

0. Sachverhalt

Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) gibt es zwei Facetten:

- Ist f stetig auf $[a; b]$, so ist die durch $F_a(x) := \int_a^x f(t) \cdot dt$ definierte Integralfunktion differenzierbar mit $F_a'(x) = f(x)$: Das Differenzieren hebt das Integrieren auf.
- Jede über $[a; b]$ integrierbare Funktion f , die dort eine Stammfunktion F besitzt, erfüllt $\int_a^b f(t) \cdot dt = F(b) - F(a)$: Das Integrieren hebt das Differenzieren auf.

Beide Facetten sind zueinander äquivalent:

Von oben nach unten: Wegen $F_a'(x) = f(x)$ ist F_a eine Stammfunktion zu f . Ist F eine andere Stammfunktion zu f , so gilt $F_a(x) = F(x) + C$ und deswegen $0 = F_a(a) = F(a) + C$, also

$$C = -F(a). \text{ Daraus folgt } \int_a^b f(x) \cdot dx = F_a(b) = F(b) - F(a).$$

Von unten nach oben: Aus $\int_a^x f(x) \cdot dx = F(x) - F(a)$ folgt $\frac{d}{dx} \int_a^x f(x) \cdot dx = f(x)$, und das ist

die Behauptung.

Man beachte übrigens, dass nicht jede Ableitungsfunktion im eigentlichen Sinne Riemann-integrierbar ist. Näheres findet man bei Appell/Reinwand: Funktionen mit Stammfunktion, Math. Sem.-Berichte **65**(2), 195-210; insbes. S. 198 f. (2018).

Natürlich kann man im Unterricht so nicht anfangen. Es wäre schön, wenn man den HDI mit der Einführung des Integrals verknüpfen könnte, und das gelingt auch bei beiden Facetten:

1a. Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion

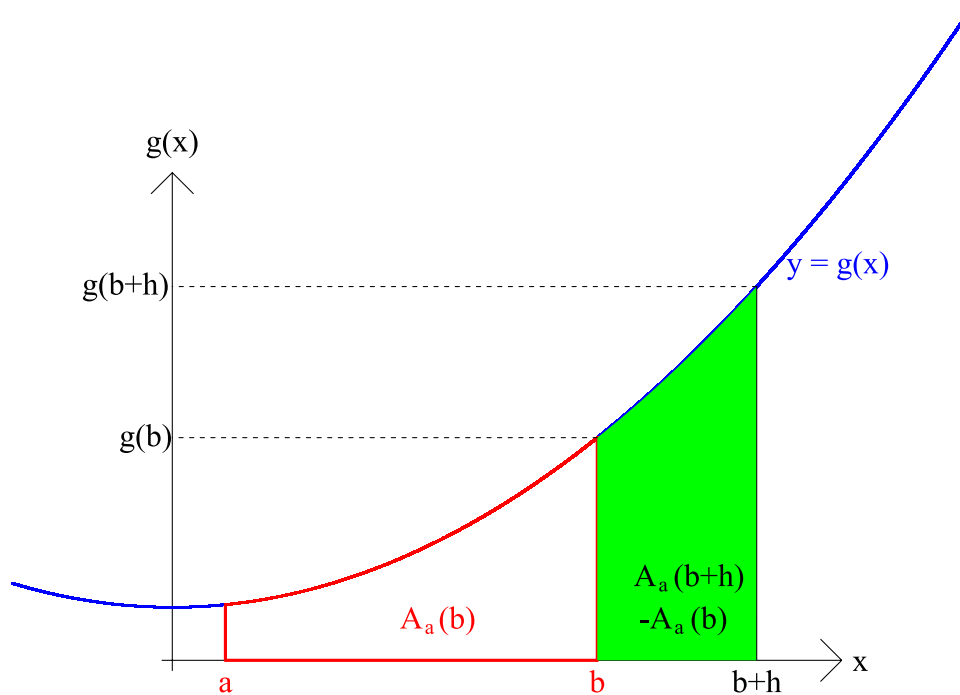
Um einen Flächeninhalt zu bestimmen, kann es sinnvoll sein, zunächst die Änderung des Flächeninhalts zu bestimmen.

Wir interessieren uns für den Flächeninhalt zwischen Graph (zu g) und Rechtsachse im Bereich von a bis b . Dabei soll der Graph g oberhalb der Rechtsachse liegen und über $[a; b]$ monoton steigend sein.

Die Flächeninhaltsfunktion A_a beschreibt diesen Flächeninhalt.

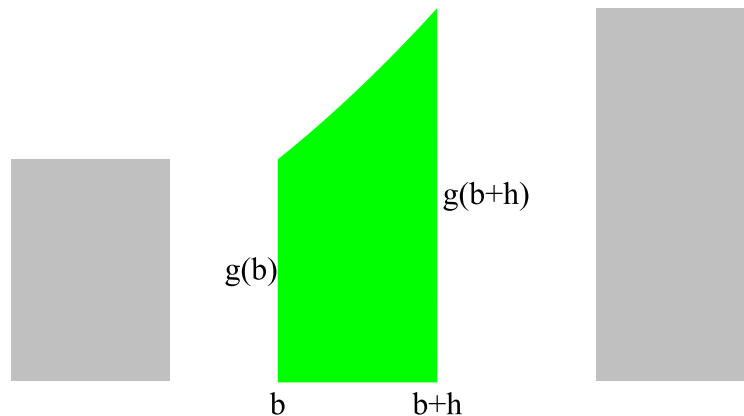
Einfacher ist es, die *Ableitung* von A_a zu ermitteln, und dazu sind mittlere Änderungsraten gut:

Der Zähler $A_a(b+h) - A_a(b)$ der mittleren Änderungsrate ist die grün markierte Fläche.



Der Flächeninhalt des grünen Gebildes lässt sich durch die beiden grauen Rechtecke abschätzen:

$$h \cdot g(b) \leq A_a(b+h) - A_a(b) \leq h \cdot g(b+h)$$



Division durch h liefert

$$g(b) \leq \frac{A_a(b+h) - A_a(b)}{h} \leq g(b+h)$$

Für $h \rightarrow 0$ bekommt man $g(b) \leq A_a'(b) \leq g(b)$ und daher $A_a'(b) = g(b)$.

Die Ableitung der Flächeninhaltsfunktion ist die Ausgangsfunktion g .

Diese Begründung lässt sich leicht für monoton fallende Funktionen modifizieren; die Aussage gilt sogar für (fast) beliebige Funktionen, wenn man man das Integrationsintervall in Monotoniebereiche aufteilt. Verläuft der Graph unterhalb der Rechtsachse, so ergibt sich ein negativer Flächeninhalt.

Tragend bei diesem Weg ist die Grundvorstellung der Ableitung als Grenzwert von mittleren Änderungsraten.

1b. Die Ableitung der Rauminhaltsfunktion

Das Verfahren von 1a. lässt sich transferieren:

Um einen Rauminhalt zu bestimmen, kann es sinnvoll sein, zunächst die Änderung des Rauminhalts zu bestimmen.

Nun rotiere der Graph zu f um die Rechtsachse. Wir nehmen die gleichen Skizzen wie oben und fassen sie als Querschnitte auf.

Die Volumenfunktion V_a beschreibt den Rauminhalt.

Wieder ist es einfacher, die Ableitung von V_a zu ermitteln, und dazu sind wieder mittlere Änderungsraten gut:

Der Zähler $V_a(b+h) - V_a(b)$ lässt sich durch zwei Zylinder abschätzen:

$$h \cdot \pi \cdot (f(b))^2 \leq V_a(b+h) - V_a(b) \leq h \cdot \pi \cdot (f(b+h))^2$$

Division durch h liefert

$$\pi \cdot (f(b))^2 \leq \frac{V_a(b+h) - V_a(b)}{h} \leq \pi \cdot (f(b+h))^2$$

Der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ führt zu

$$\pi \cdot (f(b))^2 \leq V_a'(b) \leq \pi \cdot (f(b))^2$$

und damit zu

$$\boxed{V_a'(b) = \pi \cdot (f(b))^2}$$

Die Ableitung der Volumenfunktion ist das π -fache der quadrierten Ausgangsfunktion.

Auch die **zweite Facette** liefert lässt sich zur Einführung des Integrals benutzen; am besten beginnt man mit dem folgenden Problembereich:

2a. Rekonstruktion von Funktionen

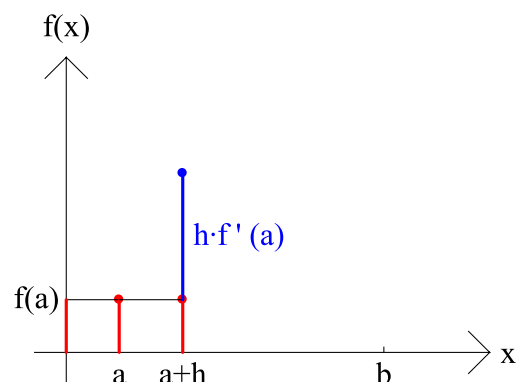
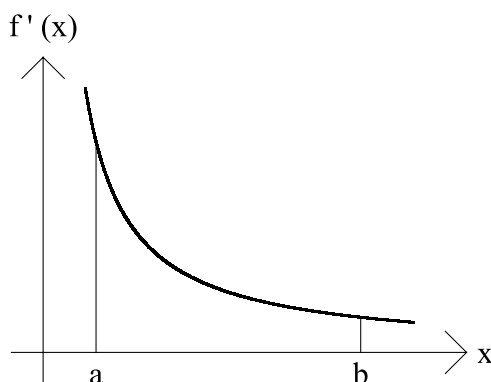
Problem: $\boxed{\text{Gegeben sind } f' \text{ und } f(a). \text{ Gesucht ist } f(b).}$

Dabei soll f' im eigentlichen Sinne (Riemann-)integrierbar sein.

Grundidee: Wir versuchen eine schrittweise Annäherung an $f(b)$.

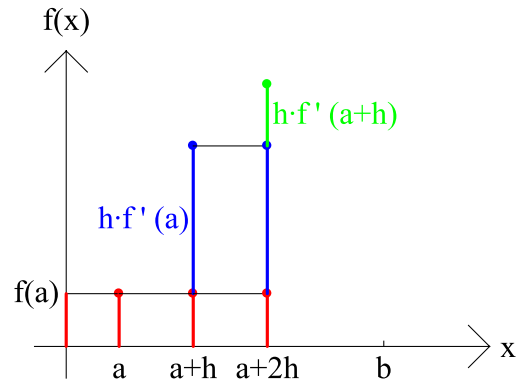
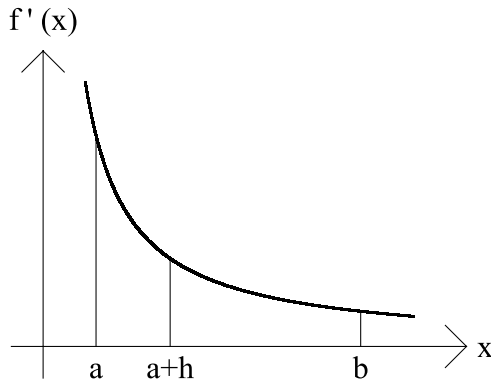
Für kleine Werte von h ist

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h}$$



Ferner ist

$$\begin{aligned} f(a+2 \cdot h) &\approx f(a+h) + f'(a+h) \cdot h \\ &\approx f(a) + f'(a) \cdot h + f'(a+h) \cdot h \end{aligned}$$



Fortsetzung:

$$f(a+3 \cdot h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h + f'(a+h) \cdot h + f'(a+2 \cdot h) \cdot h = f(a) + \sum_{i=0}^2 f'(a+i \cdot h) \cdot h$$

und allgemein

$$f(a+n \cdot h) \approx f(a) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(a+i \cdot h) \cdot h$$

Will man $f(b)$, so muss man h so wählen, dass $a+n \cdot h = b$ bzw. $h = \frac{b-a}{n}$ ist. Dann ist

$$f(b) \approx f(a) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(a+i \cdot h) \cdot h \quad \text{mit } h = \frac{b-a}{n}.$$

Diese Beziehung lässt sich etwa mit GeoGebra interaktiv dynamisieren.

Der Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$ liefert schließlich

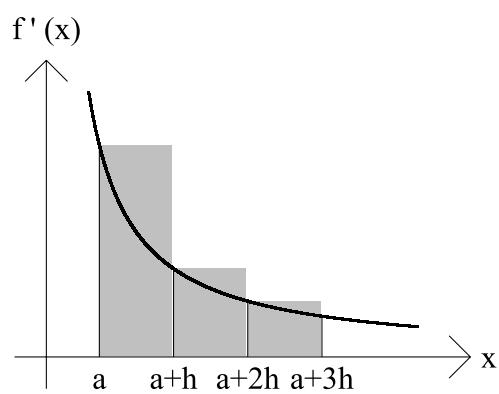
$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x) \cdot dx.$$

2b. Andere Deutung

Der Zusammenhang mit Flächeninhalten liegt auf der Hand: Es war

$$f(b) - f(a) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f'(a+i \cdot h) \cdot h \quad \text{mit } h = \frac{b-a}{n}.$$

Die rechte Seite stellt im f' -Diagramm einen Flächeninhalt dar; hier eine Skizze für $n=3$:



Die Rekonstruktion der Funktion f entspricht somit der Bildung von Flächeninhalten im f' -Diagramm.

Tragend ist hier die Grundvorstellung des Integrals als Grenzwert von Produktsummen.