

Nur die Parabel reflektiert achsenparallele Strahlen so, dass sie anschließend durch nur einen Punkt gehen¹

Die Strahlen seien parallel zur y-Achse, und sie sollen nach der Reflexion an der Kurventangente

durch $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gehen. Die Kurventangente in $P = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ hat die Gleichung $y = \frac{v'(t)}{u'(t)} \cdot (x - u(t)) + v(t)$;

die Argumente werden im Folgenden weggelassen.

<p>Die Tangente schneidet die y-Achse in</p> $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -u \cdot \frac{v'}{u'} + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q \end{pmatrix}.$ <p>Da der Winkel α auch bei Q auftritt, ist $\overline{FQ} = \overline{FP}$, also</p> $u \cdot \frac{v'}{u'} - v = \sqrt{u^2 + v^2}.$ <p>Ergänzt man QPF zu einem Parallelogramm, erhält man</p> $L = \begin{pmatrix} u \\ v - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v - \sqrt{u^2 + v^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 2 \cdot v - u \cdot \frac{v'}{u'} \end{pmatrix}.$ <p>Ist die y-Koordinate von L konstant, so ist wegen $\overline{PF} = \overline{PL}$ der Abstand von P zu F so groß wie der Abstand von P zu einer zur y-Achse senkrechten Geraden, und damit handelt es sich um eine Parabel.</p> <p>Man muss daher die y-Koordinate von L ableiten und bekommt $\left(2 \cdot v - u \cdot \frac{v'}{u'}\right)' = 2 \cdot v' - u' \cdot \frac{v'}{u'} - u \cdot \frac{u' \cdot v'' - u'' \cdot v'}{u'^2 \cdot u'}$,</p>	
--	--

und bei diesem Ausdruck ist nicht ersichtlich, warum er verschwinden soll. Vielleicht hat man mit

$$v - \sqrt{u^2 + v^2} \text{ mehr Glück? Es ist } \left(v - \sqrt{u^2 + v^2}\right)' = v' - \frac{2 \cdot u \cdot u' + 2 \cdot v \cdot v'}{2 \cdot \sqrt{u^2 + v^2}} = v' - \frac{u \cdot u' + v \cdot v'}{q}.$$

Hier erkennt man Elemente der Tangentensteigung, und wenn der letzte Ausdruck verschwinden soll,

muss $\frac{v'}{u'} = \frac{u + v \cdot \frac{v'}{u'}}{q}$ bzw. $\frac{v'}{u'} = \frac{u}{q - v}$ sein. Aber die Tangentensteigung hat einen ganz anderen Wert,

nämlich $\frac{v + q}{u}$.

Man soll jedoch nicht zu früh aufgeben, denn man weist leicht nach, dass $\frac{u}{q - v} = \frac{v + q}{u}$ ist.

Damit hat L tatsächlich eine von P unabhängige y-Koordinate, und bei der Kurve handelt es sich um eine Parabel.

¹ Stark modifizierte Version von J. Meyer: Kegelschnitte und Reflexionen. In: mathematica didactica 28 (1); S. 98 - 110 (2005).