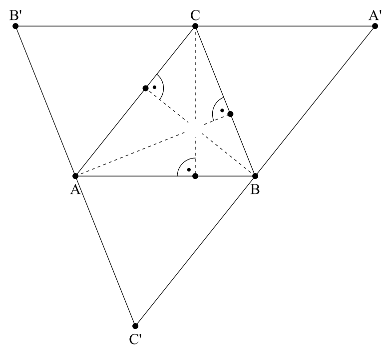
Jörg MEYER, Hameln

Zur Kopunktalität der Höhen

Mehrere unterschiedliche Kopunktalitätsbeweise werden vorgestellt. Insbesondere wird die *Höhe als Ortslinie* charakterisiert. Ferner wird eine Beziehung zum Satz von SEGNER hergestellt.

Der klassische Kopunktalitätsbeweis nach GAUSS

Das Dreieck ABC ist Mitteldreieck des Dreiecks A'B'C'. Die Höhen von ABC sind die Mittelsenkrechten zu A'B'C' (man beachte, dass $AB || A'B'$ usw. gilt); sie sind daher kopunktal (dieser Beweis soll auf GAUß zurückgehen.).

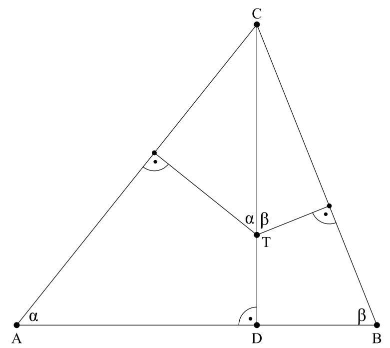


Die Kopunktalität der Höhen lässt sich auch anders begründen, etwa mit einem klassischen Transitivitätsbeweis. Dazu benötigt man …

Die Höhe als Ortslinie

Notation: Mit XY sei der Abstand zwischen den Punkten X und Y bezeichnet, mit gA der Abstand zwischen der Geraden g und dem Punkt A.

Es sei T ein Punkt auf der zu c senkrechten Höhe h_c durch C; die Dreieckswinkel treten dann doppelt auf:

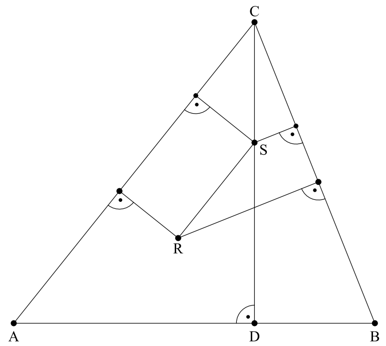


Wegen $\cos\alpha = \frac{bT}{CT}$ und $\cos\beta = \frac{aT}{CT}$ ist $\boxed{aT \cdot \cos\alpha = bT \cdot \cos\beta}$.

Umformulierung: Wegen $\cos\alpha = \frac{AD}{b}$ und $\cos\beta = \frac{DB}{a}$ ist die letzte Beziehung äquivalent zu

$$\boxed{a \cdot aT \cdot AD = b \cdot bT \cdot DB}.$$

Diese Beziehung ist für Punkte auf h_c charakteristisch, denn für einen beliebigen Punkt R, der nicht auf h_c liegt, findet man einen Punkt S auf h_c, für den entweder bS=bR und aS≠aR (wie in der Abbildung) gilt oder aS=aR und bS≠bR.



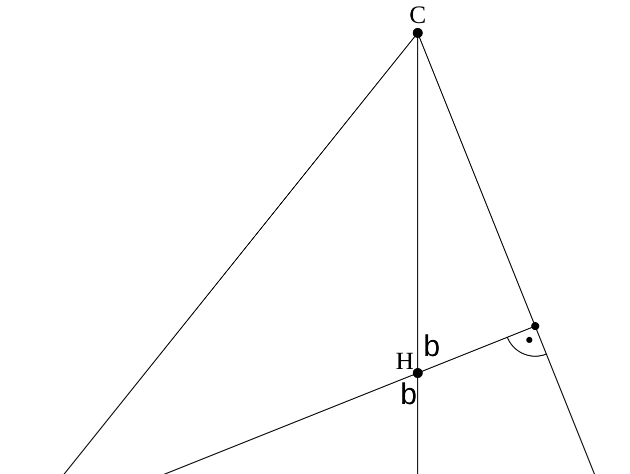
Die drei Dreieckshöhen sind kopunktal

Damit ist die Höhe hc als Ortslinie bestimmt, und man kann die übliche Struktur des Transitivitätsbeweises auf die Kopunktalität der Höhen anwenden:

> Es sei H der Schnittpunkt der Höhen h_a und h_b.
>
> H liegt auf h_b, also ist $\mathrm{cH} \cdot \cos\gamma = \mathrm{aH} \cdot \cos\alpha$.
>
> H liegt auf h_a, also ist $\mathrm{bH} \cdot \cos\beta = \mathrm{cH} \cdot \cos\gamma$.
>
> Daher ist $\mathrm{aH} \cdot \cos\alpha = \mathrm{bH} \cdot \cos\beta$, also liegt H auf h_c.

Konstanz der Höhenabschnittsprodukte

Es sei H der Schnittpunkt von *zwei* Dreieckshöhen:



Wegen $\cos\beta = \frac{cH}{AH} = \frac{aH}{HC}$ ist $cH \cdot HC = aH \cdot HA$. Das Produkt der Höhenabschnitte ist für jede Höhe gleich groß.

Dies reicht noch nicht ganz, um die Kopunktalität aller drei Höhen zu beweisen, denn wenn man Summe und Produkt der Höhenabschnitte kennt, so könnten für den Schnitt von h_c und h_b die beiden Abschnitte auf h_c auch miteinander vertauscht sein. Dass das nicht der Fall ist, zeigt

Der Kopunktaltätsbeweis nach Newton

Es sei H der Schnittpunkt der Dreieckshöhen h_c und h_a.

Wegen $\tan\beta = \frac{AD}{DH} = \frac{CD}{DB}$ ist $DH = \frac{AD \cdot DB}{CD}$, und dieser Ausdruck ist symmetrisch in A und B; daher verläuft auch h_b durch H. (Dieser Beweis soll auf NEWTON zurückgehen.)

Der Satz von SEGNER

Es sei H der Schnittpunkt der *drei* Dreieckshöhen. Dann gilt nach Obigem:

$$aH \cdot \cos\alpha = bH \cdot \cos\beta = cH \cdot \cos\gamma$$

bzw. aufgrund der Konstanz der Höhenabschnittsprodukte

$$\frac{HA}{\cos\alpha} = \frac{HB}{\cos\beta} = \frac{HC}{\cos\gamma} =: \sigma .$$

Der Sinussatz $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot R$ (mit R als Umkreisradius) hat eine ähnliche Struktur, und man wüsste gerne, wie groß σ ist.

Experimente führen zu der Vermutung, dass $\sigma = 2 \cdot R$ ist. Die Vermutung ist äquivalent zu $\frac{HA}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$ und damit zu $\frac{HA}{AD/b} = \frac{a}{CD/b}$, und dies ist äquivalent zu $AH \cdot CD = a \cdot AD = a \cdot AH \cdot \sin\beta$ und damit letztendlich zu der wahren Aussage $\sin\beta = \frac{CD}{a}$. Die vollständige Fassung des Satzes von Johann Andreas SEGNER (1704–1777) lautet somit:

$$\boxed{\frac{HA}{\cos\alpha} = \frac{HB}{\cos\beta} = \frac{HC}{\cos\gamma} = 2 \cdot R}.$$