \cdot \cos\gamma = \mathrm{dist}(H, a) \cdot \cos\alpha$.

H liegt auf h_a, also ist $\mathrm{dist}(H, b) \cdot \cos\beta = \mathrm{dist}(H, c) \cdot \cos\gamma$.

Daher ist $\mathrm{dist}(H, a) \cdot \cos\alpha = \mathrm{dist}(H, b) \cdot \cos\beta$, also liegt H auf h_c.

In der Vektorgeometrie sieht man die Kopunktalität der Höhen auch leicht ein (dabei werden Punkte mit ihren zugehörigen Ortsvektoren identifiziert):
Die Höhen h_a und h_b mögen sich in H schneiden; die Zugehörigkeit von H zu diesen beiden Höhen wird durch die beiden Beziehungen

$$(A-H)\cdot(B-C)=0$$

und

$$(B-H)\cdot(C-A)=0$$

charakterisiert. Addiert man sie, bekommt man

$$(C-H)\cdot(A-B)=0\,;$$

somit liegt H auch auf der Höhe h_c.

Diese Begründung lässt sich wiederum leicht übertragen auf die Kopunktalität der <u>Mittelsenkrechten</u>:
Die Mittelsenkrechten m_a und m_b mögen sich in M schneiden; die Zugehörigkeit von M zu diesen beiden Mittelsenkrechten wird durch die beiden Beziehungen

$$\left(M-\frac{B+C}{2}\right)\cdot(B-C)=0$$

und

$$\left(M-\frac{C+A}{2}\right)\cdot\left(C-A\right)=0$$

charakterisiert. Addiert man sie, bekommt man

$$\left(M-\frac{A+B}{2}\right)\cdot\left(A-B\right)=0\,;$$

somit liegt M auch auf m_c .

Literatur:

Meyer, J. (1984): Besondere Punkte des Dreiecks. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1984; S. 235 – 238.

Meyer, J. (1997): Zur Kopunktalität der Seitenhalbierenden. In: MNU **50** (6); S. 339 – 340.