0. Kreisberechnung: Reichen nicht die Formeln?

Natürlich müssen die Lernenden mit den Formeln $A = \pi \cdot r^2$ und $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ umgehen können; für den weiteren Fortschritt im Mathematikunterricht ist aber mindestens ebenso wichtig, dass bei der Kreisberechnung das *Grundprinzip der Analysis* deutlich wird:

> Wenn man etwas nicht kann (wie die Berechnung einer krummlinig berandeten Fläche), dann mache man etwas Ähnliches, das man kann (wie die Berechnung von geradlinig berandeten Flächen) und sorge dafür, dass der Unterschied zwischen dem, was man will, und dem, was man kann, gegen null geht.

Kreise kann man nicht berechnen, wohl aber ein- oder umbeschriebene n-Ecke. Kein n-Eck ist ein Kreis, auch nicht, wenn n ganz groß ist. Aber der Unterschied zwischen Flächeninhalt des Kreises und Flächeninhalt des n-Ecks geht mit größer werdendem n gegen null. Entsprechendes gilt für den Umfang.

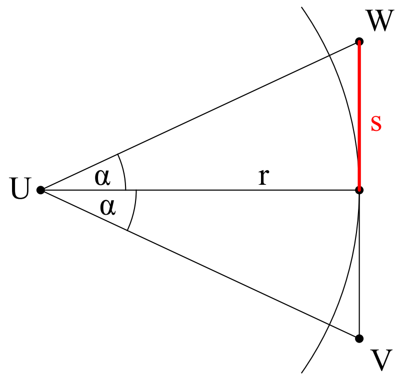
Solche Annäherungen (der Kreis wird durch n-Ecke angenähert) gibt es allüberall in der Analysis: Die Tangente wird durch Sekanten angenähert, die Pyramide durch Treppenkörper, ...
Kurz: Sowohl die Differential- als auch die Integralrechnung besteht aus Annäherungen.

1. Kreisumfang und -fläche: Ein einfacher Weg

Dem Kreis wird ein regelmäßiges n-Eck umbeschrieben.
Warum regelmäßig? Rechenvereinfachung!

Rechts ist UVW eines der n Teildreiecke.

Man teilt UVW in zwei rechtwinklige Dreiecke auf; letzteres hat den Winkel $\alpha = \frac{180°}{n}$ am Kreismittelpunkt.



Wegen $s = r \cdot \tan\alpha$ hat der Umfang des n-Ecks die Länge

$$U_n = 2 \cdot n \cdot s = 2 \cdot r \cdot n \cdot \tan\frac{180°}{n},$$

und der Flächeninhalt des n-Ecks den Wert

$$A_n = 2 \cdot n \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot s = r^2 \cdot n \cdot \tan\frac{180°}{n}.$$

Der Taschenrechner liefert

$$n \cdot \tan\frac{180°}{n} \to \pi,$$

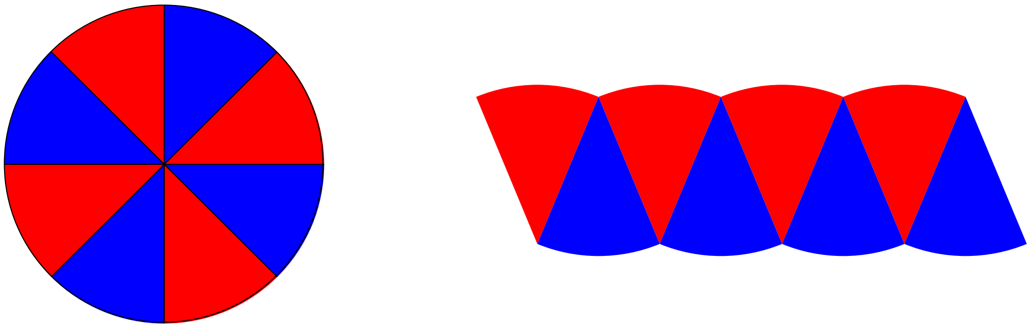
also

$$U_n \to 2 \cdot r \cdot \pi \quad \text{und} \quad A_n \to r^2 \cdot \pi.$$

(Die Konvergenz ist schnell, wenn man für n erst 10, dann 100, dann 1000, ... einsetzt.)

Selbstverständlich ist die Methode – mit leichten Modifikationen - auch für einbeschriebene n-Ecke anwendbar.

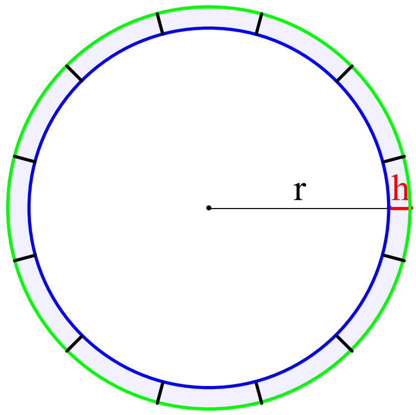
Dass tatsächlich Umfang und Kreisfläche den gleichen Faktor π haben, ist anschaulich plausibel:



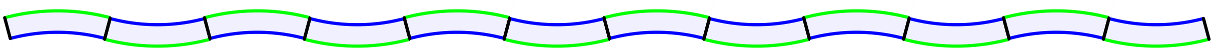
2. Die Beziehung zwischen Kreisfläche und Kreisumfang

Dieser Abschnitt verknüpft das Thema „Kreis“ mit lokalen Änderungsraten.
Die Flächeninhaltsfunktion A mit $A(r) = \pi \cdot r^2$ gibt den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Radius r an und $U(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$ dessen Umfang.
Offenbar gilt $A'(r) = U(r)$. Ist das Zufall? Steckt etwas dahinter?

Die Ableitung ist als Limes von lokalen Änderungsraten definiert.
Der Zähler $A(r+h) - A(r)$ der mittleren Änderungsrate ist die Kreisringfläche (im Bild blau).



Zerschneidet man den Kreisring, so bekommt man (etwa) ein Rechteck:



Die Höhe des Rechtecks ist h. Die Breite des Rechtecks ist der Umfang $U(r)$ des Kreises.
Daher gilt für kleine h:

$$A(r+h) - A(r) \approx h \cdot U(r)$$

und damit nach Division durch h (auf beiden Seiten):

$$\frac{A(r+h) - A(r)}{h} \approx U(r).$$

Für $h \to 0$ ist also $A'(r) = U(r)$ und somit

$$U(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \, .$$

Tragend bei dieser Argumentation ist die Grundvorstellung der Ableitung als Grenzwert von mittleren Änderungsraten; es reicht nicht, sich die Ableitung nur als Tangentensteigung vorzustellen.