Zur Integration von $\int_a^b \frac{dx}{x}$

Erinnerung: Bei der Ableitung von $f_a(x) = a^x$ erhält man $f_a'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \cdot f_a(x)$, und wegen $f_e' = f_e$ und $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ lässt sich der Limes leicht als $\ln a$ identifizieren.

Die Beziehung $\int_a^b x^n \cdot dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b$ versagt für $n = -1$. Ein einfacher Ausweg führt über das bestimmte Integral $\int_1^a x^{-1+h} \cdot dx = \left.\frac{x^h}{h}\right|_1^a = \frac{a^h - 1}{h} \xrightarrow{h\to 0} \ln a$.

Die Vertauschung von Inegration und Differentiation ust hier erlaubt. Zwar liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor, wohl aber die für die Vertauschung hinreichende monotone Konvergenz (Heuser, S. 580; Satz 108.3).

Literatur:

Heuser, Harro [9]1991: Lehrbuch der Analysis. Teil 1. Stuttgart: Teubner.

Meyer, Jörg 2010: Zur Integration der Hyperbelfunktion. In: The Teaching of Mathematics **13** (2); S. 93 - 104. Online: http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/25/tm1322.pdf.