Zur Bedeutung der Irrationalität[1]

Wieso ist es eigentlich etwas Bedeutsames, dass $\sqrt{2}$ kein Bruch sein soll? Warum hat das die altgriechische Mathematik in eine Krise gestürzt? Dass ständig neue Objekte gebraucht werden, ist der Schüler von Brüchen oder von negativen Zahlen doch schon gewöhnt. Und die Entdeckung, dass man $x^2+1=0$ nicht lösen kann, hat zwar in der Geschichte der Mathematik durchaus für Verwirrung gesorgt (verwirrend war eigentlich nur der Umstand, dass man mit den nicht vorhandenen Lösungen der besagten Gleichung sinnvoll rechnen konnte und manchmal sogar rechnen musste, wie man am Casus irreducibilis der kubischen Gleichung verblüfft konstatierte) - also durchaus Verwirrung, aber von Krise konnte doch keine Rede sein!

Man wird das unterrichtspraktische Problem, den Grund für das krisengenerierende Moment bei der Entdeckung irrationaler Zahlen deutlich zu machen, nicht lösen können, wenn man sich auf das *Objekt* „irrationale Zahl" konzentriert. In Wahrheit steckt etwas mehr dahinter; betrachten wir dazu den Beweis Nr. 3 oder Nr. 4. Der Kern war die Beziehung

$$\frac{z}{n}=\frac{2\cdot n-z}{z-n}\,. \qquad (*)$$

die zum Widerspruch führte.

Ja, und? Dann ist $\sqrt{2}$ eben irrational. Wo ist die Krise? Nur, weil die Pythagoräer so ein komisches Weltbild hatten, wonach alles durch kleine natürliche Zahlen erklärbar sei?

Um dem auf die Spur zu kommen, sehen wir uns noch einmal (*) an. Was steckt dahinter? Natürlich beruht der Beweis von (*) auf ähnlichen Dreiecken, etwas ganz Trivialem. Doch wie beweist man, dass bei Dreiecken mit gleichen Winkeln entsprechende Streckenverhältnisse gleich sind? Die (auf der Schule gar nicht geführten) einfachen und naiven Beweise führen nur zu einer Aussage für rationale Teilverhältnisse. In (*) wurde auch zunächst angenommen, dass d rational sei. All diese rationalen Ingredienzien führten dann aber zu einem Widerspruch.

Sehen wir uns den Gedankengang an: Wir haben eine Aussage über ähnliche Dreiecke mit rationalen Verhältnissen, rechnen mit rationalen Größen und merken dann, dass plötzlich ein irrationales Resultat entstand. Das ist viel schlimmer als nur die Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irrational sei. Das ist eine *Krise des Denkens*! Eine in rationalen Verhältnissen verwurzelte Argumentation ist nicht konsistent; sie führt aus rationalen Verhältnissen heraus[2].

Insofern ist die Entdeckung der Pythagorärer keineswegs eine „theoretische Angelegenheit", die für einen „Praktiker" uninteressant wäre. Im Gegenteil: Wenn sich der Praktiker nicht mehr darauf verlassen kann, dass seine Berechnungen konsistent sind, kann er einpacken.

Die altgriechische Mathematik hat bekanntlich auf die Krise u.a. durch Euklid reagiert. Man lese, wie er in Buch I zunächst ganz vorsichtig und ganz gewissenhaft sich erst einmal der einfachsten geometrischen Wahrheiten vergewissert, um ja nicht wieder in eine solche Falle zu tappen, wie sie die Entdeckung der irrationalen Zahlen darstellt. So etwas (im naiven Sinne) Einfaches wie den Strahlensatz beweist er erst in Buch VI (§ 2), nachdem er in Buch V die Proportionenlehre à la Eudoxos entwickelt hat.

---

[1] nach J. Meyer: Zu den Zielen des Mathematikunterrichts. In: Der Mathematikunterricht **51** (2005), Heft 2/3, S. 58 - 69.

[2] Die Geschichte, die Problematik und die Parallele zur heutigen Zeit (Gödel!) wird schön dargestellt in Shanks, Solved and unsolved problems in number theory, 1978: Chelsea Publ. Co. (Nachdruck von 1962), S. 126 ff.

Insofern hatten die „Elemente“ von Euklid nicht nur das Ziel, das damalige geometrische Wissen zu sammeln und zu ordnen, sondern sie hatten auch eine wahrheitssichernde Funktion.

Selbstverständlich kann diese Funktion nicht am Anfang des Geometrieunterrichts stehen. Welcher Schüler wollte schon die Resultate am Anfang der „Elemente“ bezweifeln, und vor allem: Warum sollte er überhaupt zweifeln? Er muss ja erst einmal erlebt haben, dass eine naive Argumentation in die Irre führen kann, dass eine rationale Gedankenführung im Irrationalen enden kann. Dies Erlebnis lässt sich durch eine Beschränkung auf die Irrationalität des *Ergebnisses* $\sqrt{2}$ kaum erreichen; entscheidend ist die Irrationalität des *Weges*.

Auch Philosophen haben sich zur Irrationaltät geäußert. So schrieb *Kant* in seinen *Reflexionen zur Mathematik*:

> „ .... wie es möglich sei, sich eine endliche Größe denken zu können, deren Begriff doch zwischen alle anzugebenden Teilungen der Einheit in Zahlreihen fiele, und wie dieses mit dem Vermögen a priori, durch Zahlen Größen zu erkennen, zusammenstimme“

Adorno bemerkte in einem mathematikfernen Kontext:

> „… dass die Irrationalität des Ganzen unverändert fortbesteht und dass jede partikulare Rationalisierung dieser Irrationalität zugute kommt.“